Anno X a XI

IL BOLLETTINO DI MATEMATICA — ANNO X — 1911

IL BOLLETTINO DI MATEMATICA

GIORNALE SCIENTIFICO-DIDATTICO

PER L'INCREMENTO DEGLI STUDI MATEMATICI NELLE SCUOLE MEDIE

DIRETTO DAL

Dott. ALBERTO CONTI

Professore nella R. Scuola Normale Margherita di Savoia

DI ROMA

.... Volgere i progressi della Scienza a beneficio della Scuola.
FRATTINI

ANNO X

STAMPATO A BOLOGNA DALLA TIPOGRAFIA DI P. CUPPINI

Via Castiglione 8

1911

SOMMARIO:

g) Rassegna delle principali riviste di Matematica, italiane e straniere.

h) Resoconto dei Congressi di matematica, italiani e stranieri.

i) Relazioni e graduatorie dei Concorsi per cattedre di matematica; notizie del personale insegnante.

l) Una rubrica *(rubrica intermediario)* destinata ad accogliere da tutti i lettori domande intorno a qualsiasi argomento compreso nel programma del periodico, e che accoglierà altresì le risposte via via date alle dette domande dai lettori medesimi o dalla Direzione.

La quota d'abbonamento è di L. 6,50 per l'Italia (L. 7,50 per l'Estero).

L'abbonamento può esser preso in qualunque momento dell'anno, ma termina coll'anno stesso; e la Direzione non garantisce di poetre inviare tutti i numeri dell'annata a partire dal primo, a coloro che assumono l'abbonamento dopo il 15 febbraio.

L'ammontare della quota d'abbonamento dev'essere pagato in una sola volta e anticipatamente.

I fascicoli del " BOLLETTINO DI MATEMATICA „ portano la numerazione, d'anno in anno, da 1 a 12, ma escono di regola ogni due mesi. La Direzione si riserva il diritto di raccogliere in un sol fascicolo due o più numeri, all'intento di dare un proporzionato sviluppo a tutte le principali rubriche.

AVVERTENZA PEI NUOVI SOCI

Non è più disponibile alcuna collezione completa, essendo esaurita l'annata II e l'annata VII. Sono però disponibili varie copie delle annate I, III, IV, V, VI, VIII e IX. Sono anche disponibili alcune copie dell'Annata II del *Bollettino di Matematiche e di Scienze Fisiche e Naturali*, la cui pubblicazione precedette quella del *Bollettino di Matematica*, un volume interessantissimo anche pei professori di matematica (*in specie per due monografie dei prof.* CONCINA e MARENGHI *sulle costruzioni geometriche coll' uso della sola riga*), [di oltre 300 pagine].

Questioni di METODO sull'insegnamento della Geometria

ETTORE BORTOLOTTI (Modena)

Le discussioni sui principi pedagogici e le questioni di metodologia scientifica sono sempre di grande interesse: non già per la ricerca del *metodo ottimo*, o, come taluno vorrebbe, del *metodo unico e necessario*, bensì per la conoscenza dei vari, molteplici, svariatissimi mezzi che l'ingegno e l'amoroso studio dei pedagogisti hanno saputo ritrovare.

Perciò non credo che nessuno dei lettori di questo *Bollettino* sia rimasto indifferente all'annuncio di un criterio *capitale, essenziale, fondamentale, necessario* per l'insegnamento della geometria, contenuto in un articolo col titolo « PIETRO BUFFA: *Un criterio « fondamentale della Commissione Reale per l'ordinamento degli « studi secondari sull'insegnamento della Geometria e un giudizio « di C. A. Laisant* » pubblicato nel N. 8-9-10 di questo *Bollettino* (anno 1910) (inviatomi anche dall'A., in copia a parte, e con suggestive sottolineazioni).

Il criterio della C. R. sarebbe: « *circa la* **necessità** *di* **associare,** *in questo primo stadio, all'insegnamento della geometria, « quello del disegno geometrico* ».

Il giudizio di *C. A. Laisant* è contenuto in un **autografo firmato** (sic), posseduto pare dall'A. di quell'articolo, ed è del tenore seguente:

Note sur l'enseignement de la Géométrie.

« Ma conviction très arrêtée, et fondée sur une observation « prolongée, est qu'on peut et qu'on doit initier les enfants dès

« le plus jeune âge aux faits géométriques en leur *montrant des*
« *objets et des figures*, en développant leur esprit d'observation,
« en leur faisant exécuter des pliages et des coupages de papier
« et de carton, sans jamais essayer de rien leur démontrer.

« Plus tard, quand de la période d'initiation, on commence
« à entrer dans celle de l' étude — vers 11 à 13 ans — il im-
« porte d'aborder la Géométrie par le côté expérimental (indu-
« ction) pour arriver plus tard à la mèthode purement logique
« déduction).

« Dans l'intervalle, il a été possible de faire faire à l'enfant
« un premier apprentissage du dessin géométrique, de lui montrer
« l'usage des instruments-regle, compas, équerre. C'est alors que
« l'enseignement du dessin géométrique et celui de la géometrie
« peuvent et doivent marcher de front et s'aider mutuellement.
« Mais tout le bénéfice de cet enseignement parallèle serait perdu
« ou à peu prés si l'on ne se servait pas dans ce but de dessins
« exécutés *par l'élève lui-même*, si on se contentait de lui *montrer*
« ce qui a étè fait par autrui.

« Ce sont de véritables « manipulations géometriques » qu'il
« s'agit de pratiquer. On ne fait pas *assister* un élève à des ma-
« nipulations, on les lui fait *exécuter*.

« Autant vaudrait prétendre enseigner la Géométrie descriptive
« en faisant voir à l'élève de belles collections d'épures. On ne
« possède la Géométrie descriptive que lorsqu'on a fait *soi même*
« des épures ».

L'Autore riporta oltre a ciò, « come argomento, un fatto
« pubblico e già per se stesso documentato, un fatto che si può
« in qualunque momento verificare. Il testo del prof. Veronese... ».

Ebbene vengo anch'io in soccorso e porto, *come nuovi argomenti, degli altri fatti pubblici e già per se stessi* etc. etc..., questi sono..., chi lo crederebbe? *i programmi, che dal 1859 in poi reggono le nostre scuole secondarie inferiori.*

In quello per le Scuole Tecniche, che è appunto del 1859, si prescrive che *nel primo anno di studio lo scolaro si eserciti nel disegno geometrico e che solo nel secondo anno incominci lo studio della geometria.*

Quelli per i ginnasi inferiori del 1900 e delle Scuole Complementari del 1897 sono assai più espliciti.

Nelle istruzioni che accompagnano i primi si legge infatti:

« *La nomenclatura delle figure deve essere data servendosi prin-*
« *cipalmente delle loro immagini tracciate sulla lavagna o dei loro*
« *modelli.*

« *Perciò gli alunni devono essere esercitati fino dal primo*
« *anno a disegnare con gli strumenti e a mano libera, curando la*
« *nitidezza del tratto e l'esattezza delle forme.*

« *I rudimenti di disegno geometrico nella 3ª classe devono con-*
« *sistere specialmente nelle costruzioni riferentisi a problemi, che*
« *poi si tratteranno nel Ginnasio Superiore* ».

I programmi per le complementari infine prescrivono:

« *Nell'insegnamento delle nozioni pratiche di geometria, il pro-*
« *fessore farà uso del compasso, del rapportatore, del metro, per*
« *dimostrare sperimentalmente le proprietà delle figure piane; di*
« *lavori di cartone, di legno o di fili di ferro, per meglio far cono-*
« *scere le figure di solidi disegnati sulla lavagna.*

« *È inutile raccomandare che la geometria sia accompagnata*
« *continuamente dal disegno geometrico* ».

Dunque? C'era proprio bisogno del prezioso *autografo firmato* dal signor *Laisant?*

E quale è mai, nelle nostre scuole, quel professore che si contenti di esibire dei modelli, o di spiegare il testo riferendosi alle figure quivi disegnate? Io ho sempre visto disegnare bravamente sulla lavagna la figura dal professore, e gli scolari, passo passo, seguire il disegno sopra un loro quaderno.

Lo scolaro, chiamato a ripetere, deve rifare la figura e ragionare su quella che egli stesso ha tracciato.

Aggiungerò che è uso buono e costante dei nostri allievi di prepararsi a ripetere le proposizioni di geometria facendo e rifacendo le figure, sviluppandone i particolari, discutendo i vari casi, e rifacendosi le due e le tre volte da capo, fino a che non si sia da essi raggiunta la piena ed intera persuasione delle verità contenute nell'enunciato.

Ciò ho visto fare in tutte le scuole d'Italia che ho visitato, e posso dire di averne visitate parecchie, e con la dovuta attenzione.

La affermazione che: « *secondo le abitudini dell'insegnamento* « *tradizionale lo studio vien fatto su figure geometriche non dise-* « *gnate dall'alunno* » non poteva esser fatta se non da chi non aveva forse mai messo il naso dentro l'aula di un collega, e non poteva essere lasciata passare in silenzio, pel buon nome della

nostra scuola, dove, in generale, si insegna assai bene, e non bisognano i consigli del signor *Laisant*.

Quanto poi all'esigere che lo scolaro *studi* **esclusivamente** *sulle figure da lui stesso disegnate*, ed al *voler vietare che a lui si offrano modelli, in cartone, in plastica, in filo di ferro, o disegni fatti alla lavagna o stampati nel testo;* questo è un altro affare. È cosa diversa da quello che domandano ed il Laisant e la C. R., perchè da costoro si richiede solo che il *disegno geometrico accompagni lo studio della geometria*, cosa la quale, come abbiamo visto, è richiesta anche dai vigenti programmi e s'è sempre fatta da chi bramava fare il proprio dovere di insegnante.

Se è nell'uso **esclusivo** di disegni fatti dallo scolaro medesimo, che consiste la caratteristica del metodo propugnato dal signor *Buffa*, ce lo dica egli stesso senza ambagi, e ne riparleremo; ma non si appoggi nè all'autografo firmato dal signor *Laisant*, nè alla relazione della C. R. poichè non può trovare in essi nessun nuovo argomento, che già non sia nei programmi che reggono le nostre scuole e che evidentemente non giovano alla sua tesi.

Intanto dico subito che se, come risulta dal contesto del suo articolo, egli intende appunto di dare una interpretazione così grettamente ristretta al principio contenuto nella C. R. e se in ciò fa consistere la novità e la essenza del *suo* metodo, non troverà molti a lui consenzienti, per le ragioni che seguono:

1.° La difficoltà materiale di far disegnare, a chi non ha ancora alcuna idea di figura geometrica (i disegni da farsi debbono appunto dargli quelle idee) con la esattezza necessaria a che lo scolaro possa verificare, per mezzo dei sensi, su le figure da lui stesso eseguite, i fatti geometrici che dovranno essere materia di insegnamento.

Lo scolaro, sopra la figura imperfettamente disegnata, non può vedere soddisfatte quelle condizioni cui, essa effettivamente non soddisfa, se non per una *finzione mentale* ed un *atto di remissione verso l'autorità del maestro*. L'insegnamento fatto in tal modo perciò non può dirsi nè sperimentale nè razionale; ma dogmatico.

2.° Volendo, curare che, almeno grossolanamente, le figure disegnate dall'allievo rispondano alle condizioni dell'enunciato, il maestro dovrebbe perdere un tempo enorme (massime in iscuole

numerose) dovrebbe anticipare chiarimenti e raziocinii, che sarebbe utile fossero serbati a tempo più opportuno, e non gli rimarrebbe tempo per addestrare i giovanetti allo scioglimento di problemi, e nemmeno per mostrare i vari aspetti e discutere i vari casi che si possono presentare in una medesima questione geometrica.

3.° Lo scolaro prende l'abitudine di ragionare e di studiare sempre su quella figura che, una volta per tutte, egli ha disegnato sul quaderno, e non è stimolato a rifare il disegno ogni volta che vuol ripetere i ragionamenti, od i discorsi coi quali il professore accompagnò la descrizione della figura.

Nè mi si porti, *come argomento, il fatto che in qualche scuola, e da alcuni anni, quel metodo trova piena applicazione*, perchè verrà naturale la domanda « *E con quali risultati?* ».

Fin dal primo giorno di scuola gli scolari incominciano a « *disegnare le figure geometriche su le quali sarà poi fatto lo studio.* Una per pagina, in un bel quederno di carta a mano

Si impegnano così le prime 20 lezioni del corso di geometria.

L'insegnante prende poi a far sfogliare il quaderno, e, figura per figura, a « *spiegare le proposizioni geometriche ad essa rela-* « *tive, enunciate, prima in forma particolare, poi in forma gene-* « *rale* », ed, accanto ad ogni figura fa scrivere gli enunciati e le osservazioni relative.

Impiega così altre venti lezioni.

Infine, nelle ultime dieci lezioni, si risfoglia il cartolare, si riprendono le proposizioni prima solo enunciate, ed « *apparisce* « *la parte razionale, basata sul metodo sperimentale già appreso* « *e considerato come processo mentale interessante per liberare dalla* « *verifica sperimentale* ».

Benissimo: ma il guaio è che lo scolaretto scrive di: *vedere due rette perpendicolari* accanto ad una figura dove con mano inesperta ha tracciato due aste (?) pendenti l'una su l'altra assai più che la torre di Pisa, e che in una stessa pagina sotto una medesima coppia di triangoli c'è un *gruppo di proposizioni*; nelle quali proposizioni si dice di *vedere in quella coppia di triangoli* (*e sempre in quella*) *verificati prima tutti i casi di eguaglianza e poi anche tutti i casi di diseguaglianza dei triangoli.*

E, *guardando uno stesso triangolo*, gli scolari scrivono di vederlo prima *isoscele, e più sotto non isoscele*, un quadrilatero, e

sempre quello, disegnato dallo scolaro in capo alla pagina, è *visto* come parallelogramma, rettangolo, trapezio etc...

Precisamente come nel libro dello stesso prof. BUFFA (*Primo studio della Geometria Piaua*) alle pag. 41-54.

Il fatto è che le figure sono disegnate senza aiuto di strumenti, senza regole e norme e così puerilmente da potere, con un po' di immaginazione e di buona volontà, **vedere,** in esse tuttociò che il professore suggerisce al discepolo.

Ma via, chi potrà ancora seriamente affermare che lo scolaro per tale modo « *vede prima di tutto l'effettuarsi del fatto rappre-* « *sentato e constata, poi per mezzo dei sensi, il fatto indicato dalla tesi?* ».

Se gli scolaretti finiranno per imparare qualche cosa, ciò vorrà dire che è proprio vero che il metodo ha poca importanza per l'apprendimento della geometria, e che aveva ragione il *De Condillac* quando scriveva:

C'est moins dans la méthode que dans la simplicité des premières idées et dans leur évidence, que consiste la certitude du raisonnement géometrique.

Del resto, l'inconveniente di far disegnare troppo presto le figure geometriche a giovani ancora digiuni di nozioni geometriche, è stato notato ed osservato in una inchiesta fatta presso tutte le scuole di Inghilterra, la cui relazione pubblica lo stesso *Laisant*, nel suo *Enseignement mathématique* (XII. N. 3, 15 mai 1910). Ivi infatti leggiamo:

NOTES ET DOCUMENTS

ANGLETERRE

Enseignement de la géométrie dans les écoles sécondaires. (Circulèr 711 du Board of. Education, mars 1909).

« *Premier degré.*

« Le but de cette première étude est la compréhension com- « plète des notions fondamentales en géométrie. *La familiarisation* « *avec les constructions géométriques et l'habilité dans l'emploi des* « *instruments n'y sont que des considérations d'ordre sécondaire*

« *atteints plus aisément plus tard lorsque la compréhension des pro-*
« *positions géométriques l' exigera.*

« Au debout *on évitera l' usage de la représentation sur le*
« *papier.*

« La notion d'angle vient ensuite. Elle est généralement
« traitée d'une manière assez satisfaisante: cependant il *se pré*
« *senta parfois des difficultés due en partie à une notion insuffi-*
« *sante de la direction, en partie à une représentation prématurée*
« *des angles sur le papier.*

« .... On consacre souvent une année, quelquefois deux, à
« cette étude. *On peut généralement les considérer comme du temps*
« *perdu.* Lorsque cette étude est faite avant l'étude theorique, les
« constructions difficiles deviennent facilement des recettes et les
« plus faciles un amusement avec le compas ».

Ecco, io non disconosco l'utilità del disegno geometrico, e voglio anch' io che *accompagni l' insegnamento della geometria;* ma nel senso più largo e più libero della parola *accompagnare.*

E sopra tutto non credo in criteri pedagogici *essenziali, capitali, fondamentali, necessari.*

L'insegnamento va giudicato dai frutti che dà, non dai precetti cui si inspira; perchè non è il metodo che fa l'insegnante, ma è questi che, quando abbia una sufficiente base di coltura, si foggia il metodo; il quale di regola riesce tanto più efficace quanto più è personale.

« *Les règles*, per tornare al vecchio marchese di **Condillac,**
« *sont comme des garde fous mis sur les ponts, non pas pour faire*
« *marcher les voyageurs, mais pour les empêcher de tomber.*

Ed il *Lacroix* nel suo *Essai sur* l' *Enseignement*, aggiungeva;

« *Lorsque l' esprit est naturellement juste, il porte avec lui la*
« *faculté de reconnaître si une proposition simple est vraie ou non.*
« *Il est beaucoup plus utile d' exercer cette faculté, que de disserer*
« *à perte de vue sur sa nature. Si l' on voulait remporter le prix*
« *de la course, on penserait plutôt sans doute à exercer ses jambes*
« *qu' à raisonner sur le mécanisme de la marche* ».

Sulla somma degli angoli di un poligono piano non intrecciato

GIUSEPPE SFORZA (Reggio Emilia)

Le egregie signorine Magnani Erminia e Danesini Teresa hanno reso un notevolissimo servizio alla scienza pubblicando nell' ultimo numero di questo *Bollettino* (N. 11-12, Anno IX) due dimostrazioni soddisfacentissime del noto teorema:

a) *La somma degli angoli interni di un n-gono piano sciolto eguaglia n-2 piatti,*

la cui dimostrazione classica (per induzione) era notoriamente difettosa, perchè fondata sull' ipotesi, non accettabile a priori pei poligoni concavi, che:

b) *È sempre possibile staccare un triangolo da un dato poligono (non triangolare) sciolto, a mezzo di una diagonale interna al poligono.*

La signorina Magnani ha appunto completato la dimostrazione classica di *a*) provando luminosamente e molto ingegnosamente la verità di *b*); il che costituisce un considerevole acquisto fatto dalla geometria elementare, del quale dobbiamo essere grati a quella egregia signorina.

Ma non minore gratitudine si deve alla signorina Danesini, che ha dato di *a*) una dimostrazione affatto nuova e piena di attrattive pel suo carattere elementare ed adatto alla scuola. Essa ha provato che:

c) *Un n-gono sciolto con* m *angoli concavi è un aggregato di* m + 1 *poligoni convessi tutti interni ad esso aventi complessivamente (in generale)* n + 2m *lati e tali che la somma dei loro angoli eguaglia (in generale) quella degli angoli interni dell' n-gono.*

Si è detto: *in generale*, perchè, come ha notato la stessa Autrice, l' enunciato *c*) presenta eccezione quando il vertice comune a due poligoni contigui della partizione cade in un vertice

del poligono spartito In tale caso infatti si perde un lato e un angolo piatto nel numero complessivo rispettivamente dei lati dei poligoni convessi componenti e dei piatti formanti la somma degli angoli dei poligoni stessi. Si può dunque utilmente modificare *c*) nel seguente modo:

d) *Un n-gono sciolto con* m *angoli concavi è un aggregato di* m + 1 *poligoni convessi aventi complessivamente* n + 2m — h *lati* (h ≤ m) *e tali che la somma* S' *dei loro angoli aumentata di* h *piatti eguaglia la somma* S_n *degli angoli dell' n-gono.*

In formule avremo dunque (se P = angolo piatto):

$$S_n = S' + hP. \qquad (1)$$

Se poi $x_1, x_2, \cdots x_{m+1}$ indicano i numeri dei lati dei singoli poligoni componenti, si avrà:

$$S' = \sum_{1}^{m+1}{}_i (x_i - 2) P = \sum_{1}^{m+1}{}_i x_i P - 2(m+1) P =$$

$$= (n + 2m - h) P - 2(m+1) P,$$

cioè

$$S' = (n - h) P - 2P;$$

donde, sostituendo in (1)

$$S_n = (n - h) P - 2P + hP = (n - 2) P.$$

La signorina Danesini evita l' enunciato *d*) modificando opportunemente nei casi eccezionali l' n-gono senza alterarne gli angoli; il che è certamente correttissimo, ma forse non elegante.

Ora è importante notare che i teoremi *b*), *c*), *d*) sono veri indipendentemente dal postulato delle parallele; perciò potranno essere utilizzati nelle due geometrie non euclidee a dimostrare per induzione che l'area A_n di un n-gono sciolto è dato dalla formula,

$$A_n = \frac{S_n - (n-2) P}{K} \qquad (2)$$

essendo K una costante, ammesso naturalmente che la (2) sia stata direttamente provata pei triangoli ($n = 3$) Fondandosi infatti

per es. sul teorema *b*) il nostro n-gono si potrà spartire in un triangolo e in un $(n-1)$-gono (che, come ha osservato la signorina Magnani, potrà eventualmente avere due angoli piatti); e indicando con S_3, S_{n-1}, S_n e con A_3, A_{n-1}, A_n rispettivamente le somme degli angoli e le aree del detto triangolo, $(n-1)$-gono, n-gono, si avrà ad un tempo:

$$S_n = S_{n-1} + S_3 , \qquad A_n = A_{n-1} + A_3 ; \tag{3}$$

sicchè, dall' ipotesi

$$A_{n-1} = \frac{S_{n-1} - (n-3) P}{K} , \qquad A_3 = \frac{S_3 - P}{K} ,$$

ricavandosi

$$A_{n-1} + A_3 = \frac{(S_{n-1} + S_3) - (n-2) P}{K} ,$$

a cagione della (3) resta per induzione dimostrata la (2).

Se gli angoli si misurano con tale unità di misura che sia $P = \pi$, il divisore K diventa la *curvatura* dello spazio; in particolare dunque pei poligoni sferici tracciati sulla sfera di raggio R si avrà:

$$A_n = R^2 [S_n - (n-2) \pi] . \tag{4}$$

È da osservare che la dimostrazione della (4) è fatta in modo assai più laborioso nei pregevoli *Elementi di Geometria* di Lazzeri e Bassani.

Un' altra osservazione é opportuno di fare. Nell' ipotesi non euclidea (od anche sulla sfera) si immagini un' area piana (o sferica) a contorno non intrecciato arbitrario ma che possa essere con moto continuo inviluppato da una retta (cerchio massimo) mobile; tale inviluppante (che avrà un senso ben determinato quando si sia dato arbitrariamente un senso al contorno) subirà durante il moto degli spostamenti angolari infinitesimi positivi (se dalla parte ove sta l' area) negativi (se dalla parte opposta), la cui somma totale (algebrica) chiameremo *ampiezza angolare del contorno.*

Nel caso di un poligono l' ampiezza angolare del contorno si riduce alla somma algebrica degli angoli positivi o negativi che ogni lato (preso nel senso dato al contorno) forma col seguente, e tali angoli sono in valore e segno manifestamente i supplementi

degli angoli interni (sempre positivi, convessi o concavi); perciò se Σ_n è l'ampiezza angolare del contorno di un n-gono non intrecciato, sarà:

$$S_n + \Sigma_n = nP \text{ [1]} .$$

cioè:

$$S_n - (n-2)\,P = 2P - \Sigma_n . \qquad (5)$$

Allora poi la (2) si può scrivere

$$A_n = \frac{2P - \Sigma_n}{K} . \qquad (6)$$

Se ora è data l'area A a contorno sciolto non poligonale di ampiezza angolare Σ, sostituendo a tale area quella A_n di un n-gono inscritto variabile che col crescere illimitato di n tenda al contorno di A, si avrà ad un tempo $\lim A_n = A$, $\lim \Sigma_n = \Sigma$, sicchè da (6) otterremo

$$A = \frac{2P - \Sigma}{K} , \qquad (7)$$

vale a dire: *un' area piana non euclidea (o sferica) è proporzionale al replemento dell' ampiezza angolare del suo contorno (supposto non intrecciato)* e precisamente sulla sfera di raggio R si ha come in (4)

$$A = R^2 (2\pi - \Sigma) . \qquad (8)$$

Se noi facciamo le precedenti ipotesi per l'esistenza di un limite Σ di Σ_n per $n = \infty$, noi vediamo che, mentre l'espressione $S_n - (n-2)\,P$ assume per $n = \infty$ la forma indeterminata $\infty - \infty$, la espressione eguale $2P - \Sigma_n$ assume invece la forma determinata $2P - \Sigma$, la quale per ogni specie di contorno non intrecciato è proporzionale all'area da questo racchiusa; la (7) è dunque più comprensiva della usuale (2). Da (5) poi si deduce che secondochè vale l'ipotesi ellittica, euclidea o iperbolica si ha per l'ampiezza angolare Σ di un contorno chiuso non intrecciato ispettivamente $o < \Sigma < 2P$, $\Sigma = 2P$, $\Sigma > 2P$.

---

[1] Da questa formula si deduce che è sempre $o < \Sigma_n < n\mathrm{P}$, giacchè è sempre manifestamente $o < \mathrm{S}_n < n\mathrm{P}$.

Sulle definizioni per astrazione e per postulati

SEBASTIANO CATANIA (Catania)

1. — Secondo una concezione del FREGE e del RUSSELL un numero (N_0 o ∞, numero cardinale finito o infinito) è *la classe di tutte le classi equivalenti a una classe data*, intendendo per classi *equivalenti* le classi che si possono rappresentare l'una per l'altra mediante una corrispondenza univoca e reciproca fra i loro elementi. Così 2 è la classe di tutte le coppie, *apostolo* è una delle classi che hanno 12 per numero cardinale. Il PIERI ha portato, così mi sembra, qualche perfezionamento a questo concetto (*Revue de Métaphysique et de Morale*, a. 1906). Egli, traendo profitto della teoria delle *classi finite* del prof. C. BURALI-FORTI (*Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, a. 1906) propone la seguente definizione di numero cardinale finito e della classe N_0:

n è un $N_0 = n$ è la classe di tutte le classi equivalenti a una medesima classe finita u.

Di qui la definizione nominale della classe N_0.

Il PIERI osserva che bisogna ammettere due principii:

« Vi è almeno una classe infinita ».

« Data una classe infinita, i cui elementi sono alla loro volta delle classi, la classe formata con tutti gli elementi di questa è essa stessa infinita ».

Il RUSSELL definisce i razionali (rapporti) mediante il concetto primitivo di *relazione*, che applica agli interi. Il PADOA (Introduzione alla teoria delle frazioni « Bollettino della *Mathesis* », a. 1909) vede nel razionale a/b la classe di tutte le coppie (ordinate) di numeri interi proporzionali ad a e b (Cfr. anche l'articolo di C. MINEO, sui *numeri razionali secondo B. Russell*, « Periodico di Matematica », a. 1910). Infine, gl' irrazionali sono identificati a particolari classi di razionali (segmenti numerici) che

non hanno estremo. Di quest' ultima teoria una lucida esposizione è fatta dal CIPOLLA nel « Periodico di matematica », a. 1909 (1).

2. — A giudizio di molti la questione della definizione del numero (N_0, R_0, Q_0) secondo questi concetti ha raggiunto la perfezione, perchè di ciascuna specie di numero è data una definizione nominale, che include, *ipso facto*, come dice il COUTURAT (Les principes des mathématiques, 1905) l' esistenza dell' ente definito; e parecchi di quei molti affermano che nei rispetti didattici (scuole secondarie) le idee del RUSSELL sono d' una straordinaria semplicità.

Il PEANO, in una sua nota « Sulla definizione di funzione », Atti dell' Accademia dei Lincei, gennaio 1911, a proposito di un'opera con il titolo « Principia Mathematica » dei professori WHITEHED e RUSSELL, dice: Le questioni relative ai principii della matematica vi sono magistralmente ed esaurientemente trattate.

In quella nota il PEANO dimostra come partendo dai simboli del *Formulario* si possano definire *relazione* e *funzione* che sono pure definite nell' opera dei detti Autori. La definizione di funzione è basata su quella di relazione, e questa sul concetto di corrispondenza.

È però bene osservare che la definizione di funzione basata sul concetto di corrispondenza prima che dal RUSSELL era stata data dal BURALI-FORTI sulla *Rivista di Matematica*, t. VI, pag. 142 in nota, che fu poi adottata, salvo la forma, nel *Formulario*, edizione IV del 1902-903, pagine 126-127, e che senza giustificato motivo è scomparsa nel *Formulario*, ediz. V.

3. — Pare dunque che oramai sia finita, e che tutti abbiamo il preciso dovere di attenerci alle nuove teorie. Coloro che abbiano avuto la fortuna di diffondere con gli scritti e con le lezioni le idee del *Formulario* per ciò che riguarda la parte elementare dell' Aritmetica e dell' Algebra, idee, come tante volte ho ripetuto, notevoli per la loro eleganza e classica semplicità, e che tuttavia hanno incontrato e incontrano nei molti una inconcepibile ostilità,

---

(1) Notevolissimi sull' argomento sono i lavori dei professori A. BINDONI, 1909 e G. SANDRI, 1911.

perchè, si è ripetuto e si ripete, i giovani non le capiscono, si trovano di botto a dovere rifare la propria coltura elementare, e a diffonderla nella gioventù studiosa.

Veramente noi che siamo al tramonto potremmo ritenerci dispensati da tale obbligo, e considerarlo riserbato ai giovani e ai futuri insegnanti di matematica. La rivoluzione, così può chiamarsi, scoppiata nel campo della matematica elementare, e che dilaga dapertutto, darà luogo naturalmente a delle reazioni, e vi saranno gli oppositori, i conservatori. Io, p. es., umile seguace dell' opera sapiente del *Formulario*, non sono persuaso della bontà e dell' utilità delle nuove idee, ed espongo qui le mie ragioni.

4. — Perchè è nato tutto questo lavoro promosso dal Russell di ricostruzione intorno ai fondamenti della matematica? È nato principalmente perchè le definizioni per postulati e per astrazione con cui si introducono i numeri interi e i numeri irrazionali non affermano l' esistenza e l' unicità degli enti definiti. Il Couturat, pag. 43, dice:

« Les *définitions par abstraction* proviennent simplement d' une insuffisante analyse logique, et disparaissent devant la logique des relations. Les seules définitions véritables sont le définitions nominales et explicites; les définitions implicites ne sont que provisoires, et doivent se ramener à celles-là ».

Il Couturat, dopo di avere riportato un sunto della teoria delle *relazioni* del Russell, dopo di aver dato la definizione della *somma logica* di due relazioni R_1, R_2 come « la rèlation qui existe entre deux termes quelconque x, y, dès qu' il existe entre eux l' une au moins des relations R_1, R_2 », e il *prodotto logico* come « la relation qui existe entre deux termes quelconques x, y, dès que les deux relations susdites existent à la fois entre eux », soggiunge:

« On définit d' une manière analogue la somme et le produit logiques, non plus de deux relations, mais des relations de toute une classe: ces nouvelles définitions sont nécessaires, parce que les précédentes, ne pourraient s' étendre (par induction complète) qu' à une classe finie de relations, tandis que les nouvelles valent pour une classe quelconque, infinie aussi bien que finie.

On est obligé de postuler, par des axiomes spéciaux, l' exi-

stance de la somme et du produit logiques ainsi définis pour toute une classe de relations.

Ces principes établis, on peut démontrer les deux théorèmes suivants:

1° Le produit relatif d' une relation et de sa converse est une relation transitive et symétrique;

2° *Réciproque du precédent*: Toute relation transitive et symétrique non nulle peut être considerée comme le produit rélatif d' une relation uniforme et de sa converse; autrement dit, peut être analysée en deux relations uniformes de même espèce et de même sens qui unissent ses deux termes à un même troisième. Cette réciproque est très importante: elle constitue le *principe d' abstraction* ».

E in seguito dice:

« Or la logique des relations fournit le moyen de transformer une définition par abstraction en une définition explicite. Une définition par abstraction à la forme suivante:

$$x, y \varepsilon a \cdot \supset : \varphi x = \varphi y \cdot =_{x,y} \cdot x R y.$$

Or la relation R est symétrique et transitive par hypothèse, sans quoi elle ne pourrait pas servir à définir une égalité. Donc, en vertu du *principe d' abstration*, il existe une relation uniforme S entre chacun des individus x, y et un même terme z, de telle sorte que:

$$x R y \cdot = \cdot x S z \cdot y S z \cdot$$

Le principe d' abstraction, dice il COUTURAT, n' à donc pour résultat d'effectuer l'abstraction, mais au contraire d'en dispenser et de la remplacer ».

5. — Quanto dice il COUTURAT, si può, mi sembra, ridurre a questo. Con il metodo accennato nel *Formulario* si **postula l' esistenza** di una *classe di enti semplici*, quali sono abitualmente considerati; con il metodo del RUSSELL si postula l' esistenza delle *relazioni* per ottenere delle classi di classi di classi ... che rappresentano sotto forma **complessissima** gli enti semplici abituali e sotto forma non *abituale*. Quale il vantaggio del metodo del RUSSELL? Più giù indicherò notevoli svantaggi. Tra i vantaggi non so

che citare questo: il metodo accennato dal PEANO è *chiaro* e *semplice*, e quindi per essere adoperato esige *precisione* e chiarezza, cioè *non è facile* adoperarlo; il metodo del RUSSELL è contorto ed oscuro, ma, per questo, facilissimo ad essere adoperato. Di qui, certo, la preferenza che, pare, oggi si dà al metodo del RUSSELL.

La definizione per astrazione quale è accennata nel *Formulario* ha certo bisogno di essere alquanto precisata. Mi sembra che ciò sia stato fatto, come è indicato nel numero seguente, e ne farò vedere alcune semplici applicazioni.

6. — Nella recente opera: *Elementi di calcolo vettoriale*, Bologna, 1909, dei professori C. BURALI-FORTI ed R. MARCOLONGO, a pag. 160 si legge:

« La forma di definizione *(per astrazione)* di cui abbiamo fatto uso, è ben nota in matematica; ma non sarà inutile dare qualche schiarimento.

Quando si scrive $x = y$ si intende esprimere (Leibniz) che « qualunque proprietà di x è, altresì, proprietà di y »; quindi il segno $=$ esprime l'*identità* o *eguaglianza assoluta.*

Tale segno, $=$, gode delle seguenti proprietà, conseguenza della precedente definizione.

$$(1) \left\{ \begin{array}{c} x = x; \\ \text{da } x = z \text{ e } y = z, \text{ segue } x = y \text{ (Euclide)}; \end{array} \right.$$

ma tali proprietà (alle quali logicamente si riducono le tre solite, *riflessiva*, *simmetrica*, *transitiva*), *non caratterizzano* il segno $=$. Ed invero le relazioni indicate ad es. da « è equivalente a », « è simile a » soddisfano alle (1); però non rappresentano l'identità perchè: da « x è equivalente ad y, ed x è un triangolo » non segue necessariamente « y è un triangolo »; da « x è simile ad y e il volume di x è un metro cubo » non segue necessariamente « il volume di y è un metro cubo ».

Dunque le comuni relazioni: « è parallelo a », « è sovrapponibile a », « è simile a », « è equivalente a », per quanto soddisfacenti alle (1), *devono necessariamente* essere indicate con segni diversi da $=$, quando a questo segno si voglia conservare, come si fa generalmente, il preciso significato leibniziano di *eguaglianza assoluta.*

Ciò posto, la definizione per astrazione è basata sul seguente principio di logica generale:

« Se qualunque siano gli elementi $x, y, z, \ldots$ di una classe u, la relazione α tra gli u, diversa dall' identità, è tale che

$$x \alpha x,$$
$$\text{da } x \alpha z \text{ e } y \alpha z \text{ segue } x \alpha y,$$

allora esiste *una sola* classe v e *una sola* funzione f tali che:

1° qualunque sia l'elemento x di u, $f x$ è un elemento di v;

2° qualunque sia l' elemento h di v, esiste almeno un elemento x di u tale che $h = f x$;

3° se x ed y sono elementi di u, allora $f x = f y$ solamente quando x è nella relazione α con y, cioè è vero che $x \alpha y$ ».

La classe v e la funzione f sono definite dalla classe u e dalla relazione α; e la proposizione $x \alpha y$ tra infinite coppie x, y di elementi di u, viene espressa dall' *unica* identità

$$f x = f y$$

di due elementi di v. Inoltre a infiniti elementi di u, due qualunque dei quali sono nella relazione α, vien sostituito un solo elemento della classe v. Quest' ultima osservazione prova *l' importanza pratica* della definizione per astrazione, che dà, ad esempio, i *razionali*, i *numeri reali*, i *complessi* come enti semplici, mentre per il Russell sono *classi*, *classi di classi*, *coppie di classi di classi*, impossibili a maneggiarsi.

Nella definizione di vettore da noi data, u è la classe formata da coppie di punti e α è definita così: si ha:

$$(A, B) \, \alpha \, (C, D)$$

soltanto quando:

« punto medio fra A e D » = « punto medio fra B e C ».

Si verifica facilmente che α è diversa dall' identità e gode delle proprietà indicate. La classe v è quella che si chiama *vettore*; la funzione f applicata alla coppia A, B produce l' ente vettore che si è indicato con B-A.

È ben noto che: dalla relazione « è parallelo a » tra rette o piani, si ricavano *direzioni* e *giaciture*; dalla relazione « è sovrapponibile a » per i segmenti, si ricavano le *lunghezze*; dalla relazione « è equivalente a », le *aree* e i *volumi*; dalla relazione « è simile a », la *forma* d' una figura geometrica.

In modo analogo si può ottenere *peso*, *massa*, *temperatura*, *caloria*, ecc.; e in geometria il *verso* di una successione di 2, 3, 4 punti ».

7. — Facciamone l' applicazione alla definizione degli enti *lunghezza*, *direzione*, *numero reale*, e degli operatori *lunghezza di*, *direzione di*, *limite superiore di*.

a) La relazione *è sovrapponibile a* fra segmenti rettilinei è diversa dall' identità, e sodisfa alle leggi formali.

Allora esiste una sola classe, detta *lunghezza*, ed una sola funzione, indicata con lungh (lunghezza di) tali che:

1° qualunque sia il segmento x, lungh x è una determinata lunghezza;

2° se h è una lunghezza qualunque, esiste almeno un segmento x tale che h è identica a lungh x;

3° se x ed y sono due segmenti, allora è lungh $x =$ lungh y solamente quando x è sovrapponibile ad y.

Così lungh. x è ciò che per astrazione si ottiene dal segmento x quando in x si considerano tutte e sole le proprietà che x ha con gli altri segmenti y tali che x è sovrapponibile a y. A infiniti segmenti, due qualunque dei quali, x ed y, sono fra loro sovrapponibili, viene sostituita l' unica identità

$$\text{lung}\, x = \text{lungh}\, y,$$

e a tutti viene sostituito un unico elemento semplice della classe *lunghezza*,

b) La relazione α fra due rette indichi che esse sono *parallele* o *coincidenti*. La relazione α è diversa dall' identità, e soddisfa alle leggi formali. Allora esiste una sola classe detta *direzione*, ed una sola funzione, indicata con dir (direzione di) tali che:

1° qualunque sia la retta x, dir x è una determinata direzione;

2° se h è una direzione qualunque, esiste almeno una retta x tale che h è identica a dir x;

3° se x ed y sono due rette, allora è dir $x =$ dir y solamente quando x è nella relazione α con y.

A infinite rette, due qualunque delle quali sono parallele o coincidenti viene sostituito un unico elemento semplice della classe *direzione*.

c) Occupiamoci un pò più diffusamente dell' applicazione del principio logico considerato alla introduzione dei numeri reali.

Con il simbolo $\eta` R_0$ indicheremo le classi di R_0 della forma $\eta\, a$, dove a è un R_0. Cioè poniamo:

$$\eta` R_0 = \mathrm{Cls}` R_0 \cap u \ni [\exists R_0 \cap a \ni (u = \eta\, a)] \qquad \mathrm{Df}$$

e la classe $\eta` R_0$ è esistente.

Se u é un $\eta` R_0$, scriviamo, se ci è utile, $l`u$ (e leggiamo *limite superiore degli* u), per indicare quel razionale, ed a, tale che $u = \eta\, a$. Cioè poniamo:

$$u \,\varepsilon\, \eta` R_0 \,.\supset.\, l`u = \imath R_0 \cap a \ni (u = \eta\, a) \qquad (1) \qquad \mathrm{Df}$$

Segue che:

$$u \,\varepsilon\, \eta` R_0 \,.\supset.\, l`u \,\varepsilon\, R_0.$$

Se u e v sono degli $\eta` R_0$. ed $a$ e $b$ i razionali tali che $l`u = a$, $l`v = b$, o, il che torna lo stesso, $u = \eta\, a$, $v = \eta\, b$, siccome $\eta\, u = \eta\,\eta\, a = \eta\, a$, $\eta\, v = \eta\,\eta\, b = \eta\, b$, e se $a = b$ è $\eta a = \eta\, b$, e viceversa, segue dalla (1) che se $\eta u = \eta\, v$ è $l`u = l`v$, e se $l`u = l`v$, è $\eta\, u = \eta\, v$. Da (1) segue perciò che:

$$u, v \,\varepsilon\, \eta` R_0 \,.\supset:\, l`u = l`v \,.=.\, \eta\, u = \eta\, v \qquad (2)$$

Si noti che, per definizione, per ogni $\eta` R_0$, ed $u$, si ha un determinato $R_0$, ed $a$, tale che $l'\, u = l'\, (\eta\, a) = a$. E viceversa per ogni $R_0$, ed $a$, esiste una $\eta` R_0$, ed u, tale che $l'\, u = l'\, (\eta\, a) = a$. Le classi R_0 e $l' (\eta` R_0)$ sono perciò eguali, cioè

$$R_0 = l'\, (\eta` R_0).$$

Ma vi sono classi di R_0, e sia u una di esse, tali che non esiste nessun numero razionale, e sia a, tale che $u = \eta\, a$. Ciò si verifica, ad esempio, per la classe delle radici quadrate per difetto di 2.

Diciamo che fra due classi u e v di razionali, che non siano

$\eta' R_0$, e per ciascuna delle quali esistano razionali superiori a tutti i suoi elementi, intercede la relazione α, e scriviamo $u \alpha v$, per esprimere che $\eta u = \eta v$. Cioè poniamo:

$$u, v \varepsilon (\text{Cls}' R_0 \sim \eta' R_0) . \supset : u \alpha v \cdot = \cdot \eta u = \eta v \qquad \text{Df}$$

Se, p. es., u è la classe delle radici quadrate per difetto di 2, u quella delle radici quadrate per difetto di 2 e che sono maggiori di 1, dette classi non sono $\eta' R_0$, non sono eguali, e intanto è $\eta u = \eta v$. La relazione α sopra definita è dunque diversa dall' identità.

Siccome

$$\eta u = \eta u ; \ \eta u = \eta w \cdot \eta v = \eta w \cdot \supset : \eta u = \eta v,$$

dalla precedente definizione di α segue che:

$$u \alpha u ; \ u \alpha w \cdot v \alpha w \cdot \supset : u \alpha v.$$

E allora, per il principio logico riportato si ha che esiste una sola classe I, che diciamo *numero irrazionale assoluto*, ed una sola funzione l' (*limite superiore di*), tali che:

1° se u è una $\text{Cls}' R_0 \sim \eta' R_0$, $l' u$ è un determinato I;

2° se h è un I qualunque, esiste almeno una $\text{Cls}' R_0 \sim \eta' R_0$, u, tale che $l' u$ è identico ad h;

3° se u e v sono $\text{Cls}' R_0 \sim \eta' R_0$, si ha $l' u = l' v$ solamente quando u è nella relazione α con v, cioè è $\eta u = \eta v$.

Quest' ultima relazione in simboli si scrive:

$$u, v \varepsilon (\text{Cls}' R_0 \sim \eta' R_0) \cdot \supset : l' u = l' v \cdot = \cdot \eta u = \eta v \qquad (3)$$

Essendo poi

$$R_0 = l' (\eta' R_0)$$

si deduce che la classe I definita dalla (3) non contiene nessun R_0. E, cioè:

$$R_0 \cap l' (\text{Cls}' R_0 \sim \eta' R_0) = \Lambda$$

Dalle (2) e (3) si deduce

$$u, v \varepsilon \text{Cls}' R_0 \cdot \supset : l' u = l' v \cdot = \cdot \eta u = \eta v$$

Indicando con Q_0 (numero reale assoluto) la classe definita da quest' ultima relazione, si conclude che:

$$Q_0 = R_0 \cup l' (\text{Cls}' R_0 \sim \eta' R_0)$$

8. — Il prof. C. Burali-Forti nella sua Nota « Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri », pubblicata negli *Atti* dell'*Accademia delle Scienze di Torino*, anno 1903-1904, dimostra la possibilità di far dipendere gli enti di cui si serve l'Analisi, dai soli postulati per le grandezze. Nel n.° 1 definisce l'*operazione* in generale. Nel n.° 2 definisce *formalmente* la « classe di grandezze rispetto ad un' operazione f », come quella classe u per gli elementi della quale f è un' operazione, e, inoltre, gli u e l' operazione f godono delle *otto* proprietà da lui espresse, che si dimostrano assolutamente indipendenti.

Qui, dice, giova notare esplicitamente che *tutto* vien *definito formalmente* mediante gli *enti logici*, che si suppongono noti, e che, quindi, non comparendo *enti primitivi* (cioè *non definibili*), le otto proprietà ammesse non sono postulati, nel senso che si attribuisce ordinariamente a tale termine, ma semplicemente delle *condizioni* che è in nostro *arbitrio* scegliere a seconda dello *scopo pratico* che vogliamo raggiungere; e poichè dall' ente definito grandezza si deducono i numeri, senza introdurre enti primitivi, risulta immediatamente essere l' Analisi indipendente da qualsiasi postulato.

In questo lavoro, come si è detto, gli N_0, gli R_0, i Q_0, sono nominalmente definiti quali speciali *operatori* per le grandezze, e s' intravvede che l' A. ha concepito, ma non ha ancora pubblicato, come mediante qualche ritocco a quella teoria possa *prima* definirsi la classe Q_0, e successivamente le classi R_0 ed N_0, come speciali classi di Q_0, e 0, 1,... come elementi di Q_0.

Non è chi non veda l'importanza dello studio del Burali-Forti, specialmente in quest' ultimo senso, perchè con esso i numeri reali avrebbero un' origine *comune*.

Le stesse osservazioni possono estendersi alla definizione di N_0 data nel *Formulario*, ovvero con i postulati del Padoa o del Pieri. La classe N_0 e l' operazione suc si definiscono *formalmente* dicendo:

« N_0 rispetto all' operazione suc = classe u, per gli elementi

della quale suc è un' operazione, e, inoltre, gli u e l' operazione suc soddisfano alle condizioni del PADOA o del PIERI ».

9. — Da quanto precede a me pare che risultino i seguenti fatti:

1° I nuovi concetti di numero risultano dal desiderio di avere di esso una definizione nominale, implicante, cioè, il definito, la quale ha bisogno di speciali postulati esistenziali.

2° I nuovi concetti di numero come classe non coincidono con i concetti abituali, in virtù dei quali, con palese vantaggio, i numeri sono considerati come enti semplici.

3° È necessario rifare in gran parte tutto quanto è stato fatto intorno alle notazioni e alle formole algebriche e logiche. Esempii:

$1 < \sqrt{2}$ va scritto $1 \varepsilon \sqrt{2}$ se 1 è N_0 (antico); $1 \supset \sqrt{2}$, se 1 è classe. Invece di $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ si deve scrivere $\sqrt{2} \supset \sqrt{3}$. Si deve dire 1, 4 è una $\sqrt{2}$, invece di una radice quadrata per difetto di 2. Similmente 1, 2, 3, 3,14 ecc. sono dei π, o classi contenute nella classe π. Se u è un numero reale (segmento numerico), il suo quadrato non può rappresentarsi con u^2, che è diverso da uu, tranne che u^2 non valga più la classe dei quadrati degli u, e similmente il suo inverso non può esprimersi con $1/u$. Se u e v sono numeri reali (segmenti numerici), non si può scrivere $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2\,u\,v$. E si può continuare.

4° La teoria delle relazioni e il principio d' astrazione, che per essa diviene un teorema, include parecchi postulati esistenziali, e che quindi la quistione si riduce a uno spostamento di postulati esistenziali. E perciò può trovarsi grande utilità a disporre i principii logici in modo che quello enunciato dai professori BURALI-FORTI e MARCOLONGO vi apparisca o come postulato o come conseguenza di altri postulati logici esistenziali, perchè esso è semplice e fecondo, dandoci *lunghezze*, *aree*, *volumi*, *numeri reali*, *vettori*, *pesi*,... come enti semplici accessibili a tutti.

5° Le definizioni così dette per postulati sono logicamente legittime. L' obbiezione esistenziale che si fa per esse è eccessiva. La scienza pura non può essere che la scienza di classi ideali di enti intorno ai quali a nostro arbitrio si stabiliscono delle condizioni. Essa procede nella sua costruzione con metodo

deduttivo, e nelle sue conseguenze può essere d'accordo con le proprietà di classi esistenti nel mondo fisico, e può essere costruita tutta fuori del mondo fisico. La sua esistenza è sempre reale. Vi è il reale fisico e il reale ipotetico. La scienza pura è la scienza del reale ipotetico; le scienze sperimentali trattano del reale fisico. In un sistema ipotetico deduttivo il gruppo di *condizioni* liberamente poste diviene un gruppo di *postulati* quando si vuol dare agli enti non definiti un significato fisico, poichè in tal caso, dice il BURALI-FORTI nel citato lavoro, *si domanda che le proprietà siano ammesse come sperimentalmente vere.*

I Quaternioni quali coppie di numeri complessi [1]

GAETANO AGUGLIA (Milano)

1. Definizione di quaternione.

Una coppia di numeri complessi ordinari a, b, che si succedono nell'ordine dato, la indicheremo col simbolo (a, b).

Tutte le coppie del tipo (a, b) costituiscono un sistema di enti, che chiameremo *quaternioni.*

---

(1) *N. d. D.* — L'argomento di questa Nota trascende certamente i limiti del programma di matematica delle Scuole Medie; tuttavia non abbiamo avuto difficoltà ad accoglierlo in quanto che ne appare chiaramente come lo stesso metodo elementare delle « coppie » già altre volte usato in questo *Bollettino* da egregi nostri collaboratori, possa condurre con grande chiarezza e semplicità pure all'introduzione dei quaternioni, secondo le vedute del chiaro prof. M. Cipolla a cui si è ispirato l'egregio prof. Aguglia.

Diremo a, b *termini* del quaternione (a, b), il primo *antecedente*, il secondo *conseguente.*

Il quaternione (o, o), che ha i termini nulli, si chiama il quaternione zero, o nullo, o semplicemente zero.

2. Uguaglianza e sue leggi.

Due quaternioni (a, b), (c, d) si dicono *uguali*, e si scrive

$$(a, b) = (c, d),$$

se

$$a = c, \quad b = d .$$

Si prova subito che, per l'uguaglianza così definita, sussistono le leggi formali:

1° *Riflessiva*: $(a, b) = (a, b)$.

2° *Simmetrica*, se $(a, b) = (c, d)$ sarà $(c, d) = (a, b)$.

3° *Transitiva*, da $(a, b) = (c, d)$ e $(c, d) = (m, n)$, segue $(a, b) = (m, n)$.

3. Addizione e sue proprietà.

Dati due quaternioni (a, b), (c, d) si chiama loro *somma*, e si indica con $(a, b) + (c, d)$, il quaternione $(a + c,\ b + d)$. Si pone cioè:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d) .$$

Essa risulta evidentemente:

1° *Univalente*; cioè a risultato unico.

2° *Commutativa*: cioè $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$.

3° *Associativa*: cioè

$$[(a, b) + (c, d)] + (m, n) = (a, b) + [(c, d) + (m, n)] .$$

4° *Lo zero è il modulo dell'addizione*, si ha cioè

$$(a, b) + (o, o) = (o, o) + (a, b) = (a, b) .$$

E inversamente, se

$$(a, b) + (c, d) = (a, b),$$

essendo

$$a + c = a\,, \qquad b + d = b\,,$$

sarà

$$c = o\,, \qquad d = o$$

e quindi

$$(c, d) = (o, o)$$

5° *Se* $(a, b) = (c, d)$ *sarà anche* $(a, b) + (m, n) = (c, d) + (m, n)$ *e inversamente.*

4. Quaternioni opposti.

Due quaternioni si dicono *opposti* se i termini di uno sono ordinatamente gli opposti dei termini dell'altro.

L'opposto di (a, b) è $(-a, -b)$, l'opposto di (o, o) è lo stesso (o, o).

Evidente la somma di due quaternioni opposti è (o, o).

Viceversa poi, se la somma di due quaternioni è (o, o), essi sono opposti.

Infatti, se $(a, b) + (c, d) = (o, o)$, essendo

$$a + c = o\,, \qquad b + d = o$$

sarà

$$c = -a\,, \qquad d = -b$$

e quindi

$$(c, d) = (-a, -b)\,.$$

Il quaternione $(-a, -b)$, opposto di (a, b), si indica talvolta con $-(a, b)$.

5. Sottrazione.

Si chiama *differenza* di due quaternioni (a, b), (c, d), e si indica con $(a, b) - (c, d)$, il quaternione che, addizionato a (c, d), dà (a, b).

La differenza di due quaternioni (a, b), (c, d) esiste sempre, essa è uguale alla somma del primo coll'opposto del secondo, cioè:

$$(a, b) - (c, d) = (a, b) + (-c, -d)\,.$$

Ed infatti:

$$[(a, b) + (-c, -d)] + (c, d) = (a, b) + [(-c, -d) + (c, d)] =$$
$$= (a, b) + (o, o) = (a, b).$$

Si ha poi subito:

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d).$$

La differenza è determinata in modo unico.

Ed infatti, se $(a, b) - (c, d) = (m, n)$, cioè se $(m, n) + (c, d) = (a, b)$, sarà

$$m + c = a, \qquad n + d = b$$

onde

$$m = a - c, \qquad n = b - d$$

e quindi

$$(m, n) = (a - c, b - d).$$

6. Moltiplicazione.

Indicheremo con $\bar{a}$ il numero complessso coniugato di a, e analogamente con $\overline{a + b}$ ed $\overline{ab}$ ordinatamente i coniugati di $a + b$ ed ab.

Si verifica facilmente che

$$\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}, \qquad \overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b}$$

donde segue

$$\overline{a + \bar{b}} = \bar{a} + b, \qquad \overline{a\bar{b}} = \bar{a}b.$$

Ciò premesso, definiremo il prodotto di due quaternioni ponendo.

$$(a, b)(c, d) = (ac - b\bar{d},\ ad + b\bar{c}).$$

Ne segue subito che la moltiplicazione è sempre *possibile ed univalente.*

Essa gode inoltre delle seguenti proprietà:

1° *Se* $(a, b) = (c, d)$ *anche* $(a, b)(m, n) = (c, d)(m, n)$ *e* $(m, n)(a, b) = (m, n)(c, d)$.

2° *Sussiste la proprietà distributiva*:

$$[(a, b) + (c, d)]\,(m, n) = (a, b)(m, n) + (c, d)(m, n)$$

$$\text{ed}\ (m, n)\,[(a, b) + (c, d)] = (m, n)(a, b) + (m, n)(c, d),$$

Infatti

$$[(a, b) + (c, d)]\,(m, n) = ([a + c]\,m - [b + d]\,\bar{n}, [a + c]\,n + [b + d]\,\bar{m})$$

$$= (am + cm - b\bar{n} - d\bar{n},\ an + cn + b\bar{m} + d\bar{m}).$$

Dall' altra parte

$$(a,b)(m,n)+(cd)(mn)=(am-b\bar{n},\ an+b\bar{m})+(cm-d\bar{n},\ cn+d\bar{m})$$
$$=(am-b\bar{n}+cm-d\bar{n},\ an+b\bar{m}+cn+d\bar{m})$$

dunque, essendo uguali gli ultimi membri, sono uguali anche i primi.

Nella stessa maniera si dimostra la seconda uguaglianza.

3° *Sussiste la proprietà associativa*:

$$[(a,b)\,(c,d)]\,(m,n)=(a,b)\,[(c,d)\,(m,n)]\,.$$

Infatti

$$[(ab)(c,d)](m,n)=(ac-b\bar{d},\ ad+b\bar{c})(m,n)$$
$$=([ac-b\bar{d}]m-[ad+b\bar{c}]\bar{n},\ [ac-b\bar{d}]n+[ad+b\bar{c}]\bar{m})$$
$$=(acm-b\bar{d}m-ad\bar{n}-b\bar{c}\bar{n},\ acn-bdn+a\bar{d}\bar{m}+b\bar{c}\bar{m}).$$

D' altra parte

$$(a,b)[(c,d)(m,n)]=(a,b)(cm-d\bar{n},\ cn+d\bar{m})$$
$$=(a[cm-d\bar{n}]-b[\overline{cn+d\bar{m}}],\ a[cn+d\bar{m}]+b[\overline{cm-d\bar{n}}])$$
$$=(acm-ad\bar{n}-b\overline{cn}-b\overline{d\bar{m}},\ acn+ad\bar{m}+b\overline{cm}-b\overline{d\bar{n}})$$
$$=(acm-ad\bar{n}-b\bar{c}\bar{n}-b\bar{d}m,\ acn+ad\bar{m}+b\bar{c}\bar{m}-b\bar{d}n);$$

dunque, essendo uguali gli ultimi membri, sono uguali anche i primi.

4° Se uno dei fattori è (o,o) il prodotto è (o,o).

Si verifica infatti facilmente che

$$(a,b)\,(o,o)=(o,o) \qquad \text{e} \qquad (o,o)\,(a,b)=(o,o)\,.$$

Viceversa, se il prodotto è (o,o), almeno uno dei fattori è (o,o).

Infatti, se $(a,b)(c,d)=(o,o)$, cioè se $(ac-b\bar{d}, ad+b\bar{c})=(o,o)$, sarà

$$ac-b\bar{d}=o$$
$$ad+b\bar{c}=o\,,$$

e, moltiplicando la prima per $\bar{c}$ e la seconda per $\bar{d}$ e sommando, si ha:

$$a\,(c\bar{c}+d\bar{d})=o$$

Se a non è zero, segue subito $c = d = o$. Se invece $a = o$, allora le due equazioni danno:

$$b\bar{d} = o, \qquad b\bar{c} = o$$

e quindi se non è $\bar{c} = \bar{d} = o$, per cui sarebbe anche $c = d = o$, sarà zero b; onde $a = b = o$, ovvero $c = d = o$.

Dunque, almeno uno dei quaternioni (a, b), (c, d) è (o, o).

Possiamo pertanto conchiudere che: *per l' annullamento di un prodotto è necessario e sufficiente l' annullamento di un fattore.*

La moltiplicazione dei quaternioni non gode però della proprietà commutativa. Infatti, essendo

$$(a, b)\,(c, d) = (ac - b\bar{d},\ ad + b\bar{c})$$

$$(c, d)\,(a, b) = (ca - d\bar{b},\ cb + d\bar{a}),$$

perchè la moltiplicazione riuscisse commutativa occorrerebbe (e sarebbe anche sufficiente) che fosse

$$ac - b\bar{d} = ca - d\bar{b}, \qquad ad + b\bar{c} = cb + d\bar{a},$$

cioè

$$b\bar{d} = d\bar{b}, \qquad ad - cb = d\bar{a} - b\bar{c},$$

uguaglianze che, in generale, non sono soddisfatte.

In particolare:

1° Se i fattori hanno i conseguenti nulli, si ha:

$$(a, o)\,(c, o) = (ac, o), \qquad (c, o)\,(a, o) + (ca, o),$$

onde

$$(a, o)\,(c, o) = (c, o)\,(a, o),$$

e la proprietà commutativa sussiste. Inoltre, siccome il prodotto ha anch' esso il conseguente nullo, ne segue che, definendo nel solito modo il prodotto di più fattori, si può facilmente estendere la proprietà commutativa al prodotto di più di due quaternioni a conseguenti nulli.

2° Se uno dei due fattori di un prodotto ha per antece-

dente un numero reale [1] e per conseguente zero, nel qual caso il quaternione si dice *scalare*, si ha

$$(a, b)(c, o) = (ac, b\bar{c}), \qquad (c, o)(a, b) = (ca, cb)$$

ed essendo $\bar{c} = c$, perchè c è un numero reale, si conchiude che:

$$(a, b)(c, o) = (c, o)(a, b) .$$

Il prodotto di due quaternioni scalari è evidentemente anch'esso scalare, onde segue che si può facilmente estendere la proprietà commutativa al prodotto di più di due quaternioni scalari, di cui uno può anche non essere scalare.

In modo analogo, si può vedere che la proprietà commutativa del prodotto di due e più fattori sussiste anche nei seguenti casi:

3° Se tutti gli antecedenti dei fattori sono reali e i conseguenti immaginari puri.

4° Se tutti i termini dei fattori sono reali.

Noi però non ci dilungheremo su simili casi particolari.

7. Definizione delle unità. Ulteriore rappresentazione di un quaternione.

I quaternioni $(1, o)$, $(o, 1)$ si chiamano *unità* e si indicano rispettivamente con i_0, i_1, si pone cioè:

$$i_0 = (1, o), \qquad i_1 = (o, 1) .$$

La moltiplicazione ha per modulo $(1, o)$, si ha cioè

$$(1, o)(a, b) = (a, b)(1, o) = (a, b),$$

come si verifica, applicando la definizione.

Inoltre

$$(o, 1)(o, 1) = (-1, o) = -(1, o) .$$

Sono notevoli poi i quaternioni (i, o) e (o, i), pei quali si ha anche:

$$(i, o)(i, o) = (-1, o) = -(1, o) ,$$
$$(o, i)(o, i) = (-1, o) = -(1, o) ,$$

---

[1] Numero reale chiameremo, per brevità di linguaggio, un numero complesso che ha nulla la parte immaginaria (il coefficiente di i).

ed ancora

$$(i, o)\,(o, 1) = (o, i)\,,$$
$$(o, 1)\,(o, i) = (i, o)\,,$$
$$(o, i)\,(i, o) = (o, 1)\,,$$
$$(o, 1)\,(i, o) = (o, -i) = -(o, i)\,,$$
$$(o, i)\,(o, 1) = (-i, o) = -(i, o)\,,$$
$$(i, o)\,(o, i) = (o, -1) = -(o, 1)\,.$$

Se si pone

$$m\,(a, b) = (ma, mb)\,,$$

ove m è un numero complesso ordinario, si ha:

$$ai_0 = (a, o)\,,$$
$$bi_1 = (o, b)$$

e, addizionando, risulta

$$ai_0 + bi_1 = (a, b)$$

e quindi un quaternione si potrebbe anche rappresentare come la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ordinatamente i suoi termini per le unità i_0, i_1.

8. **Quaternioni coniugati. Norma e modulo di un quaternione.**

Due quaternioni (a, b), $(\bar{a}, -b)$, in cui gli antecedenti sono numeri complessi coniugati e i conseguenti sono opposti, si dicono quaternioni *coniugati*. Si ha:

$$(a, b)\,(\bar{a}, -b) = (a\bar{a} + b\bar{b}, -ab + b\bar{\bar{a}}) = (|a|^2 + |b|^2, o)$$

e, siccome $|a|^2$ e $|b|^2$ sono reali, essendo le norme dei due numeri complessi a e b, si ricava che il prodotto di due quaternioni coniugati è un quaternione scalare, che si chiama *norma* di ciascuno dei quaternioni dati.

Il quaternione scalare, che ha per antecedente la radice quadrata positiva dell' antecedente della norma di un dato quaternione, si chiama modulo del quaternione dato, e si scrive:

$$\mathrm{mod}\,(a, b) = \left(\sqrt{|a|^2 + |b|^2}, o\right).$$

9 Quaternioni inversi o reciproci.

Si dice inverso, o reciproco, di (a, b), e si rappresenta con $\frac{1}{(a, b)}$, quel quaternione che, moltiplicato per (a, b), dà il quaternione $(1, o)$,

Or, se (a, b) è un quaternione diverso da (o, o), e (x, y) un quaternione tale che sia

$$(x, y)\,(a, b) = (1, o)\,,$$

si deve avere

$$(xa - y\bar{b},\ xb + y\bar{a}) = (1, o)$$

e quindi

$$xa - y\bar{b} = 1\,, \qquad xb + y\bar{a} = o$$

e, risolvendo rispetto ad x, y,

$$x = \frac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2}\,, \qquad y = \frac{-b}{|a|^2 + |b|^2}$$

e, (a, b) non essendo (o, o) sarà $|a|^2 + |b|^2 \neq o$ è quindi x, y sono finiti; dunque

$$(x, y) = \frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2}\,, \frac{-b}{|a|^2 + |b|^2}\right).$$

Reciprocamente l'inverso di $\frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2}\,, \frac{-b}{|a|^2 + |b|^2}\right)$ è (a, b). Infatti se (x, y) è un quaternione tale che

$$(x, y)\left(\frac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2}\,, \frac{-b}{|a|^2 + |b|^2}\right) = (1, o),$$

si deve avere

$$\left(\frac{x\bar{a} + y\bar{b}}{|a|^2 + |b|^2}\,, \frac{-xb + ya}{|a|^2 + |b|^2}\right) = (1, o)$$

e quindi

$$x\bar{a} + y\bar{b} = |a|^2 + |b|^2, \qquad -xb + ya = o\,,$$

e risolvendo

$$x = \frac{\{|a|^2 + |b|^2\} a}{|a|^2 + |b|^2} = a, \qquad y = \frac{b\{|a|^2 + |b|^2\}}{|a|^2 + |b|^2} = b,$$

onde

$$(x, y) = (a, b).$$

In particolare l'inverso di (a, o) è $\frac{1}{(a, o)} = \left(\frac{\bar{a}}{|a|^2}, o\right) = \left(\frac{1}{a}, o\right)$.

10. Divisione anteriore, o come ricerca di quoto, e divisione posteriore, o come ricerca di quoziente.

Si dice *quoto* di (a, b) per (c, d), ove (c, d) è quaternione diverso da (o, o), e si indica con $\frac{(a, b)}{(c, d)}$, il quaternione che moltiplicato per (c, d) dà (a, b) (*divisione anteriore*) e si ha:

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = (a, b).\frac{1}{(c, d)}.$$

Ed infatti

$$\left[(a, b) \cdot \frac{1}{(c, d)}\right] \cdot (c, d) = (a, b) \cdot \left[\frac{1}{(c, d)} \cdot (c, d)\right] = (a, b)(1, o) = (a, b).$$

Si dice *quoziente* di (a, b) per (c, d), ove (c, d) è un quaternione diverso da (o, o), e si indica con $(a, b) : (c, d)$, il quaternione per il quale moltiplicando (c, d) si ottiene (a, b) (*divisione posteriore*), e si ha:

$$(a, b) : (c, d) = \frac{1}{(c, d)} \cdot (a, b)$$

Ed infatti,

$$(c, d) \cdot \left[\frac{1}{(c, d)} \cdot (a, b)\right] = \left[(c, d) \cdot \frac{1}{(c, d)}\right] \cdot (a, b) = (1, o)(a. b) = (a, b).$$

In entrambe le divisioni il quaternione (a, b) si dice *dividendo*, (c, d) *divisore*.

Il quoto è uguale al quoziente in tutti quei casi, e solo in quelli, in cui il prodotto del quoto pel divisore gode della proprietà commutativa.

In particolare $\frac{(a, o)}{(c, o)} = (a, o) : (c, o)$.

Infatti

$$\frac{(a, o)}{(c, o)} = (a, o) . \frac{1}{(c, o)} = (a, o) \left(\frac{1}{c}, o \right) = \left(a \frac{1}{c}, o \right) = \left(\frac{a}{c}, o \right);$$

$$(a, o) : (c, o) = \frac{1}{(c, o)} \cdot (a, o) = \left(\frac{1}{c}, o \right) (a, o) = \left(\frac{1}{c} a , o \right) = \left(\frac{a}{c}, o \right);$$

dunque, essendo uguali gli ultimi due membri, sono uguali anche i primi.

Altro caso particolare notevole è quello in cui il divisore è un quaternione scalare.

Si dimostra facilmente che, se

$$(m, n)(c, d) = (a, b) \quad \text{e} \quad (p, q)(c, d) = (a, b),$$

sarà

$$(m, n) = (p, q);$$

e, se

$$(c, d)(m, n) = (a, b) \quad \text{e} \quad (c, d)(p, q) = (a, b),$$

sarà

$$(m, n) = (p, q);$$

cioè: la divisione di quaternione per un altro, sia come ricerca di quoto, che come ricerca di quoziente, è un'operazione *univalente*.

11. **Sull' estensione di campo numerico.**

I concetti a cui ci siamo ispirati, nel compilare la presente Nota, sono quelli esposti dal prof. M. Cipolla, in un suo lavoro sulla teoria dei numeri reali [1], perveniamo quindi a conseguenze analoghe a quelle del Cipolla.

Intanto, dopo ciò che noi abbiamo esposto, si può conchiudere

---

[1] *Periodico di matem.*, a XXV, fasc. III, 1909.

che il sistema dei quaternioni costituisce, secondo Dedekind, un corpo Q.

Questo corpo contiene dei divisori. Così tutti i quaternioni della forma (a, o) costituiscono a loro volta un corpo I, che si trova in relazione notevole col corpo dei numeri complessi, J. Gli elementi di I e quelli di J si corrispondono binnivocamente e reciprocamente, e un' operazione fondamentale qualunque su dati elementi di I e l' operazione omonima su gli elementi corrispondenti di J hanno risultati corrispondenti.

Questo fatto si esprime dicendo che i due corpi I ed J sono isomorfi e che il corpo dei quaternioni Q è un corpo di grandezze numeriche sopra J, o superiore ad J.

Si suol dire comunemente che il corpo Q dei quaternioni è un' estensione del corpo J. Ma con ciò non devesi intendere che Q contiene J, sibbene che Q contiene un corpo isomorfo, ma non identico ad J.

Quest' isomorfismo si traduce simbolicamente in una identità se, rappresentando ogni quaternione della forma (a, o) con $a\,i_0$ (cfr. n. 7), si conviene di rappresentare con 1 anzichè con i_0, l' unità $(1, o)$, cioè *se si conviene di rappresentare ogni quaternione, che ha il conseguente nullo, per mezzo del suo antecedente.* E se, d' ora innanzi, i numeri complessi non rappresentano che i quaternioni, che hanno nullo il conseguente, potremo conservare a questi la denominazione di numeri complessi, perchè essa non può dar luogo ad alcuna ambiguità.

Nella nostra trattazione il concetto dell' isomorfismo, secondo le vedute del Cipolla, apparisce quindi in modo assai semplice. Essa, come la trattazione dei numeri complessi ordinari mediante coppie di numeri reali è dal punto di vista scientifico rigorosa e per la sua grande semplicità presenta indiscutibili vantaggi didattici.

OSSERVAZIONI

sulla nota " Teoremi reciproci ,, del prof. Diego Fellini

MODESTINO DEL GIUDICE (Roma)

Poichè in questa sua seconda nota intorno all' argomento « Teoremi reciproci », il prof. Diego Fellini insiste sulle stesse conclusioni della sua nota precedente non solo, ma nel tentativo di precisarne e modificarne la forma, incorre negli stessi gravi e strani errori ed in altri non pochi aventi la medesima origine, avevo deciso di non ritornare su questo argomento.

Ma riflettendo meglio, ho pensato che la ospitalità accordata a questo scritto del prof. Fellini dal Direttore di questo *Bollettino* dal quale fui impegnato a scrivere la mia nota precedente, mi costringa ad una risposta, per un dovere di cortesia verso i lettori e verso il mio contradittore.

E con questa, giacchè rifuggo da vane e sterili polemiche, credo definitivamente assoluto ogni mio impegno.

Dovendo citare ripetutamente le due note del prof. Fellini, la prima inserita nel *Periodico di Matematica* (anno XXV, fasc. IV) e la seconda in questo *Bollettino* (anno IX, n. 11, 12) indicherò la prima con la lettera P e la seconda con la lettera B.

Le premesse logiche.

Mein teurer Freund, ich rat Euch drum
Zuerst Collegium logicum.
Da wird der Geist Euch wohl dressiert
In spanische Stiefeln eingeschünrt,
Dass er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn
Uud nicht etwa, dei Kreuz und Quer
Irrlichteliere hin und her.

Göethe: *Faust.*

Innanzi tutto è opportuno di definire il pensiero dell' Autore circa il fine di questi suoi scritti, le premesse che ne sono il punto

di partenza e i risultati che egli crede di aver raggiunti « per quella esattezza d'interpretazione e di riproduzione che è pregio del Critico » [1].

Il suo punto di partenza è la definizione di teorema:

« Si enuncia un teorema quando si afferma che un ente matematico (soggetto) se gode della proprietà I (ipotesi), gode pure della proprietà non primitiva T (Tesi) »,

« Le tre parti (?) dell'enunciato di un teorema devono soddisfare alle condizioni seguenti:

« *a*) Il soggetto, l'ipotesi e la tesi, a due a due considerate, non devono avere alcun elemento comune ».

« *b*) La tesi, ferma restando ogni proprietà del soggetto, deve essere conseguenza di tutta e sola la ipotesi » [2].

Quale è il significato della condizione *a*)? Che cosa intende il prof. Fellini per « elementi comuni » ai tre termini, soggetto, ipotesi, tesi?

Egli scrive bensì: « la condizione *a*) mira ad evitare ripetizioni inutili ed ingombranti » [3], ma tali ripetizioni si riferiscono, secondo lui, al *contenuto* o alla *forma*, alla *lettera* o al *senso* della proposizione?

Poichè i termini di un giudizio sono concetti e gli elementi di un concetto sono il suo contenuto e la sua estensione, la condizione *a*), riferita alla materia della proposizione, affermerebbe che la ipotesi e la tesi, pur essendo « predicati del comune soggetto » [4] non hanno con questo nulla a comune; che è la più stridente contradizione nei termini che si possa pensare.

La condizione *a*) non può, dunque, ragionevolmente riferirsi che alla forma della proposizione e deve intendersi come una prescrizione di forma minima cioè: come un canone per il quale tra le diverse proposizioni con lo stesso contenuto, si debba preferire quella che, pur essendo chiara e precisa, sia la più breve. In ordine alla limitazione *b*) osserviamo che se nella dimostrazione di un teorema si derivasse la tesi, oltre che dalle condi-

---

(1) B., pag. 296.

(2) P., pag. 3 (Estratto).

(3) P., pag. 3.

(4) B., pag. 289.

zioni che costituiscono la ipotesi, da altre condizioni, o la si derivasse sola da alcune di quelle, il teorema sarebbe sofistico per ignoranza del soggetto (ignorantia elenchi).

La limitazione *b*) è quindi un canone logico generale che prescrive che, nell'enunciare un teorema, si debba assegnare come ipotesi *tutte* le condizioni e le *sole* condizioni da cui si deriva la tesi.

Da tutta la ipotesi che un numero N sia semplice e maggiore di 2 e da questa sola, si deriva che tale numero è dispari.

Infatti: poichè ogni numero ha per divisore sè stesso e poichè ogni numero maggiore di 2 è maggiore di 1, N ha i due divisori distinti 1 ed N.

Se N è semplice (non ha più di due divisori) non può avere un altro divisore distinto da 1 e da N e quindi non può avere per divisore 2 che è distinto da 1 e da N.

Se N si suppone semplice e maggiore di p (qualunque sia $p > 1$) si dimostra, nello stesso modo, che N non è multiplo di p.

Anche in questo punto il prof. Fellini cade in equivoco, affermando che la proposizione:

Ogni numero semplice maggiore di 2 è dispari.

equivalga all'altra:

« Un numero N (maggiore di 2) se non è divisibile nè per 2, nè per 3,.... nè per $n-1$, non è divisibile per 2 ».

Egli confonde una conseguenza dedotta dalla ipotesi

« N è semplice e maggiore di p » ($p = 2, 3, \ldots$) col contenuto del concetto « numero semplice ».

Che se poi « ritornando ancora una volta alla vieta limitazione *b* » [1] si volesse supporre che il prof. Fellini alla frase « la tesi deve essere conseguenza di tutta e sola la ipotesi » non abbia inteso (come ora mostra di credere) di attribuire il significato logico che le deriva dalla sua costruzione grammaticale, ma bensì quello affatto diverso dell'altra frase « la tesi deve convenire alla sola ipotesi », l'equivoco raggiungerebbe davvero il grado supremo delle cose strane e risibili.

Poichè se la tesi di una proposizione conviene alla sola ipotesi della stessa, la ipotesi e la tesi sono equipollenti ed è quindi valida la reciproca, senza limitazione di sorta.

---

[1] B., pag. 293.

Sicchè il prof. Fellini avrebbe prima definiti teoremi le sole proposizioni di cui sono valide le reciproche senza alcuna restrizione, escludendo così dal numero delle verità matematiche tutte quelle che non soddisfano a tale condizione (e sono la maggior parte), e dopo tale mutilazione, avrebbe data la dimostrazione (?) che « di ogni teorema esiste (sussiste) il teorema reciproco » (1)

Riserbandomi di dimostrare tra poco che il prof. Fellini, nella scelta degli enunciati dei teoremi, non è d'accordo con sè stesso circa l'uso delle limitazioni *a*) e *b*), credo utile per ora di precisare il suo pensiero circa la forma delle proposizioni della matematica.

***

Poniamo la domanda:

Nell'ambito delle dottrine matematiche un giudizio ipotetico è trasformabile sempre in un giudizio categorico?

Sembrerebbe che « benchè la relazione di inerenza e di dipendenza non si equivalgono, l'azione causale possa essere sempre espressa come proprietà » (2).

Sembrerebbe che anche il prof. Fellini sia, in un certo istante delle sue considerazioni, di questa opinione, perchè scrive: « il dire: una figura se gode ecc....., vale il dire: tutte le figure che godono ecc. » (3).

Invece, altrove afferma: « Io credo che un giudizio categorico appunto perchè tale non possa mai divenire ipotetico, e viceversa. Non sono il *se* e *l'ogni* che danno il criterio per giudicare (sic) di un giudizio; ciò che dagli altri distingue il giudizio ipotetico è la dipendenza della tesi dalla ipotesi, od, in altri termini, la necessità di una dimostrazione » (4).

Da questa dottrina discende che la proposizione: « Ogni equazione algebrica ha una radice (d'Alembert) », traduce un giudizio ipotetico.

---

(1) P., pag. 4.

(2) Masci: *Logica*, pag. 214.

(3) B., pag. 224.

(4) B., pag. 288.

E poichè il prof. Fellini afferma pure: « Credo che di giudizi categorici, in matematica non vi sono che le proposizioni primitive » (1); si deduce che la proposizione:

« Se una circonferenza passa per due punti, uno interno, l'altro esterno ad una seconda circonferenza, ha con questa due punti a comune » traduce un giudizio categorico.

Sicchè chi non avesse cognizioni matematiche, nulla potrebbe affermare circa la natura logica di tali proposizioni.

Anzi, poichè una stessa proposizione geometrica è talora assunta come postulato o come teorema secondo l'ordine della esposizione, il carattere logico di una tale proposizione sarebbe affatto indeterminato.

Invano si obbietterebbe al prof. Fellini che la classificazione dei giudizi è del dominio della Logica pura, che è la dottrina delle forme del pensare indipendentemente dalla natura particolare del contenuto del pensiero; egli afferma:

« Nell'ambito delle dottrine matematiche non è opportuno dare alle disquisizioni della Logica formale una interpretazione prettamente letterale » (2).

***

Tali le premesse.

E il fine?

La conclusione della prima nota è la seguente:

« Concludendo diremo che, pur trattandosi soltanto di una quistione di metodo, sarà logico bandire il teorema semplice per far luogo *unicamente* e **sempre** alla forma veramente tassativa del doppio teorema. Sarà logico (!) infine, sapendo che di **ogni** teorema semplice enunciato bene sussiste il reciproco, dare l'ostracismo alla ingiustificata, incerta ed indeterminata limitazione che vien posta al principio di ogni ramo della matematica razionale sulla esistenza (verità) del teorema reciproco, limitazione che sa di pregiudizio » (3) (!!!).

---

(1) B., pag. 287.

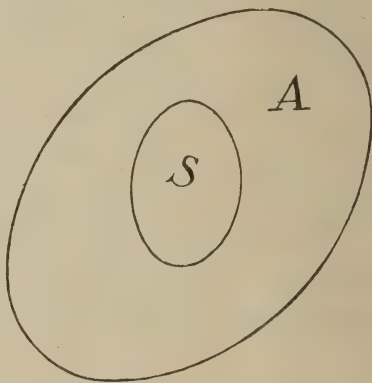
(2) B., pag. 283.

(3) P., pag. 7.

È evidente quindi che il prof. Fellini, con la prima nota, si era proposto di eliminare la limitazione che assegna in generale la Logica alla validità della reciproca di una proposizione, pur intendendo di limitare la sua innovazione al campo delle dottrine matematiche. Non solo, ma è altresì evidente che egli credeva di aver raggiunto completamente tale scopo.

Per rendere più chiara la significazione intima della ricerca del prof. Fellini, rappresentiamo, come usano fare i Logici, le estensioni del soggetto e del predicato con due aree piane, chiuse, a contorno semplice.

Il teorema « ogni S è A » significa, in tale rappresentazione, che l'area S (estensione del concetto S) è contenuta dall'area A (estensione del concetto A) (¹).

Segue da ciò che S, in generale, è solo una parte di A, cioè che solo una parte dell'area A è l'area S; in altri termini « ogni S è A » implica che « qualche A è S ».

La validità del reciproco universale sussiste solo se le aree S ed A coincidono.

Il prof. Fellini quindi si sarebbe proposto di rendere *sempre* (!) uguali le aree S ed A.

Ed in qual modo?

« Enunciando bene il teorema » (!)

« A confermare che di un teorema non sempre esiste il reciproco, per solito si portano degli esempi (ed uno solo basterebbe); ma tali esempi, quando si ponga mente a tenere distinte le tre parti dell'enunciato, perdono ogni loro efficacia ».

(¹) La prima legge delle inverse per proposizioni universali va dimostrata precisamente in tal modo. Poichè se « ogni S è A » la estensione del concetto S è parte della estensione del concetto A; e ciò implica che ogni elemento escluso da A è anche escluso da S, cioè, che « ogni non A è un non S ».

Ed è, riferendoci alla rappresentazione, un semplicissimo fatto intuitivo.

Come qui sotto rilevasi, i citati esempi non hanno ovvero hanno il teorema reciproco secondo che si dà ai medesimi la dizione consueta (di sinistra), o quella *riformata* (*di destra*).

« Due rette perpendicolari ad una terza sono parallele ».

« Due angoli retti sono uguali ».

« Due rette delle quali una è perpendicolare ad una terza, se anche l'altra è perpendicolare alla terza, sono parallele ».

« Due angoli dei quali uno è retto, se pure l'altro è retto, sono uguali » (1).

E evidente che il prof. Fellini, quantunque conceda che un solo esempio di teorema di cui non sia valido il reciproco basti a dissipare la sua costruzione, crede impossibile produrne anche un solo che resista alla potenza della trasformazione da lui immaginata.

Ma in che consiste tale trasformazione?

« Nel tenere distinte le tre parti dell'enunciato ».

Nell'enunciato « ogni equazione algebrica ha una radice » le tre parti sono: *equazione, algebrica avente una radice*, e sembrano distinte; non pertanto non sussiste il reciproco di questo teorema.

Ma ritorniamo agli esempi del prof. Fellini.

Nell'enunciato « due angoli retti sono uguali », le tre parti sono *due angoli*, *retti*, *uguali*, e sono ben distinte.

Tale enunciato soddisfa alla limitazione *a*), perchè queste « tre parti » non hanno elementi comuni ». Soddisfa alla limitazione *b*) nel senso che la tesi *uguali* si deriva da tutta e sola la ipotesi *retti*; non nel senso che la tesi *uguali* convenga al solo soggetto *angoli*, *retti*, perchè non sussiste il reciproco.

Il prof. Fellini lo sostituisce con la *dizione riformata*:

« Due angoli dei quali uno è retto, se pure l'altro è retto, sono uguali ».

Come soddisfa più tale enunciato alla limitazione *a*), ossia al canone della forma minima? Non hanno il soggetto e l'ipotesi la parola « retto » a comune, mentre la limitazione *a*) impone che

---

(1) P., pag. 5.

« soggetto, ipotesi e tesi, a due a due considerate, non abbiano alcun elemento comune » (1)?

Inoltre, poichè al prof. Fellini « pare che tanto dal punto di vista logico, quanto dal punto di vista formale sia più naturale dire che « ipotesi e tesi sono due predicati del comune soggetto » (2), siamo costretti ad accettare che « se l' altro è retto » sia un predicato del soggetto « due angoli dei quali uno è retto »: e con quanto vantaggio della logica e della grammatica, ciascuno ben vede.

Per non gettare la grammatica del tutto alle ortiche dovremmo dire:

Se una coppia di angoli dei quali uno è retto è una coppia di angoli retti, è una coppia di angoli uguali.

Ma se si tenta l' analisi logica di tali strani enunciati e ci si propone di determinare il soggetto al quale si riferisce il predicato « uguali », non si può farlo altrimenti che ritornando alla « dizione consueta ».

L' equivoco del prof. Fellini è così completato.

Come prima ha attribuito al contenuto del pensiero l' ufficio della forma, ora attribuisce alla forma le veci del contenuto, riducendo la equipollenza dei termini di un giudizio, cioè di due concetti, ad un fatto puramente formale; anzi semplicemente verbale.

La validità del reciproco si riduce ad una illusione che si ottiene contorcendo opportunamente l' enunciato del teorema!

Ma è poi vero che tale contorsione sia sempre possibile?

Come debbo contorcere l' enunciato « ogni equazione algebrica ha una radice » per darmi la illusione della validità del reciproco?

Il prof. Fellini non ha fisssato una regola per la formazione degli enunciati a « dizione riformata »; si è limitato a pochi esempi.

Ma il peggio è che tra gli enunciati che possono essere contorti ve ne è pure alcuno che, nonostante la contorsione, non dà la illusione della validità del reciproco.

---

(1) P., pag. 3.
(2) B., pag. 289.

Delle due proposizioni:

« Se due rette sono entrambe perpendicolari ad una terza, sono parallele », « Se due involuzioni binarie sovrapposte sono entrambe ellittiche, hanno una coppia a comune », non sussistono le reciproche.

Il prof. Fellini dà alla prima la « dizione riformata »:

« Due rette delle quali una è perpendicolare ad una terza, se anche l'altra è perpendicolare alla terza, sono parallele; ed io do alla seconda la « dizione riformata »:

« Due involuzioni binarie sovrapposte delle quali una è ellittica, se anche l'altra è ellittica, hanno una coppia comune.

Ma di queste due forme parimenti contorte la prima dà la illusione della validità della reciproca, non così la seconda.

Il prof. Fellini dice che in tale enunciato manca tra la ipotesi e la tesi la voluta euritmia » ([1]).

Manca la validità della reciproca.

I pochi esempi da cui il prof. Fellini si crede autorizzato al poetico volo sono casi semplicemente sporadici e la ragione logica del loro essere è precisamente quella da me segnalata nel n, 13 della mia nota precedente.

Il teorema del prof. Fellini.

> Cómo me puedo enganâr en lo que digo?.... Pues ese es el yelmo de Mambrino.... Verás cuán sine hablar palabra, por ahorrar del tiempo, concluyo esta aventura, y queda par mio el yelmo que tanto he deseado.
>
> CERVANTES: *Don Quijote* - Pr. pr., cap. XXI.

E veniamo finalmente al teorema, con cui si conclude la seconda nota del prof. Fellini:

« *Di ogni teorema (nell'ambito della definizione e delle relative limitazioni), in cui la ipotesi e la negazione della ipotesi (opposizione contraria) sono, rispetto al soggetto (universale), i soli giudizi possibili (disgiuntivi), sussiste il reciproco* » ([2]).

([1]) B., pag. 293.

([2]) B., pag. 295.

Questo teorema è una edizione riveduta e corretta dell' altro, messo in principio della prima nota, ed enunciato più semplicemente:

« Di ogni teorema esiste (sussiste?) il reciproco » (1).

Osserviamo subito che se nel pensiero del prof. Fellini « la vieta limitazione *b*) determinasse la equipollenza della ipotesi e della tesi » (2) (come ora mostra di voler credere) il teorema precedente, sostituendo alle parole « nell'ambito della definizione e delle relative limitazioni » il loro significato effettivo, andrebbe enunciato: « Di ogni teorema (di cui sussiste il reciproco) in cui la ipotesi e la negazione della ipotesi (opposizione contraria) sono rispetto al soggetto (universale) i soli giudizi possibili (disgiuntivi), sussiste il reciproco ».

La tesi non sarebbe così solo una ripetizione della ipotesi, ma sarebbe solo una parte di quella!

Il teorema sarebbe perciò, in sè stesso, un circolo vizioso.

Se poi alla limitazione *b*) si dà il significato che ha naturalmente, osserviamo che poichè nel teorema se una funzione è derivabile è continua, la ipotesi « derivabile » e la negazione di questa « non derivabile » sono, rispetto al soggetto « universale », i soli giudizi possibili (disgiuntivi), giacchè ogni funzione è derivabile o è non derivabile; il teorema del prof. Fellini afferma che sussiste la proposizione.

Se una funzione è continua è derivabile.

Non solo. Ma più generalmente, poichè in ogni teorema della matematica la ipotesi non esprime una condizione semplicemente possibile, ma si bene una condizione effettiva alla quale è subordinata la tesi; così « la ipotesi e la negazione della ipotesi sono *sempre* rispetto al soggetto (universale) i soli giudizi possibili » per il principio di contradizione e per il principio del terzo escluso.

Sicchè se la vieta condizione *b*) non si risolve nella ipotesi della validità del teorema reciproco, il teorema del prof. Fellini afferma che sussiste il reciproco di ogni teorema e quindi anche di ogni teorema di cui non sussiste il reciproco.

Il teorema del prof. Fellini è sempre, dunque, un non senso.

---

(1) P., pag. 4.
(2) B., pag. 294.

Esaminiamo ora la dimostrazione.

« Supposto il teorema:

(1) *Rispetto ad* S *se è* I, *allora è* T,

se non sussiste il reciproco:

(2) *Rispetto ad* S *se è* T, *allora è* I,

dovrebbe sussistere il contradittorio:

(3) *Rispetto ad* S *se è* T *allora non è* I;

Ma da quest'ultimo, confrontato col supposto, verrebbe la illazione contradittoria:

Rispetto ad *S* se è *I*, allora non è *I* » (1).

Poichè questa dimostrazione (!!) si riferisce alla proposizione (1) come punto di partenza e di questa il contenuto è affatto indeterminato, il teorema del prof. Fellini è puramente formale, e non si capisce perchè il suo autore voglia limitarlo alle sole proposizioni della matematica.

Inoltre, nella dimostrazione non entrano per nulla tutte le condizioni enunciate come ipotesi.

Questa dimostrazione si può ripetere per la proposizione a « dizione consueta »:

Se due angoli sono retti sono uguali, e si conclude che

Se due angoli sono uguali sono retti.

È dunque proprio il prof. Fellini che viola, nella dimostrazione del suo teorema, il canone *b*). Egli non deduce la tesi da tutta e sola la ipotesi. È, dunque, il suo teorema che è sofistico per ignoranza del soggetto (ignorantia elenchi).

Inoltre, come osservai già contro questa dimostrazione nella mia prima nota, le proposizioni (2) e (3) che legano gli stessi termini e differiscono per la sola qualità non sono contradittorie e non si può argomentare dalla falsità dell'una la verità dell'altra, perchè possono essere entrambe false.

Per esempio, partendo dalla proposizione

(I) « L'insieme dei numeri algebrici è numerabile (2) »,

e facendo il ragionamento (?) precedente; poichè delle due proposizioni

(II) Ogni insieme numerabile è l'insieme dei numeri algebrici

---

(1) B., pag. 295.

(2) Tannery: *Introduction a la Théorie des fonctions*, pag. 107.

(III) Ogni insieme numerabile non è l'insieme dei numeri algebrici,

la (III), confrontata con la (I), dà (?) l'illazione contradittoria.

« L'insieme dei numeri algebrici non è l'insieme dei numeri algebrici », si conclude che è vera la (II)!

Il prof. Fellini osserva, a tal proposito: « Ritengo opportuno notare che tali giudizi non possono essere entrambi falsi, quando si escludono a vicenda, e sono cioè i soli possibili rispetto al soggetto; in matematica ciò più che l'eccezione costituisce la regola » ([1]).

Ed aggiunge:

« Tale esclusione però si verifica quando i giudizi sono disgiuntivi, ed è appunto ciò che *sempre* si riscontra nei teoremi della matematica » ([2]).

Invano si obbietterebbe al prof. Fellini che la regola da me citata (regola di Psello) è una regola puramente formale e quindi indipendente dalla natura particolare del contenuto di una proposizione; e che perciò se si potesse violarla per le proposizioni della matematica, la si potrebbe violare altresì per proposizioni a contenuto non matematico e si dimostrerebbe non solo che « l'agnello divora il lupo » ([3]), ma bensì anche (e sarebbe il colmo) che « ogni uomo è logico! ».

Ma abbandoniamo questo ragionamento e vediamo quali sono le conseguenze di questa affermazione del prof. Fellini.

La verità del teorema

(1) *Rispetto ad* S *se è* I, *è* T (α)

([1]) B., pag. 290.

([2]) B., pag. 294.

([3]) B., pag. 291.

(α) In altri termini: La verità della proposizione.

(1) *Ogni* S *che ha la proprietà* I, *ha la proprietà* T

implica la verità dell'altra

(2) *Qualche* S *che ha la proprietà* T *ha la proprietà* I;

mentre la verità di questa implica la falsità dell'altra.

(3) *Ogni* S *che ha la proprietà* T, *non ha la proprietà* I.

Affermare dunque (come fa il prof. Fellini) che questa ultima (3), e la reciproca universale della (1).

(4) *Ogni* S *che ha la proprietà* T *ha la proprietà* I

sono, se è vera la (1) una vera e l'altra falsa, è asserire che la verità della (1) implichi la verità della (4), giacchè la verità di (1) implica la falsità di (3).

implica la verità della proposizione

(1)' *Rispetto a qualche* S *per il quale è* T, *è* I;

e poichè la proposizione

(3) *Rispetto ad* S *se è* T, *non è* I

è contradittoria della (1)', essa è necessariamente falsa se è vera la (1).

Dunque la verità della (1) implica la falsità della (3) e quindi l'asserire che (2) e (3) non sono entrambe false e che si possono perciò opporre come contradittorie, equivale ad asserire che se è vera la (1) è vera la (2), cioè che sussiste la reciproca della (1).

La dimostrazione del prof. Fellini è dunque, una *petizione di principio.*

Ma non basta.

Le proposizioni (2) e (3) sono giudizi tra due soli termini « *S* rispetto a cui è *I* » ed « *S* rispetto a cui è *T* », e non si può da esse dedurre (come fa il prof. Fellini) una conseguenza. Il prof. Fellini ha, quindi, violata, in questa sua presunta dimostrazione, la prima regola del sillogismo:

Terminus esto triplex, medius, majorque, minorque.

Questa dimostrazione (che il prof. Fellini chiama canone razionale!) è quindi quadruplamente sofistica.

Conclusione.

L'equivoco del prof. Fellini comincia dalla definizione di teorema e si continua in una strana inversione tra le veci della forma e del contenuto del pensiero.

Il teorema è una verità dimostrata, cioè, una verità derivata con procedimenti logici da altre verità.

Nella sua natura logica il teorema è un giudizio, cioè « un rapporto predicativo tra concetti » [1]. Esso si risolve sempre nell'affermare qualche cosa di qualche cosa e i suoi termini sono perciò, logicamente, *due* e non *tre*.

Se anche l'affermazione è condizionata, il teorema non ha senso se la condizione non può risolversi in una limitazione del

---

[1] Masci: *loc. cit.*, pag. 158.

soggetto. Sicchè anche quando il teorema è espresso da un giudizio ipotetico, questo si può *sempre* trasformare in un giudizio categorico..

D'altra parte, non ogni teorema può essere espresso da un giudizio ipotetico, per la semplice ragione che l'affermazione può anche essere incondizionata.

Le verità

Qualche funzione continua non è derivabile
Qualche superfice sviluppabile non è rigata
Qualche insieme non è numerabile ecc.

non si possono esprimere per giudizi ipotetici.

Il prof. Fellini veramente afferma che tali proposizioni non sono « teoremi del pubblico matematico » (1).

Ma che sono, dunque, *per lui?*

Poichè egli divide le proposizioni della matematica in « proposizioni esprimenti giudizio » e « non esprimenti giudizio » (2) (!!!!), a quale di queste categorie assegnerà egli tali proposizioni?

Le assegnerà alla categoria delle « non esprimenti giudizio », battenzandoli definizioni o problemi?

O assegnandole alla categoria delle proposizioni « esprimenti giudizio », le dirà « esprimenti giudizio assoluto generale o speciale » (3), battezzandole così assiomi o postulati?

O intende egli cancellarle affatto dal novero delle verità matematiche, quantunque « ce fut, pour l'epoque, un resultat bien remarquable quand les trovaux de Riemann et Wejerstrass montrerent qu'*il existe des fonctions continues n'ayant pas de dérivees* » (4).

La validità della reciproca universale non sussiste che in casi particolari. « *Sono convertibili* simpliciter *tutti i giudizi che esprimono uguaglianze. Perciò le equazioni algebriche, le uguaglianze aritmetiche e geometriche sono giudizi di cui sussiste il reciproco semplice* » (5). Ma non si può in generale, come crede il prof.

---

(1) B., pag. 295.
(2) B., pag. 288.
(3) ibid.
(4) Picard: *La Science Moderne e son état actuel*, pag. 52.
(5) Masci: *loc. cit.*, pag. 219.

Fellini, « ricalcare in senso inverso da B ad A la via direttamente battuta da A a B » (1).

La dimostrazione di un teorema consiste in una serie di implicazioni, le quali non sono in generale convertibili, cioè la dimostrazione di un teorema si fa invocando altre verità le quali in generale non sono convertibili.

Ciò per le dimostrazioni dirette. E per le dimostrazioni *ab absurdo* e per induzione come ricalcare la via in senso inverso?

Il cammino della scienza è sempre verso l'universale e le sue costruzioni sono perciò sempre più ampie e complicate. Il suo progresso, che consiste essenzialmente nell'analisi lenta e faticosa di tali costruzioni, non può essere, perciò stesso, sottoposta al vincolo della equipollenza dei termini.

Nè tale equipollenza può essere una questione di metodo, ossia un fatto puramente formale.

Gli esempi di cui il prof. Fellini si è creduto autorizzato ad una conclusione generale sono pochi e la illusione della validità della reciproca per questi dipende da una contorsione grammaticale e logica degli enunciati.

Tale contorsione, in generale, non permette di raggiungere l'effetto voluto; sia perchè gli enunciati, non si prestano alla contorsione indicata dal prof. Fellini, sia perchè, anche contorti, non danno tale illusione.

Anche concedendo al prof. Fellini tutta la sua tesi, che cioè questo giuoco vano e puerile possa essere esteso agli enunciati di tutti i teoremi, che si guadagnerebbe dal punto di vista del metodo se « la validità del reciproco deve essere dimostrata in ogni caso » (2) e la logica e la grammatica sono così deturpate?

Il prof. Fellini equivoca ancora una volta affermando: « Sono giunto a conclusioni che pure il Critico sembra ammettere, quando a proposito delle proposizioni reciproca, contraria e controreciproca afferma che tali proposizioni esistono sempre se il dato giudizio è ipotetico » (3). Io ho ben distinto il fatto della esistenza formale di tali proposizioni dal fatto della loro validità.

---

(1) B., pag. 290.
(2) B., pag. 294.
(3) B., pag. 291.

Per lui la frase « esiste la reciproca della proposizione P » significa « è valida la reciproca della proposizione P »: non così per me [1].

Per esempio, non esistono le reciproche delle proposizioni:

Qualche funzione non è derivabile,

Qualche insieme non è numerabile;

mentre esiste la reciproca della proposizione

Ogni funzione continua in un dato intervallo è anche finita nello stesso,

ma è falsa.

Che se, infine, gli si concede che egli non abbia mai inteso di riferire le *sue* conclusioni sulla reciprocità dei teoremi a qualsiasi proposizione (1) (come afferma nella seconda nota) e che il suo teorema (?) si riferisce perciò alle sole proposizioni di cui sussiste la reciproca universale, non avrebbe fatto bene a risparmiare il suo tempo, la carta dei periodici e la pazienza dei lettori e, sopratutto, ad astenersi dal sentenziare così solennemente che « la limitazione che vien posta al principio di ogni ramo della Matematica razionale sulla esistenza della reciproca, sa di pregiudizio? ».

E concludiamo con le parole dell'illustre filosofo e critico napoletano, prof. Masci:

« Come la mano è l'istrumento per eccellenza, così la Logica può considerarsi come l'arte delle arti nel dominio del sapere, che a *niuno* è lecito di ignorare, qualunque sia il genere di studii al quale si indirizza » [2].

---

[1] Per me il dire « non esiste la reciproca di una proposizione » equivale a dire « il predicato della proposizione non può fungere da soggetto ».

[2] Masci: *loc. cit.*, pag. 37.

Sulla divisione dei numeri interi

ADA GRASSI MANFREDINI (Roma)

La pratica della divisione nel caso generale, in molti dei migliori libri di testo di aritmetica razionale, è eccessivamente laboriosa. In altri trattati è appena accennata, ma, ciò non elimina la difficoltà; di più tale metodo non può seguirsi nelle Scuole Normali dove lo scopo principale dell'analisi delle quattro operazioni è la giustificazione della pratica delle operazioni stesse che dovranno poi essere insegnate dagli allievi maestri nelle classi elementari.

Il difetto accennato è dovuto, a mio parere, al fatto che nessuno pone in luce un Teorema che viene implicitamente applicato nella pratica della divisione *quando il quoziente abbia più cifre*. Premesso questo Teorema la discussione procede con quella speditezza e con quel rigore che, nelle trattazioni comuni, fanno generalmente difetto.

Teorema. — « *Il quoziente della divisione per un numero* d « *della somma* am + b *di cui il primo addendo è il prodotto di* « *due fattori, può porsi sotto la forma* q'm + q'' *ove* q' *e* q'' *sono* « *rispettivamente i quozienti delle divisioni per* d *del fattore* a *e* « *della somma* b + r'm *(*r' *essendo il resto della prima divisione).*

Data la somma $am + b$ eseguiamo le due divisioni parziali col divisore d, indicate dal Teorema. Avremo:

$$(1)\qquad \begin{cases} a = d\,q' + r' \\ r'm + b = d\,q'' + r'' \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro la seconda uguaglianza colla prima moltiplicata per m:

$$am + r'm + b = dq'm + r'm + dq'' + r''$$

Si sopprime l'addendo $r'm$ comune ad ambo i membri

$$am + b = d(q'm + q'') + r'' \tag{2}$$

e poichè, per la (1) $r'' < d$, per un noto Teorema sulla divisione la relazione (2) prova ciò che si voleva dimostrare. Inoltre si vede che il resto della divisione proposta è dato dal resto della seconda divisione parziale.

*
* *

Si debba ora eseguire la pratica della divisione nel caso che il quoziente abbia più cifre. Esempio:

$$78962 : 36$$

Consideriamo alla sinistra del dividendo tante cifre quante ne occorrono per formare un numero maggiore del divisore e minore del suo decuplo. Tale numero è 78. Il dividendo della divisione proposta può scriversi:

$$78 \cdot 10^3 + 962$$

Eseguendo le divisioni secondo il Teorema precedente dividiamo 78 per 36 ottenendo per quoziente 2 e per resto 6. Il 78 e il 6 si chiamano rispettivamente primo dividendo e primo resto parziale. Allora la prima parte del quoziente di 78962 per 36 è 2.10^3.

La parte rimanente si troverà dividendo per 36 il numero

$$6 \cdot 10^3 + 962 = 6962$$

Questo numero può scomporsi nella somma di due addendi:

$$69 \cdot 10^2 + 62$$

di cui il primo evidentemente è il prodotto del numero ottenuto scrivendo di seguito al primo resto parziale la cifra del dividendo successiva a quelle fin' ora considerate, per la relativa potenza del 10. Applicando di nuovo il noto Teorema potremo dividere 69 per 36 ottenendo $1 \cdot 10^2$ per secondo termine del quoziente. Formando analogamente i successivi dividendi parziali potremo ottenere tutti i termini del quoziente.

Per completare l'analisi della operazione si può osservare:

1° Il procedimento non porta inconvenienti se qualche dividendo parziale è minore del divisore perchè il Teorema dimostrato vale anche per $q' = o$ riducendosi alla nota relazione fra i quattro termini di una divisione.

2° *Nella pratica della divisione ciascuna delle divisioni parziali dà il quoziente di una cifra*, cioè ogni dividendo parziale è minore del decuplo del divisore. — Infatti ogni dividendo parziale si ottiene scrivendo di seguito al resto parziale precedente, che potremo indicare con R, la cifra u del dividendo successiva a quelle precedentemente considerate. Quindi ogni dividendo parziale può porsi sotto la forma:

$$R \cdot 10 + u$$

Ma R è minore del divisore d quindi potremo scrivere

$$R + 1 \leqq d$$

Moltiplicando ambo i membri per 10:

$$R \cdot 10 + 10 \leqq d \cdot 10 \tag{1}$$

Inoltre, essendo u un numero di una cifra sarà

$$u < 10$$

quindi

$$R \cdot 10 + u < R \cdot 10 + 10 \tag{2}$$

Confrontando le relazioni (2) e (1) segue:

$$R \cdot 10 + u < R \cdot 10 + 10 \leqq d \cdot 10$$

da cui:

$$R \cdot 10 + u < d \cdot 10$$

c. d. d.

Abbiamo dunque le regole pratiche:

1° « La prima cifra di un quoziente si ottiene dividendo « per il divisore il numero formato dal gruppo di cifre poste alla « sinistra del dividendo e formanti un numero maggiore del di- « visore e minore del suo decuplo ». — Il dividendo e il resto di questa divisione si chiamano rispettivamente primo dividendo e primo resto parziale.

2° « Per la ricerca della seconda cifra del quoziente scri- « viamo di seguito al primo resto parziale la cifra del dividendo « successiva a quelle già considerate, e il numero ottenuto si di- « vide per il divisore ». Con metodo analogo si trovano le cifre successive del quoziente.

Dalle considerazioni precedenti discende pure:

Corollario. — « Il numero delle cifre di un quoziente è « uguale al numero, aumentato di uno, delle cifre che rimangono « al dividendo quando alla sua sinistra si separano le cifre che « occorrono per formare un numero maggiore del divisore e mi- « nore del suo decuplo ».

Le applicazioni artistiche della geometria descrittiva ed il linguaggio matematico

DIEGO FELLINI (Padova)

Decisamente il linguaggio della matematica non è bello; non vi è chi non veda che furono poco felicemente adottate, ad esempio, le parole: *potenza, radice, numero immaginario, membro, seno, verso, senso,* ecc., ma la consuetudine ha pure i suoi diritti.

Indipendentemente però dal suono delle parole più o meno gradevole, sta il fatto che, anche in un linguaggio convenzionale, non si dovrebbe, nei limiti del possibile, perdere di vista il significato comune delle parole; ma ciò non sempre si verifica in matematica. Così, ad esempio, in un triangolo un lato si dice *opposto* all' angolo, che invece taglia, e viceversa. Un circolo tangente esternamente ai lati di un poligono si dice *exinscritto*, cioè descritto dentro e fuori.

E non sono poche le anomalie di altro genere. Così, ad esempio, si dice *somma* tanto la prima operazione dell' aritmetica, quanto il risultato che se ne ottiene. Si dice ad un tempo (in geometria elementare) *triangolo* (e perchè non *triagono*?), *quadrilatero*, *pentagono*, ecc. con riferimento per il quadrilatero ai lati, e per gli altri poligoni agli angoli. Si chiama *bissezione* la divisione in due parti uguali, anzichè in due parti qualunque.

Comunque però, non pensiamo davvero di farla da riformisti; ed anzi sottoscriviamo pienamente alle parole del Prof. VACCA (*Bollettino di Matematica*, Anno IX pag 13): « La matematica fa parte, così a me sembra, della lingua viva, e come nella lingua viva gli scrittori hanno un ben piccolo potere di modificare e creare, così anche in matematica i simboli, le parole, le idee, i concetti, sono dalle generazioni passate trasmesse alle successive, e costituiscono un patrimonio che conviene custodire e tenere in buono stato ».

Ci risovvenimmo appunto di tali parole, leggendo alcuni piccoli trattati di *Prospettiva* e di *Teoria delle ombre*, che fanno parte di pregevoli collezioni scolastiche, e dei quali intendiamo parlare appresso.

Diciamo intanto che, qualunque sia il posto che voglia farsi fra le matematiche discipline alla geometria descrittiva, è indubitato che essa costituisce una scienza. E, se a molti piace allogarla fra le matematiche applicate, perchè il suo sviluppo scientifico ebbe modesti natali, è però da tenere presente, come giustamente osserva l' ENRIQUES (*Lezioni di geometria descrittiva*), che « dai problemi pratici l' intero sviluppo delle matematiche trae la sua origine ». Segue pure tale ordine di idee il LORIA (*Metodi di geometria descrittiva*), osservando che si può prescindere dal

considerare le origini pratiche di essa, e che diversamente « chi tenesse il sistema opposto non troverebbe più alcun ramo di scienza pura ».

E, dopo il parere degli illustri Maestri, ci si permetta ritenere che la geometria descrittiva debba non solo figurare nel quadro delle matematiche pure, ma possa occuparvi un posto non troppo prossimo alla cornice. Sta indiscutibilmente il fatto che non possiamo pensare a rappresentazione grafica di sorta alcuna, senza trovarne la ragione di essere nei dettami della geometria descrittiva.

Siamo anzi convinti che anche la più parte delle cosidette applicazioni della geometria descrittiva, anzichè vere e proprie applicazioni, ne costituiscano altrettanti rami, che si dipartono dal tronco principale. Le varie prospettive non sono che metodi geometrici di rappresentazione; e può ugualmente ritenersi metodo di rappresentazione una proiezione considerata insieme alla ombra della figura proiettata.

Tutto ciò, a nostro avviso, è teoria; l' applicazione incomincia là solamente ove cessa la geometria. Come la geodesia, scienza di misura, diviene geometria pratica quando si pone mano al longimetro, al goniometro ed all' apparato fotogrammetrico, così la geometria descrittiva, scienza di rappresentazione, diviene arte solo quando alla riga ed al compasso si sostituisce il pennello e la tavolozza. È una contraddizione, anche dal punto di vista linguistico, il dire, ad esempio, che la *teoria* delle ombre è una *applicazione*. Le stessa penombra e lo stesso chiaroscuro attingono, fino ad un certo punto, norme direttive dalla geometria descrittiva; ed è solo l' *effetto* di rilievo, di distanza, di proporzione che scaturisce dalla tecnica ed artistica gradazione delle tinte.

Tali essendo le nostre convinzioni, non è a far meraviglia se ci sembrano alquanto fuori luogo le frequenti e non sempre encomiabili escursioni degli artisti nel campo geometrico. Lungi da noi ogni pensiero di biasimo, chè davvero non ne avremmo nè adeguato sapere, nè adeguata autorità; non possiamo però a meno di rilevare un fatto, e di cercarne le cause.

Il fatto è semplice: Il linguaggio di certi manuali che pur trattano di geometria è tutt' altro che appropriato Una causa è

forse la seguente: Negli Istituti di Belle Arti, ai quali i giovanetti hanno accesso con la semplice licenza elementare, s'impartiscono, durante il primo anno (corso preparatorio), elementarissime nozioni di geometria grafica; mentre poi durante i tre anni successivi (corso comune), si sviluppa un programma di geometria descrittiva e specialmente di prospettiva e di teoria delle ombre. Pare a noi che manchi a quei giovanetti anche la più semplice preparazione geometrica per apprendere ed assimilare una disciplina bella sì, ma non facile Non è quindi a far meraviglia se i futuri professori di disegno potranno essere un giorno bensì valenti artisti, ma, in generale, non altrettanto valenti geometri. Altra causa può essere la seguente: Quantunque in ogni scienza, e nella matematica specialmente, il fissare un linguaggio ed il tenersi ligi al medesimo sia non lusso ma necessità, taluno è forse condotto nell'ingannevole illusione che il compito del maestro sia reso più facile dal sostituire al linguaggio scientifico un linguaggio volgare. Mirando alla praticità, si può prescindere dalle dimostrazioni, si può fare appello unicamente al graficismo, ma non venire a patti con le parole.

Nella pregevole *Biblioteca degli studenti* edita dal Giusti figurano i *Principi di prospettiva* di L. Pittoni. Non possiamo non inchinarci al giudizio di Camillo Boito riportato nella Prefazione alla seconda edizione: « Il manualetto mi sembra utile, non solamente per le scuole normali, ma anche per le altre ove s'insegnano i principii fondamentali della Prospettiva, non quali pedantesche applicazioni della geometria descrittiva, ma quali operazioni pratiche guidate dal buon senso e dall'occhio ».

Però l'A. dichiara fin da principio che « la Prospettiva è la scienza che insegna a rappresentare gli oggetti quali appariscono alla nostra vista ». Ora, se la Prospettiva è una scienza, è doveroso rispettare il linguaggio della scienza; mentre invece non peccano di troppa esattezza i seguenti brani presi a caso nel manualetto:

« Da ciò si vede come le proiezioni di un punto si trovano su linee che sono perpendicolari ai due piani e quindi alla linea d'intersezione di essi piani ».

« Ad esempio un rettangolo perpendicolare ai due piani darà due rette per proiezioni. Se invece sarà parallelo ad uno dei due piani darà una proiezione in forma rettangolare sul piano a cui è parallelo, e una linea su quello a cui è perpendicolare ».

« Per ribaltare il piano $RLTS$ in modo da formare coll' altro una sola superficie, noi spostiamo detto piano di 90 gradi: centriamo cioè in L e con apertura LR descriviamo un arco... »

« Questo piano unico lo mettiamo parallelo ai nostri occhi e in esso procediamo per il nostro studio ».

« Si è detto che la linea di terra è l' intersezione dei due piani orizzontale e verticale e che li divide ed unisce contemporaneamente ».

« Si porta allora la lunghezza del lato sulla linea di terra, si divide pel numero dei quadrati e si conducono da questi punti tante visuali ».

« Noi osserviamo continuamente che il circolo origina in prospettiva un' elissi la quale s' allarga man mano che si abbassa sotto il nostro occhio e man mano che si alza sopra di esso, mentre si restringe tanto quanto più si avvicina al nostro orizzonte, fino a che, arrivata all' altezza di esso, si chiude in una linea sola orizzontale ».

Francamente dichiariamo che quanto sopra è riportato non è scienza e meno ancora geometria.

Nella pregevolissima collezione Hoepli, tanto benemerita della coltura nazionale, figura il *Manuale di Prospettiva* dell' Ingegnere C. CLAUDI. Il libro è dedicato agli artisti, e l' A., pur considerandolo un *trattato* (Prefazione alla 3ª edizione), dichiara che « è stata sua principale cura di non usare, per quanto è stato possibile, un linguaggio matematico ».

L'intento è raggiunto fin dal principio; lo provano i brani seguenti:

« La prospettiva è una delle parti della geometria descrittiva ed ha per iscopo di sostituire ad un oggetto la sua immagine descritta su una superficie posta tra l'osservatore e l'oggetto medesimo ».

« Punti di distanza sono le posizioni di lontananza situate sull'orizzonte o su una verticale al quadro egualmente distanti dal punto di vista ».

« È in questo punto che concorrono le linee degli oggetti per la formazione del quadro ».

« Piano obbiettivo è il piano β dove sono gli oggetti da ritrarsi ».

« ....in questo caso occorre trovare prospettivamente lo spazio che lo separa dalla base del quadro ».

« Fino ad ora non si sono considerati che i casi, nei quali lo spettatore si supponeva disposto parallelamente o verticalmente alle cose vedute ».

E, sosì continuando, l'A. risolve il problema di fare *per gli artisti* un *trattato* avente per oggetto *una parte della geometria descrittiva*, senza *usare linguaggio matematico*. È come chi dicesse di aver fatto per i geometri un quadro ad olio senza colori.

Nella stessa collezione Hoepli figurano gli *Elementi della teoria delle ombre* del Prof. E. Bonci. È un pregevole volumetto che, per quanto destinato ai figli del popolo, si presenta in una veste degna dell'argomento.

In esso l'A. con forma semplice e piana, mirando alla praticità del metodo, espone la risoluzione di una buona serie di problemi. Quando gli si presenta l'opportunità di descrivere, ad esempio, un'ellisse determinata da un sistema di diametri coniu-

gati, non ommette di esporre le relative definizioni e costruzioni; non trascura infine di indicare le fonti a cui attingere più ampie cognizioni.

Il libro è fatto con cura. Però in esso l' esattezza del dire lascia a desiderare; quantunque i nei che vi si riscontrano non siano tali da scemarne grandemente il valore. Così, ad esempio, vi si legge:

— l' incontro (per il punto d' incontro) — linea (per retta) — retta (per segmento) — girare (per ruotare) — poligono, cerchio, cilindro parallelo ad un piano — parallelepipedo rettangolo perpendicolare ad un piano — descrivere un cerchio da un punto — il vertice tocca il piano — i lati del solido — ribaltare la sfera — ecc.

***

Se il nostro scritto avesse mai l' onore di essere letto da artisti, ci sentiremmo, e giustamente, rispondere che forse maggiore è il numero dei non artisti, che fanno escursioni, e non sempre encomiabili, nel campo artistico, che quello degli artisti escursionisti nel campo altrui. Però è equo notare che un' opera d' arte poco artistica non sarà mai posta a modello in una scuola d' arte; mentre invece un libro di geometria poco geometrica introdotto nelle nostre scuole non solo non raggiungerà lo scopo per il quale fu scritto, ma produrrà l' effetto di rendervi in parte inefficace l' opera dell' insegnante di matematica.

***

E non è proprio solo nel campo dell' arte che le applicazioni della geometria descrittiva sono presentate talora con veste negletta.

Nella stessa collezione Hoepli figura il manuale *Gnomonica* del P. B. M. La Leta S. I, manuale costituito da 27 lezioni, delle quali la prima è destinata alle definizioni geometriche. In tale lezione appunto si legge, ad esempio, quanto segue:

« *Angolo*, secondo i Geometri, è l' inclinazione di due linee concorrenti in un medesimo punto sullo stesso piano. Altrimenti è lo spazio che lasciano in mezzo due rette, che s' incontrano in un punto ».

« Il triangolo.... è una figura piana, solida o lineare, circoscritta o limitata da tre linee rette, che formano tre angoli ».

« Piano o superficie piana si dice quello spazio solido sul quale una linea retta può applicarsi esattamente in tutta la sua lunghezza e in tutte le direzioni ».

« Il circolo dunque differisce onninamente dalla circonferenza, come un piano differisce dalla linea che tutto intorno lo chiude ».

E la cosmografia non può dirsi in tale manualetto più fortunata della geometria:

« L'equatore si chiama pure linea *equinoziale* perchè il sole lo percorre nei due equinozi di primavera e di autunno ».

« A rigore esistono tanti meridiani, quante sono le contrade del globo ».

È da tener presente che l'A. ha inteso scrivere delle *lezioni popolari* destinate ai *dilettanti di Gnomonica* e composte *in modo che anche un giovanetto di pochi studi possa costruire da se solo varie specie di meridiane e di orologi polari;* ma un libro che tratta *una scienza* e che vuol essere *un trattato* dovrebbe avere almeno un'impronta di quell'esattezza che sola può produrre semplicità ed efficacia.

***

Non abbiamo voluto discutere il pregio delle operette menzionate; osserviamo però che tal pregio poteva essere maggiore. Non va dimenticato l'ammonimento del sommo Leonardo:

« Quelli che s'innamoran di pratica, senza scienza, sono come il nocchiero che entra in navilio, senza timone e bussola, che mai ha certezza dove vada ».

Del resto non va del pari dimenticato un motto geniale del Peano:

« Solo chi ha lavorato può essere soggetto alla critica e discussione. Chi non lavora è al disotto della critica ».

PICCOLE NOTE

Un' osservazione all' articolo " Sulla teoria dell' equivalenza „ di Ugo Amaldi (1).

In quest' articolo il Ch.mo A. dà la dimostrazione del *Principio di De Zolt* per i poligoni, proposta dal Veronese colle modificazioni apportate dall' Hilbert.

Chiama *divisione per trasversali* ogni divisione in parti di un triangolo, ottenuta con segmenti di retta uscenti dai vertici e limitati ai lati opposti del triangolo primitivo o di quelli successivamente ottenuti.

Dimostra il Lemma I: Se un triangolo è diviso per trasversali in parti triangolari, il segmento associato al triangolo dato è somma dei segmenti associati ai triangoli ottenuti nel modo anzidetto e di cui il triangolo dato è somma.

Poi passa al Lemma II: Qualsivoglia divisione data di un triangolo in triangoli, o una suddivisione di essa in triangoli, si ottiene mediante successive divisioni per trasversali.

È necessario che riporti per intero la dimostrazione, che mi sembra inesatta in un punto. Tengo conto delle aggiunte a pag. 142, che scrivo in corsivo.

« Anzitutto è chiaro che si può eseguire con una successione di trasversali ogni divisione di un triangolo tale che nell' interno del triangolo *e sopra un lato di esso* non cada alcun vertice di triangoli parziali.

Ora data una divisione qualsivoglia di un triangolo ABC in triangoli Δ_1, conduciamo da un vertice di ABC, per es. da A, tutte le trasversali di ABC che passano per i singoli vertici dei triangoli Δ_1. Queste trasversali dividono ABC in un certo numero di triangoli Δ_2 e nello stesso tempo suddividono alcuni dei Δ_1 in triangoli e quadrangoli. Spezzando in due ciascuno di quest' ultimi per mezzo di una diagonale, otteniamo una suddivisione dei triangoli Δ_1 in triangoli Δ_3. Ora vogliamo dimostrare che i Δ_3 si ottengono con sole trasversali, sia che partiamo dai singoli Δ_1 sia che partiamo dai singoli Δ_2. Per quest' ultimi è chiaro che dei triangoli Δ_3, in cui è diviso ciascun Δ_2, nessuno ha vertici all' interno *nè sul lato opposto ad* A.

In secondo luogo fissato un determinato Δ_1 al suo interno non pos-

(1) *Quistioni riguardanti la Geometria Elementare* raccolte e coordinate da Federigo Enriques. - Bologna, 1900.

sono cadere vertici dei Δ_3; perchè le trasversali di ABC considerate si incontrano tutte nel vertice A. *Di più o una delle trasversali per* A *contiene un lato del* Δ_1 *e allora su questo lato non cadono certamente vertici di triangoli* Δ_3: *oppure una trasversale per* A *divide il* Δ_1 *in due triangoli, per ciascuno dei quali il segmento di trasversale contenuto in* Δ_1 *è un lato, su cui non cadono vertici di* Δ_3.

Risulta di qui per l'osservazione fatta dapprincipio che ciascun Δ_1 e ciascun Δ_2 si può spezzare nei singoli triangoli Δ_3, che lo compongono con sole trasversali. Poichè ABC è diviso nei Δ_2 per trasversali il Lemma è dimostrato ».

Ci si permetta invece di osservare che per applicare questa osservazione, occorre provare evidentemente che per qualsiasi Δ_1 vi è un lato su cui non cadono vertici di Δ_3. Ora quella parte di trasversale condotta per A che si trova entro un Δ_1 non è un lato del Δ_1 ma dei Δ_3 in cui è scomposto.

Dimodochè non essendo provato che vi è un lato per qualsiasi Δ_1 su cui non cadono vertici dei Δ_3, non si può applicare la detta osservazione e il Lemma non è dimostrato.

Si noti che nemmeno nel caso particolare che una delle trasversali per A contenga un lato del Δ_1 che si considera, si può asserire che su questo lato non vi sono vertici di Δ_3, inquantochè essendo la divisione data del triangolo ABC affatto arbitraria vi possono essere vertici di altri Δ_1 e quindi necessariamente di Δ_3.

Bisogna pertanto dimostrare il Lemma nel modo seguente:

a) È chiaro che si può eseguire per trasversali ogni divisione di un triangolo tale che nell'interno del triangolo e sopra un lato di esso non cada alcun vertice di triangoli parziali.

b) Si può eseguire mediante successive divisioni per trasversali una divisione di un triangolo in triangoli, o una suddivisione di essa in triangoli, quando nella divisione data nessun vertice cade nell'interno del triangolo.

Infatti tirando le trasversali che vanno da un vertice per es. da A ai vertici posti sul lato opposto, queste dividono il triangolo dato in triangoli ciascuno dei quali si trova nelle condizioni *a*).

c) Ciò posto si può riprendere la dimostrazione del caso generale dalle parole: « Ora data una divisione qualsivoglia.... », purchè si sopprimano le aggiunte (messe in fine all'articolo a pag. 142) che io ho scritto in corsivo.

Mi sembra che così la dimostrazione si renda esente da ogni menda.

Si noti che senza le aggiunte di pag. 142 la dimostrazione data dall' Amaldi si può considerare esatta, sebbene un po' oscura perchè tralascia il caso *a*) che serve poi a dimostrare gli altri.

A. Natucci

RASSEGNA BIBLIOGRAFICA

Pubblicazioni più recenti e Novità in corso di stampa.

ETTORE BORTOLOTTI: *Manuale di aritmetica generale e algebra per il Liceo.* In 3 Volumi.

Perchè i signori Insegnanti possano farsi un concetto chiaro di questo lavoro, crediamo utile riprodnrre la prefazione (1) *dell'Autore ed il sommario dei tre volumetti.*

PREFAZIONE

I programmi del 1904, per molte ragioni difettosi, hanno il vantaggio di costringere il docente ad abbandonare ogni velleità di portare nella scuola quella cura e quello studio di perfezione nello sviluppo logico delle teorie numeriche, cui la critica moderna potrebbe averlo abituato, ed a studiare la strada che più facilmente e brevemente conduce i giovani alla cognizione dei fatti aritmetici ed al possesso dei metodi di indagini e di risoluzione che sono proprii della nostra scienza.

« Sans doute (osserva il POINCARÉ in *Science e Méthode*) il est dur « pour un maître d'enseigner ce qui ne le satisfait pas entièrement; « mais la satisfaction du maître n'est pas l'unique objet de l'enseigne- « ment; on doit d'abord se préoccuper de ce qui est l'esprit de l'élève « et de ce qu'on veut qu'il devienne ».

Ed è d'altra parte generale la disapprovazione per la tendenza di introdurre nell'insegnamento secondario idee troppo sottilmente critiche e speculazioni troppo raffinate. Chi ha seguito le discussioni che, circa i programmi nuovamente proposti, si sono fatte ed in seno alla *Mathesis* e sui periodici scientifici, conosce l'opinione dei nostri maestri; fuori

---

(1) (N. d. D.) *Tanto più che, al pari di altre volte, il chiaro Autore coglie questa occasione per manifestare le proprie vedute intorno a questioni fondamentali di metodo per l' insegnamento della matematica nei Licei.*

d'Italia si è anche più recisi; e, per tacere del POINCARÉ, citerò il PICARD, il quale nelle sue conferenze fatte in America *Sur le Développement de l'Analyse* (Paris, 1905, pag. 23) dopo aver detto il bene che si merita di quella « *École de Philosophie mathématique*... qui se livre à une minutieuse analyse sur la nature du nombre », soggiunge: « Ces spéculations raffinées ont même pénétré dans l'enseignement élémentaire *ce qui est à mon avis très regrettable* ».

Opinione divisa dal KLEIN, il quale nella sua conferenza *Caractère mathématique de l'intuition de l'espace* (Cfr. *Conférences sur les mathématiques*, trad. LAUGEL, Paris 1898, pag. 49) dopo avere lui pure premesso che:

« Le professeur est arrêté par la difficulté d'établir l'harmonie « entre deux nécessités opposées et presque contradictoires. D'une part, « il lui faut tenir compte du pouvoir intellectuel jusqu'ici limité et non « développé de ses élèves et du fait que la plupart d'entre eux n'étu- « dient les mathèmatiques qu'en vue des applications pratiques; d'autre « part, sa conscience de professeur et d'homme de science semble le forcer « à ne rien abandonner de la rigueur mathématique ed à le pousser, « par consèquent, à introduir dès le débout tous les raffinements et tous « les points délicats des mathématiques abstraites modernes », afferma:

« C'est mon opinion que dans l'enseignement il est non seulement « admissible; mais même absolument nécessaire, que l'on soit moins « abstrait au débout; l'on doit aussi avoir constamment recours aux « applications, et ne faire allusion aux raffinements que graduellement, « à mésure que l'étudiant devient capable de les comprendre ».

Ciò ricordo perchè non faccia meraviglia il vedere, nel mio libro, ristretto in poche paginette un argomento che ha dato origine a voluminose disquisizioni, e rimandato all'ultimo volume un altro argomento, che, per la sola gloria della logica pura, avrei dovuto porre fin dal principio del primo; mentre mi sarebbe stato così facile il contentare la mia vanità e le esigenze di certi critici, scrivendo un altro di quei tali libri, di cui ora non c'è più penuria, ed in rapporto ai quali lo stesso KLEIN dice molto giustamente (loc. cit.):

« Placer une oeuvre de ce caractère entre les mains d'un commençant « doit nécessairement avoir pour effet, qu'an débout une grande partie « du sujet restera inintelligible à l'étudiant, et quà une époque plus « avancée ce dernier n'aura pas acquis le pouvoir de faire usage des « principes dans les cas simples qui se presentent dans les sciences ap- « pliquées ».

Ho pensato che molti insegnanti si saranno oramai persuasi che il PEANO è nel vero quando afferma: *la esagerata paura del rigore essere*

indizio di imperfetta conoscenza dei fondamenti, e che le *due necessità opposte,* cui il Poincaré ed il Klein hanno accennato nei passi più sopra trascritti, possono essere conciliate con la applicazione dei precetti che lo stesso Peano enuncia nel suo articolo: *Sui fondamenti della Analisi* (Boll. della *Mathesis*, Anno II, num. 4, 5, 6) e che amo qui riassumere:

I. Il rigore matematico non sta nell'affermare tutte le verità possibili, sta nell'affermare tutte cose vere e nel non affermare cose che sappiamo non vere.

II. Per essere rigorosi non è necessario definire tutti gli enti che consideriamo. Non tutti gli enti si possono definire, ed anche dove si può definire non è sempre utile il farlo, ed è conveniente il non farlo se la verità da esprimere sia di forma complicata o comunque difficile per gli allievi di una data scuola.

III. Si può tacere la verità espressa da una determinata dimostrazione, quando questa si reputi troppo complicata, in relazione con la capacità e le cognizioni dei discepoli.

Questi precetti avevo già io spontaneamente applicati quando, or sono cinque anni, scrissi il primo volume della presente opera e ad essi ho procurato anche al presente di uniformarmi, contuttociò che io abbia ripresa, rinnovata e compiuta in ogni sua parte l'opera allora appena incominciata.

Tre punti principalmente sono controversi nella trattazione elementare delle teorie algebriche, e cioè: la introduzione dei numeri negativi, quella degli irrazionali ed il calcolo dei radicali algebrici. Dirò dunque brevemente del modo che ho tenuto nel svolgere codesti argomenti.

Nella definizione di numero con segno ho seguito l'indirizzo medesimo che il Peano ha indicato nel suo *Formulario* e nel *libro di Aritmetica ed Algebra*; indirizzo che è conforme alla tradizione scientifica e che non è sostanzialmente diverso da quello che segue anche l'Arzelà nell'ottimo suo *Trattato.* Mi parve peraltro che il volere, in questo corso, dare la definizione di *eguaglianza di due numeri relativi* a, b, mediante la condizione che: *per ogni numero assoluto* u, *tale che* u + a, u + u + b *sieno numeri assoluti, sempre si abbia* u + a = u + b, come ci insegna il Peano, fosse cosa poco conveniente dal punto di vista didattico: sia perchè quella definizione suppone un numero infinito di verifiche, tante quante sono i numeri che può rappresentare *u*, sia perchè, a volerne fare intendere la necessità logica, occorrerebbe un tempo ed uno spreco di attività e di energia, che l'insegnante deve occupare in cose più necessarie ai fini di questo insegnamento.

Così dicasi delle definizioni di somma e di prodotto. Non mi rimaneva dunque espediente migliore di quello di sopprimere quelle defini-

zioni assegnando invece il criterio di eguaglianza fra due numeri relativi, ed enunciando le regole di operare la somma ed il prodotto di due tali numeri.

Questo modo di procedere conduce ad una notevole semplificazione, sì che lo svolgimento diviene chiaro, facile e brevissimo, pur essendo rigoroso e completo.

Nelle *Enciclopédie dcs Sciences Mathématiques*, la teoria dei numeri relativi è esposta partendo dalla definizione: *Que a soit supérieur, égal ou inférieur à* b, *on convient d'appeler nombre l'écriture* a — b, ed assumendo come definizione di eguaglianza di due numeri $a - b$, $a_1 - b_1$, la condizione $a + b_1 = a_1 + b$.

Questo modo non manca di pregi, ed attrae per la uniformità e la eleganza delle dimostrazioni; ma, se è opportuno ad un'opera la quale non ha preoccupazioni di ordine didattico, non può egualmente bene servire agli intenti della scuola.

E ciò per le seguenti ragioni:

1° Ogni numero $a - b$, sia positivo, sia negativo, sia nullo, ha sempre il significato operativo del *togliere* b; e questa interpretazione è contraria al concetto comune, alle tradizioni scientifiche ed alle pratiche applicazioni.

2° Ad un unico ente aritmetico si fanno corrispondere infiniti simboli (tutti gli $a_1 - b_1$ tali che $a + b_1 = a_1 + b$) senza che ciò sia logicamente necessario; anzi con lo scopo di trovare proprietà relative alla rappresentazione biunivoca di ogni ente aritmetico mediante un simbolo solo.

La esposizione dunque procede dal generale al particolare, e ciò, nella introduzione di un concetto nuovo, è antipedagogico.

3° La definizione di una qualsivoglia operazione aritmetica sui simboli $a - b$, $c - d$, deve essere completata con la dimostrazione delle eguaglianze dei risultati che si ottengono con quelle operazioni, quando ai simboli proposti se ne sostituiscono altri a quelli eguali secondo la proposta definizione.

Ciò porta a fastidiose lungaggini, od a pericolose oscurità.

A questi inconvenienti, di indole didattica, non corrisponde una maggiore perfezione nello svolgimento logico della teoria, poichè anche qui, a chi ben guardi, le definizioni di somma e di prodotto appariranno come semplici *regole di operare*, e, se non mi inganno, assai meno semplici di quelle recate nel mio libro.

Ecco le ragioni per le qnali, nonostante qualche autorevole esempio (anzi un po' a causa di esso) non credetti di discostarmi in questa nuova edizione, dalla strada tenuta nella prima.

Il concetto di numero irrazionale è di quelli che più domandano di tempo e di applicazione per essere propriamente e sicuramente acquisiti. Non bastarono mai, nemmeno al tempo dei programmi passati, gli anni di studio fatti nelle scuole medie; e non c'è professore di algebra nelle nostre facoltà universitarie, il quale non occupi parecchie lezioni per riprendere e chiarire quel concetto che è fondamento dell'analisi moderna.

Come dunque sarà ora possibile il dare, fino dall'inizio del corso, le nozioni necessarie per intenderlo e per giustificare il calcolo dei numeri irrazionali?

E potrebbe dire di essere logicamente rigoroso l'autore che, avendo condensato quelle nozioni in poche paginette poste al principio del libro, ragionasse ed operasse poi sempre, come se per davvero i suoi lettori fossero già in possesso di quella teoria, così sommariamente ed intempestivamente abbozzata?

Ciò non farà per certo chi abbia in mente che il libro deve esser fatto per gli scolari e per i maestri e non già per soddisfazione personale dell'autore.

Ma intanto conviene fin dal principio parlare di radicali numerici; e questo argomento porge occasione ad un anticipo che ritengo, non solo conveniente, ma fortunato.

Il concetto della esistenza della radice di un numero che non è potenza perfetta, non è egli uno di quelli che più facilmente si accettano, più chiaramente si intuiscono e che, anche nella storia dello sviluppo delle teorie aritmetiche, per primi si presentano?

Ed il ragionare di questi numeri non è forse la migliore propedeutica allo studio rigoroso dei numeri irrazionali? È ormai provato che la nostra mente non giunge alla determinazione esatta di un concetto fondamentale, senza che prima ne abbia avuto un'idea imprecisa ed indeterminata, la quale, riattaccandosi ad altre idee più note, le permetta di raggiungerlo.

È poi col considerarlo a parte a parte, col paragonarlo ad altri di simil natura, con l'esaminarlo nelle sue varie rappresentazioni, che si riesce a stabilirne nettamente i confini e finalmente a definirlo nel modo più logicamente perfetto.

Ho dunque domandato, fino dal principio, che si ammettesse la esistenza degli irrazionali che sono radici di numeri razionali positivi e la estensione a questi nuovi enti del calcolo dei razionali. Ho poi voluto che di questi numeri e dei concetti delle operazioni su di essi, si facesse il minor uso ed il più facile ed intuitivo, fuggendo poi sempre quegli irrazionali che non sono rappresentabili con radicali aritmetici.

Così, nei logaritmi, ho sostituito alla definizione consueta quella che si desume dalla pratica dell'uso delle tavole e che si limita alla considerazione di numeri razionali.

Nel secondo corso mi sono ancora limitato al caso dei radicali numerici; ma ho cercato di trattarli in modo da far chiaramente vedere la loro corrispondenza con segmenti che i giovani sanno già essere incommensurabili con l'unità di misura e di lasciare intuire la possibilità di definire, con procedimenti analoghi, numeri irrazionali di diversa natura.

Nel terzo corso finalmente, quando reputai che i giovani avessero la preparazione necessaria, esposi la teoria nel modo più generale e completo. Ma non volli in tutto tenermi a quel procedimento che, introdotto prima dal DEDEKIND, s'è andato mano mano sempre più discostando dalla via maestra e troppo si perde nelle astrazioni.

Il definire un ente come la ripartizione dell'intero campo di tutti i numeri razionali, suppone che la mente raccolga e percepisca in un unico pensiero tutti questi infiniti numeri; e che li concepisca, non già come ordinati in una successione che non ha termine, ma nella loro totalità infinita ed egualmente densa in ogni suo punto. Ora, quanto facile e naturale riesce il concetto di illimitato, altrettanto difficile ed astruso è per i giovani quello di infinito non numerato; poichè, se anche l'insieme dei numeri razionali si può considerare come numerabile, lo è in un senso che il raziocinio ci manifesta, ma che la intuizione non può afferrare; di modo che, quando si lascino i casi particolari, nei quali già per altra strada ci è noto l'ente che dobbiamo definire, a concepire l'insieme dei numeri ripartiti al modo di DEDEKIND, lo scolaro trova la stessa difficoltà, la stessa ripugnanza che in generale presentano tutte le considerazioni le quali abbiano fondamento nel concetto di *trasnfinito.* Difficoltà e ripugnanza le quali troppo apertamente contrastano con la facilità e spontaneità della idea di limite, cui in fondo ed in definitiva si vuol pervenire con questi studi.

Molto ancora credo ci sia da fare per rendere logicamente rigorosa e didatticamente opportuna alle nostre scuole medie la teoria elementare *dei radicali algebrici.* In generale non si fa abbastanza notare la impossibilità di applicare a codesti simboli le leggi di calcolo dei radicali numerici.

Il giovine che, per esempio, deve fare il prodotto $(\sqrt{-a})(\sqrt{-b})$, potrà scrivere $(\sqrt{-a})(\sqrt{-b}) = (\sqrt{(-a)(-b)}) = \sqrt{ab}$, oppure dovrà fare $(\sqrt{-a})(\sqrt{-b}) = (i\sqrt{a})(i\sqrt{b}) = -\sqrt{ab}$? E, giudicando legittimi entrambi questi risultati, potrà concludere che $\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$? infine da quest'ultima eguaglianza dedurrà egli che $\sqrt{ab} = 0$? Ciò sarebbe guidato a fare per analogia col calcolo dei radicali aritmetici, e seguendo

quelle leggi che egli è uso a tenere per canone universale degli enti numerici. Così, egli sarà indotto a concludere che $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2$, e così si presenteranno infiniti altri risultati di simile natura, qualora non gli sia chiarito fin da principio il concetto di eguaglianza fra enti capaci di parecchie determinazioni; concetto che, nel suo aspetto più generale, esigerebbe considerazioni troppo elevate per quest'ordine di studi; ma che, ristretto al caso particolare che si ha in mira, può essere posto in luce più chiara di quella onde è presentato ordinariamente.

Ciò ho tentato di fare, e su questo mio tentativo aspetto il giudizio dei colleghi.

Mia cura precipua è stata la scelta degli esercizi, i quali sono particolarmente numerosi nei punti dove più difficile ed astrusa è la teoria. A chi consideri la copia di tali esercizi, i quali occupano la parte maggiore delle pagine a stampa, il libro apparirà in certi punti quasi come una raccolta ordinata di quesiti, anzichè come una esposizione di teorie algebriche; ma ciò non potrà nuocere al testo, cui nulla toglie e molto aggiunge, e sarà cosa gradita ai maestri ed utile agli scolari: questi troveranno sempre le risposte agli esercizi proposti, e, dei meno facili, anche la indicazione delle strade più opportune per il loro scioglimento.

Ho pronta anche una Appendice, la quale uscirà fra breve e conterrà una numerosissima raccolta di quesiti di applicazione dell'algebra alla geometria, ordinati con metodo rigoroso, e tolti, insieme con la loro risoluzione, da opere classiche di matematici illustri.

Volume I (per la 1ª classe liceale).

PARTE PRIMA

ARITMETICA GENERALE

Capitolo I

Le prime cinque operazioni sui numeri razionali col segno e relativo calcolo letterale.

§ 1. Numeri con segno.

§ 2. Eguaglianza ed ineguaglianza de' numeri con segno.

§ 3. Del sommare e del sottrarre de' numeri con segno.

§ 4. Del moltiplicare e del dividere de' numeri con segno.

§ 5. Dell'elevamento a potenza de' numeri con segno.

§ 6. Del valore assoluto de' numeri con segno.

Capitolo II

Le prime operazioni sui polinomi.

§ 1. Formule.
§ 2. Addizione e sottrazione.
§ 3. Moltiplicazione.
§ 4. Divisione.
§ 5. Cenno sulla divisibilità dei polinomi.
§ 6. Frazioni algebriche.

PARTE SECONDA

ALGEBRA

Capitolo I

Equazioni di primo grado.

§ 1. Principî generali sulle equazioni.
§ 2. Equazioni di primo grado ad una incognita.
§ 3. Sistema di due equazioni di primo grado.

Capitolo II

Equazioni di secondo grado.

§ 1. Cenno sui radicali
§ 2. Determinazione della formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado.

Capitolo III

Progressioni e logaritmi.

§ 1. Progressioni aritmetiche.
§ 2. Progressioni geometriche.
§ 3. Logaritmi.

Volume II (per la 2ª classe liceale).

Capitolo I

Calcolo dei Radicali.

§ 1. Definizione di radicale aritmetico.
§ 2. Calcolo dei radicali aritmetici.
§ 3. Potenze con esponenti negativi e con esponente zero.
§ 4. Potenze con esponenti frazionari.
§ 5. Radicali algebrici.
§ 6. Numeri complessi.

Capitolo II

Equazioni di secondo grado.

§ 1. Proprietà delle radici.
§ 2 e 3. Equazioni riducibili al secondo grado.
§ 4. Sistemi di equazioni di grado superiore al secondo.
§ 5. Equazioni irrazionali.
§ 6. Problemi di secondo grado.

Capitolo III

Formula per la potenza intera e positiva del binomio

§ 1. Triangolo di Tartaglia.
§ 2. Formula per la potenza intera e positiva del binomio.

Capitolo IV

Uso delle tavole di logaritmi dei numeri.

§ 1. Disposizione delle tavole.
§ 2. Uso delle tavole.

Volume III (*per la 3ª classe liceale*).

COMPLEMENTI DI ARITMETICA

Capitolo I

Numeri interi.

§ 1. Multipli e divisori.
§ 2. Numeri primi.
§ 3. Caratteri di divisibilità.
§ 4. Principî di analisi indeterminata di primo grado.

Capitolo II

Numeri irrazionali.

§ 1. Definizione di numero irrazionale.
§ 2. Calcolo dei numeri irrazionali
§ 3. Equazioni esperenziali.
§ 4. Logaritmi.
§ 5. Interessi composti ad annualità.

Dal n. 12 dell'anno XIII del *Bollettino* bimensile della Casa Editrice Nicola Zanichelli in Bologna.

Novità

SALVATORE PINCHERLE: *Lezioni di Algebra Elementare* ad uso delle scuole secondarie superiori. — Un volume in 8 - L. 4.

Estratto dalla prefazione: « ...... quest'opera, destinata agli alunni delle scuole medie superiori, presuppone però nel lettore il minimo di nozioni di Aritmetica; l'A. ha creduto che non si potesse dare forma e tessitura organica ad un trattato sugli elementi dell'Algebra, se non riprendendo la genesi dei numeri e dei principî che ne reggono le operazioni, poichè in sostanza l'Algebra altro non fa se non esporre di codesti principî la estensione, la generalizzazione, le nuove applicazioni.

Il Capitolo I, prendendo le mosse dalla successione naturale dei numeri, studia l'addizione e sottrazioue su questi numeri e introduce in modo ovvio lo zero e la successione dei numeri interi negativi. I seguenti Capitoli (II e III) trattano della moltiplicazione dei numeri interi, delle sue leggi, della divisione come sua operazione inversa, della conseguente introduzione dei numeri frazionarî. Mercè questa introduzione, viene acquistata la cognizione del campo dei numeri razionali e delle quattro operazioni fondamentali in codesto campo. Dopo ciò, si può passare allo studio delle espressioni razionali e del loro calcolo, le lettere che figurano in queste espressioni appartenendo naturalmente al campo di razionalità introdotto nei primi tre Capitoli; del calcolo letterale, inclusivi il principio d'identità dei polinomi e la divisione algebrica, trattano i Capitoli IV-VII. Le generalità di carattere più ovvio ed elementare sulle equazioni e sui sistemi, la loro applicazione alle equazioni e ai sistemi di primo grado ed il loro uso per la risoluzione di preblemi formano l'oggetto dei Capitoli VIII e IX; infine un Capitolo (X) è dedicato al richiamo delle proposizioni di aritmetica razionale sulla divisibilità e alla risoluzione delle questioni più semplici dell'analisi indeterminata di primo grado. Con questo Capitolo si chiude la prima parte del libro, parte il cui materiale è, come si è detto, costituito esclusivamente dai numeri e dalle operazioni razionali.

Il passaggio dal campo dei numeri razionali a quello dei numeri reali costituisce, come è ben noto, il momento forse più critico nella scienza dei numeri, tanto che talano ha voluto ravvisarsi il passaggio dalle matematiche elementari alle superiori. Il Capitolo XI è dedicato all'introduzione del concetto di numero reale, concetto che si è cercato di illustrare nel modo più chiaro, mostrandone le varie facce e collegandovi il concetto di limite... Le applicazioni dei nuovi enti così introdotti sono fatte nel Capitolo XII al problema dell'esistenza della radice (aritmetica) e al conseguente Calcolo dei radicali; nei Capitoli

XIII-XIV all'equazione quadratica e ad altre equazioni e sistemi che a quella si riconducono; nel Capitolo XVII, all'equazione esponenziale e ai logaritmi. Il Capitolo XV tratta di un argomento particolarmente interessante: la rappresentazione dei numeri mediante grandezze e la corrispondente rappresentazione delle funzioni mediante grafiche....

A questo volume, che contiene quelle nozioni dell'Algebra che appartengono ai programmi delle Scuole medie superiori (eccezion fatta per quei Complementi di Algebra che sono assegnati agli Istituti Tecnici) l'A. ha dato ogni cura perchè vi si possa trovare congiunta con un bene inteso rigore tutta la chiarezza desiderabile. Egli si augura che, come premio di queste cure, il volume stesso possa occupare un posto non infimo fra i numerosi testi d'Algebra, di cui non pochi assai pregevoli, onde va ricca la letteratura matematica scolastica del nostro paese ».

Novità

GIOVANNI FRATTINI: *Lezioni di algebra, geometria e trigonometria piana e sferica*, con molti esempi, sull' intero programma del 2° biennio degl' Istituti tecnici (sezione fisico-matematica). — Ditta G. B. Paravia e C.

Il nome di GIOVANNI FRATTINI è ben noto e ben caro ai cultori della matematica di ogni ordine e grado di scuola, i quali gli sono particolarmente riconoscenti ed affezionati per la cura con cui egli compilò dei libri di testo per l' insegnamento della matematica nelle scuole elementari e nelle scuole medie, ma sopratutto pei criteri da Lui manifestati più volte in importanti riunioni e nei privati colloqui, nell' occasione d'ogni discussione sui metodi dell' insegnamento, sui pregiudizî degli uni e sulle esagerazioni degli altri, criteri che hanno dato sempre prova d' una grande acutezza di mente e d' una grande esperienza della Scuola, a cui da ben oltre trentacinque anni il Frattini ha dato le migliori sue energie intellettuali e fisiche. Noi dunque ci compiacciamo vivamente di potere annunziare, per l' imminente anno scolastico, questa nuova opera del Frattini che viene a colmare una vera lacuna, e siamo sicuri che i Colleghi tutti, ma più particolarmente quelli che insegnano negli Istituti tecnici, faranno ad essa la più favorevole accoglienza.

Pertanto la cortesia dell' egregio Autore ci permette di pubblicare fin d' ora la *prefazione* e l' indice del 1° volume (pel 3° anno dell' istituto tecnico). — Appena che ci sarà pervenuto anche il 2° volume, che pure si annunzia d' imminente pubblicazione, daremo una recensione dell' intera opera.

La Direzione

PREFAZIONE

Il programma di matematica prescritto al secondo biennio degli Istituti tecnici, si trova svolto in più trattati, che gli studiosi debbono consultare e pazientemente requisire, con loro pena e con dispendio per le famiglie. — Reputai quindi utile di adunarne le sparse membra. — Ma come ogni riguardo d' economia e di comodo non sarebbe sufficiente a metter l' opera in buona vista dei maestri, ove qualche ragion di merito non si aggiungesse, mi valga come tale l' esperienza di ben sette lustri di pubblico insegnamento, e la prova che, del libro manoscritto, feci per più anni nella mia scuola.

La divisione in lezioni s' imponeva a tutta prima come la più convenevole all' indole del programma: talchè la prescelsi; solo mutai il vocabolo « lezione » in quel di « capitolo » che sa meno di cattedra, e meglio risponde alla preferenza che, sulle astratte dottrine, volli data agli esempî.

Ad evitare il pericolo, insito nei programmi, che cioè il libro avesse a parere una raccolta di piccole monografie, anzichè un tutto armonico e ben ordinato, non trascurai di ribadire in ciascun capitolo le cose dei precedenti, e spesso di ripiegare la trattazione sul programma del primo biennio. Che se il ritorno sulla via percorsa è solo rimedio quando il segno fu oltrepassato, ragion vuole che divenga regola nei nostri Istituti tecnici, dove un programma *de universa materia*, che va dall' aritmetica ragionata agli estremi confini dell' algebra; dall' assioma della linea linea retta fino alle scoperte che immortalarono Archimede, vuol essere sbrigato in due anni, e non con metodi alla buona, ma informati di modernità e a rigore scientifico, che le circolari ministeriali non si stancano di raccomandare, e le Autorità scolastiche di pretendere. Occorre quindi, e anche le istruzioni ai programmi opportunamente prescrivono, che l' insegnante del secondo biennio torni spesso e di proposito sulla materia del primo. Non si fidi se i discepoli, usciti *fuor del pelago alla riva* dei molesti « elementi », si affezionino al nuovo e *più spirabil aere*, e nelle ripetizioni scolastiche giornaliere se ne mostrino inbevuti. Quanti di coloro, che agli esami orali di licenza sul programma di quarta classe non conobbero inciampo, hanno egual domestichezza col problemino di secondo grado, che dà il pane allo spirito e la drittura al pensiero? — Agli esperti colleghi la non ardua risposta. — Ora a me non dispiace nè dispiacque mai l' eccellenza verbale di un bravo ragazzo; so nondimeno che mal si addice a una calza di seta la scarpa che ride. G. Frattini

Segue l' indice del 1° volume per la classe III, dove si trovano segnati con asterisco i capitoli I, II e XII, che a dichiarazione dell' Autore si possono omettere, senza nocumento del resto.

* Capitolo I. — **Numeri irrazionali**: Generalità e definizioni - Somma di più numeri - Sottrazione - Prodotto di due fattori - Prodotto di tre fattori - Prodotti di più fattori - Quoziente - Conclusione.

* Capitolo II. — **Approssimazioni numeriche**: Definizioni - Errore della somma e della differenza - Errore del prodotto - Errore del quoziente - Errore della radice quadrata.

Capitolo III. — **Diseguaglianze**: Definizioni e conseguenze - Principî generali sulle diseguaglianze - Risoluzione delle diseguaglianze di 1° grado - Diseguaglianze riducibili al 1° grado - Diseguaglianze di 2° grado.

Capitolo IV. — **Discussione dei problemi**: Discussione e suo fine - Svariati esempî - Norme per la discussione dei problemi.

Capitolo V. — **Goniometria**: Misura degli angoli - Coordinate nel piano - Cammini e loro misure - Seno e coseno - Relazione fondamentale tra il seno e il coseno di un medesimo arco. - Seni e coseni di archi speciali - Tangente e cotangente - Equazioni goniometriche - Proiezione di un segmento e sua espressione - Seno, coseno, tangente ecc. della somma algebrica di più archi - Trasformazione della somma o della differenza di due seni o di due coseni in prodotti di seni e coseni e problema inverso - Formole per la duplicaziono degli archi - Formole di bisezione.

Capitolo VI. — **Trigonometria**: Oggetto della trigonometria - Seni e coseni di piccoli angoli - Formazione di una tavola di seni e coseni - Logaritmi dei seni, dei coseni ecc. - Relazioni fra gli elementi del triangolo rettangolo - Relazioni fra gli elementi di un triangolo qualunque - Risoluzione dei triangoli - Uso dell'angolo ausiliario - Problema dei quattro punti o del Pothenot - Differenti espressioni dell'area del triangolo - Quadrilatero inscrittibile.

Capitolo VII. — **Massimi e minimi**: Generalità e definizioni - Massimi e minimi di alcune funzioni di x - Applicazione ai problemi - Metodo dei confini - Cenno di altri metodi - Metodo dei moltiplicatori.

Capitolo VIII. — **Limiti e forme indeterminate**: Concetto di limite - Teorema fondamentale - Applicazione alla misura del cerchio - Infiniti e infinitesimi - Alcuni limiti notevoli - Forme indeterminate.

Capitolo IX. — **Frazioni continue**: Sviluppo in frazione continua - Equazione esponenziale - Sviluppo di un numero razionale - Altro mezzo di sviluppo - Ridotte - Approssimazione - Applicazione all'equazioni.

Capitolo X. — **Figure eguali o simmetriche e figure simili**: Definizioni - Simmetria rispetto a piani - Figure eguali - Figure simili - Rapporti costanti nella similitudine - Figure omotetiche.

CAPITOLO XI. — **Omotetie notevoli**: Coppia di segmenti paralleli e divisione armonica - Poli e polari nel cerchio - Terna di segmenti paralleli. I sei centri di omotetia - Similitudine e omotetia dei cerchi - I sei centri di omotetia di tre cerchi nel piano.

* CAPITOLO XII. **L'omotetia e i contatti circolari. - Problema di Apollonio**: Potenza rispetto a un cerchio - Asse radicale di due cerchi - Centro radicale di tre cerchi - Applicazione ai contatti circolari.

Dal n. 12 del Bollettino della Casa Editrice Nicola Zanichelli in Bologna.

Nuova edizione

ALBERTO CONTI: *Elementi di Aritmetica Razionale* ad uso degli alunni delle scuole normali. Quinta edizione. Un volume in-16. L. 2 - Nicola Zanichelli, Editore - Bologna.

L'Autore ha riveduto interamente il suo Trattato, migliorandolo sempre più. Il concetto di grandezza, già posto a base di questi Elementi d'aritmetica, viene richiamato anche nell'analisi delle singole operazioni fondamentali, di guisa che il concetto di ciascuna di queste sia tratto dalla corrispondente operazione fra grandezze o fra grandezze e numeri: così il metodo sintetico che ha caratterizzato questi Elementi fino dalla prima edizione trova una più larga attuazione e ne deriva un'armonia anche maggiore fra tutte le parti del Trattato. In un nuovo Capitolo (*complementare*) sono pure svolti gli elementi della teoria della divisibilità e dei numeri primi, con le principali applicazioni relative: così con le spiegazioni date dall'Insegnante o con un proprio studio complementare, l'allievo-maestro potrà formarsi una cultura completa della parte d'Aritmetica razionale che più o meno direttamente ha attinenza col programma d'aritmetica delle sei classi elementari.

GIUSEPPE DI DIA. — *Programma didattico per l'insegnamento della Matematica* nel 1° Biennio dell'Istituto Tecnico.

Il chiarissimo prof. Di Dia dell'Istituto Tecnico di Milano, spinto da un così disinteressato amore alla scuola che non ha precedenti come, pur troppo, non avrà imitatori, ha recentemente pubblicato il suo Programma didattico per l'insegnamento della Matematica nel 1° biennio.

Più che un vero e proprio programma didattico nel senso uggiosamente regolamentare della parola, il lavoro del prof. Di Dia si presenta quasi come una brillante conferenza scientifico-didattica di piacevole ed interessante lettura, e che dimostra come nell'Autore si trovi felicemente

armonizzata una soda e larga coltura col senso della misura e dell'opportunità.

È un vero peccato che l'egregio Collega non si sia studiato di dare al suo lavoro proporzioni più modeste, così da renderlo accettabile dal *Bollettino* che, non dubito punto, l'avrebbe ospitato ben volentieri, contribuendo così in modo efficace alla sua diffusione.

Fino dalle prime pagine il prof. Di Dia prende risolutamente posizione deplorando le intemperanze a cui si lasciano andare certi insegnanti o per amore di novità, o per un esagerato concetto di ciò che s'intende per « rigore », ed a tale riguardo mi dichiaro completamente della sua opinione.

Una trattazione della Matematica, anche elementare, che s'ispiri ai precetti di quella *Metodologia scientifica* alla quale, come dice lo stesso prof. Di Dia, spetterà forse il trionfo di unificare le teorie che ancor oggi sono ancora disgregate ed indipendenti, è un ideale che accarezza ogni modesto cultore di Matematiche; ma, anche prescindendo dal fatto che una teoria scientifica non esce mai dal cervello d'un pensatore in completo e definitivo assetto come Minerva dal capo di Giove, c'è sempre un'altra difficoltà contro cui si va ad urtare, vale a dire che una trattazione logicamente astratta dalla matematica nelle Scuole secondarie di qualunque tipo, richiederebbe un tempo doppio di quello attualmente disponibile. Il compito filosoficamente educativo della Matematica non sta solo nel porgere esempi delle varie *costruzioni logiche* escogitate, ma anche nel mostrare come essa sia un potente strumento d'indagine nel campo sconfinato della Filosofia naturale; e con poche ore settimanali di lezione, con classi numerose e con alunni gravati dallo studio delle discipline più disparate, è impossibile assolvere completamente questi due compiti, e di quì la necessità di una conveniente riduzione d'entrambi a proporzioni tali che l'uno non venga a sopraffare l'altro.

Il prof. Di Dia presenta pure un *abbozzo* di una teoria dei limiti, dei numeri reali e delle grandezze incommensurabili, come ebbe occasione di esporre ai suoi alunni della Sezione di Commercio e Ragioneria; ma a tale riguardo mi permetto di osservare che avrebbe fatto forse meglio a ritornare senz'altro all'antico, per esempio, al Bertrand, nella cui Aritmetica, come osserva il Peano [1], è sostanzialmente contenuta l'idea informatrice della trattazione logica della Teoria dei numeri reali dovuta più tardi al Dedekind.

Tanto, i Ragionieri, avrebbero ugualmente imparato a far i loro bilanci!

U. SCARPIS

---

[1] G. PEANO: « Del concetto di numero. » — *Rivista di Matematica*, 1891, Vol. 1°, Fascicolo 11-12.

IN MEMORIA

DI

ROBERTO BONOLA

A due anni di distanza, nello stesso bel mese di maggio, mentre tanta ricchezza di luce, di calore e di moto accompagna il liberarsi della natura da tutte le asprezze della stagione invernale, la Scienza, la Scuola italiana hanno dovuto vedere troncate due vite rigogliose, che tanto decoro e tanto utile contributo apportavano ad esse! Nel 1909 Giovanni Vailati e in quest'anno Roberto Bonola! ,..

A Federigo Enriques che al compianto Bonola fu Maestro ed Amico affezionato, ed a Rodolfo Viti che a Lui fu condiscepolo e stretto dai più intimi legami di una dolce amicizia, ad essi lasciamo la parola per commemorare degnamente il caro Estinto, e ad essi ci uniamo nel rivolgere il più reverente ed affettuoso pensiero alla Memoria del perduto Amico e Collega e Collaboratore.

Aggiungiamo inoltre il voto che sia al più presto effettuata la pubblicazione di quella « Enciclopedia delle matematiche elementari » che fu tanto strenuamente propugnata dal Bonola e della quale Egli lasciò predisposto tutto il piano: sarà questo il modo migliore di onorarne la Memoria

Tutta la Sua vita fu « *forza, intelligenza ed amore* »; a queste Sue virtù si ispirino gli Studiosi e i Colleghi, e la Scienza e la Scuola italiana, ancora una volta conserveranno al cospetto del mondo civile quel primato che fu ad esse conferito dalle virtù di Coloro i cui spiriti per le virtù medesime sopravvivono e sopravviveranno sempre alla morte!

ALBERTO CONTI

Parole pronunciate al funerale il 17 maggio 1911.

Prima che la tomba inesorabile si chiuda ad accogliere i resti mortali del nostro Amico, permettetemi di ricordare chi fu l'uomo che così immaturamente ci è tolto nell'ora più bella della sua vita, quando era stato prescelto fra tanti valorosi alla cattedra di Matematica nella Scuola Superiore di Magistero di Roma, e la più alta cattedra e l'ambita sede si apprestava appunto a raggiungere.

Io parlo non per lenire il dolore ma per esprimerlo; e tuttavia mi pare che il silenzio in cui l'anima oppressa vorrebbe adagiarsi mal si addica all'esempio virile ch' Egli ci ha dato, fino nelle ultime parole di speranza e di coraggio che, pochi minuti prima di morire, rivolgeva alla sua amorosa Compagna. — Lo spirito di Roberto Bonola era uno spirito di vita, che combattè nobilmente la battaglia della vita; e come non muore il soldato che cade nel tumulto della battaglia gridando « Avanti! », così lo spirito di Lui vive ancora e comunica ai nostri cuori affranti una singolare virtù animatrice.

Ricordo, or sono quindici anni, gl'inizii del giovane scienziato. La sventura piombando sulla sua casa l'aveva privata del Padre, e la Madre derelitta e i fratelli ancor giovanetti, tutta la famiglia numerosa si stringeva attorno a Lui, come a suo sostegno. — Fra tante difficoltà moveva Egli arditamente, i primi passi nella via dello studio. E mentre le molteplici cure assorbivano la maggior parte dell'opera sua, Ei trovava la forza di consacrarsi alla ricerca di astratti veri, come un poeta innamorato di bellezza dimentica nel suo sogno le quotidiane miserie della vita.

La Geometria non euclidea, che fin da principio attrasse l'intelletto speculativo del giovane matematico, restò sempre di poi il principale oggetto delle sue riflessioni, intorno a cui si svolse la sua attività di critico, di storico, e di filosofo. La figura scientifica di Roberto Bonola è tanto più alta quanto più discosta dalla consueta classificazione accademica; ragione questa che doveva ritardare il riconoscimento ufficiale dei suoi meriti, ma che non toglie certo alla simpatia di quanti anelano ad un più libero atteggiarsi della scienza e dell'insegnamento nella vita italiana. L'altezza che Egli ha saputo raggiungere è provata dall'interesse che i suoi studi storico-critici destarono presso i matematici di tutto il mondo, onde il suo trattato principale è tradotto in tedesco, in inglese e fin anco in russo.

Questa gloria che circonda il suo nome permettetemi qui di ricordare con cuore di maestro e d'amico che di Lui si compiacque; giacchè la modestia ond'Egli circondò la sua vita, rende tanto più necessario di dire ciò che forse non tutti gli amici suoi hanno saputo di Lui.

Ed ora che ho richiamato alla memoria i prodotti della sua attività intellettuale, in qual modo potrò efficacemente parlare dell'attività pratica, così largamente esercitata in tanti campi diversi? E come riuscirei a spiegarvi il generoso idealismo che volse quest'attività alla realizzazione concreta dei più nobili fini? Qui le parole non valgono a risuscitare l'immagine della Sua energia fattiva; ma fortunatamente di ciò non vi è bisogno per voi che l'avete conosciuta per esperienza.

Oh dolce e grande spirito che sei passato come un cavaliere sopra la terra, e troppo breve ora hai combattuto fra noi; caro e buono Amico, ricevi l'estrema parola di addio.

Io Ti saluto a nome della Scuola da cui Tu uscisti e di cui rimani vanto e decoro, e Ti saluto insieme per l'Università di Pavia che mi ha commesso l'incarico di portare il mesto tributo del suo rimpianto a Colui che l'onorò come docente.

Addio, Roberto Bonola, Tu ci lasci per sempre; ma alla Madre che circondavi di tenera venerazione, alla Sposa che amavi con tanta gentilezza di affetti, ai Fratelli che confortavi lietamente nelle ore difficili, resti, più ancora che l'orgoglio del nome, il ricordo sereno delle virtù, per le quali il Tuo spirito sopravvive alla morte, l'eroico coraggio della vita che per Te fu insieme: forza, intelligenza ed amore!

FEDERIGO ENRIQUES

NOTE BIOGRAFICHE

Il prof. Roberto Bonola nacque in Bologna il 14 novembre 1874 e vi morì il 16 maggio 1911. L'inclinazione ai lavori ed alle ricerche di tipo scientifico, si manifestò prestissimo in lui che fin dalla infanzia mostrava una singolare e mirabile prontezza nel conteggiare. Benchè gli studî elementari dovessero essergli ritardati per infermità ad una gamba, con un dannoso intermezzo d'insufficente istruzione privata, e benchè dovesse poi sospenderli affatto dopo aver frequentate le tecniche, per conseguire — a traverso varî impieghi — qualche aiuto alla famiglia; pure la forza del suo volere ed il fervore del suo ingegno, dovevano salvarlo ben presto dalla transitoria mediocrità della sua condizione.

I suoi compagni, quelli delle tecniche, erano già all'istituto ed egli, mentre sciupava le fascette del giornale la *Rana* di cui era speditore o scombiccherava di macchie i registri del conte Tacconi e dell'agenzia agricola Notari, egli li aiutava in matematica come se avesse continuato a studiare. Tutti ricorrevano a lui che, per naturale estensione, da maestrino, si trasformava in arbitro e giudice nelle piccole quistioni, sempre con prontezza, con intelligenza, con generosità. Grande era la sua popolarità nel gruppo dei bravi ginnasti della *Virtus* che ideavano gli eser-

cizî più strani e difficili, rischiando la pelle per una pasta dolce. Lo chiamavano *bistièn*, come a dire *bestiola*, tanto era agile e svelto. E, a casa, *bistièn* diventava filatelico, fotografo e perfino elettrotecnico.

Allora vi fu chi gli disse: « Perchè non potresti tentare di dar gli esami d'ammissione all'Istituto? ». E lui, l'autodidatta avventuroso e gagliardo, che aveva la virtù degli abitanti l'Isola misteriosa, tra gli

obblighi dell'impiego e le intraprese filateliche, una festa di ballo, una accademia ginnastica ed una filodrammatica, una gita in montagna; lui ci si mise e ci riuscì. Fu ammesso al secondo anno d'Istituto. Venne poi l'obbligo della leva. Potè anticipare l'esame di licenza, lo superò e, poichè suo fratello Emilio lo salvò dal servizio militare, vinta una borsa privata di studio (quella della fondazione Comelli in Bologna), si lanciò come un razzo nella vita universitaria. Ma se a quest'anno 1894 risale il formarsi della sua severa mentalità filosofica e matematica, non è a credersi che il suo temperamento di giovane lietamente e generosamente ardimentoso cessasse dal manifestarsi nei modi più disparati.

Ricordo i suoi frequenti inviti alle gite sull'appennino emiliano, che conosceva in ogni parte. Egli camminava innanzi sicuro, illustrando i

luoghi, incitando i retrivi, ogni erta superando tranquillo e sul ciglio del burrone aspettando la retroguardia ansimante con la testa maschia ed abbronzata nel sole. Oh! aspre raffiche autunnali del Cimone e nebbie fumide e stupende del Corno alle scale! Oh! belle soste di Fanano e di Cutigliano negli impetuosi ritorni!

All'Università egli curava le autolitografie delle lezioni e faceva anche molte ripetizioni aiutando sè, la famiglia ed anche molto i compagni bisognosi; ma di più cominciava a leggere opere matematiche per conto suo, non pago di quanto sui varî soggetti i maestri avevano potuto esporre nella scuola. Alle lezioni teoriche ed a quelle d'esercitazioni e di magistero era assiduo e, finita la lezione, s'accompagnava ai maestri per avere sui diversi argomenti notizie critiche e bibliografiche. Era tenace nello studio delle quistioni e spesso sapeva trarre da un esercizio qualche teorema utile, nuovo o poco noto. In secondo anno cominciò in lui ad accendersi l'ardore per gli studî geometrici nei quali doveva fare così bella prova, nel poco tempo che visse. Il suo era sempre giudizio di uomo moderno, in cui la tradizione colturale illuminava l'aspirazione, d'uomo che drizzava il quadrello a preciso segno, tentando specificarsi in una disciplina e raggiungervi l'eccellenza; ma il suo carattere non era nè austero nè chiuso, bensì dolce e impetuoso insieme, aperto a tutte le forme della onesta e buona cavalleria.

Nel 1898 conseguì la laurea in matematiche pure a pieni voti.

Federigo Enriques, che gli fu maestro affettuoso e poi cordiale amico, lo chiamò come assistente alla Cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva dell'Università di Bologna ed egli esercitò il delicato e grave ufficio con zelo ed efficacia fino al 1900.

Fondammo intanto la piccola scuola secondaria Aurelio Saffi. Egli vi insegnava la fisica ai privatisti di liceo e intanto faceva altre lezioni a casa, pubblicava dispense e studiava indefessamente. E la sua mente era instancabile: agli scherzi banali e stolidi, egli preferiva la discussione e si occupava un po' di tutto dalle forme degli abiti ai costi delle derrate, dal movimento letterario e teatrale alle molteplici manifestazioni sportive ognuna delle quali lo trovava in prima linea sostenitore ardente e dilettante appassionato e valoroso. E tutto con una grande letizia, con una simpatica e un po' scomposta disinvoltura, con una monelleria che ignorava la bassezza ed il vizio.

Durante questo primo periodo della sua attività didattica, diremo così, ufficiale, cominciò anche quello della sua mirabile attività scientifica. E di fatto dei suoi lavori geometrici, che possono ripartirsi in due gruppi l'uno includente ricerche di geometria proiettiva e l'altro ricerche sui fondamenti della geometria in relazione alle metriche noneuclidee, fu iniziata l'una e l'altra serie.

Nel 1899 nel *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matema-*

tiche comparve la prima parte di quella cospicua bibliografia sulla geometria non-euclidea che doveva essere avviamento alla maggiore opera del nostro illustre e compianto amico e nel 1900 nel tomo XXXIII del Giornale di matematica la interessante nota su la introduzione degli enti improprî in proiettiva.

Conseguito nel giugno del 1900 a pieni voti il diploma di magistero, prese parte ai concorsi generali per le scuole normali femminili per titoli ed esami, e fu nominato reggente presso la R. Scuola Normale di Petralia Sottana.

Per quanto assillato da un senso nostalgico per la fosca e suggestiva bellezza della sua Bologna ch' egli tanto amava, pure in Sicilia ci stette bene, osservatore com' era dei costumi, degli uomini e dei luoghi e, descriveva le sue belle passeggiate nell' isola e mi diceva il diletto che gli dava la lettura dei poeti inglesi ed mericani, specie del Withman e del Poe. Intanto ei dovette ritornare dopo pochi mesi — nel giugno 1901 — a Bologna, perchè il padre suo si era gravemente malato. Giunse in tempo ad assisterlo amorosamente negli ultimi momenti. Il fratello Emilio, che egli sempre consigliò ed aiutò, divenne allora l' amorevole e valido *pater familias* per la mamma ed i due fratelli minori.

Fu trasferito alla normale femminile di Pavia verso la fine del 1901. Intanto i risultati dei concorsi generali per titoli nei licei, istituti tecnici e scuole tecniche erano naturalmente confortevolissimi: egli era tra i primi in tutte le graduatorie. Ma rimase nelle scuole normali per non rinunziare alla sede di Pavia. Chi conosce questa piccola città, non ignora quanto gloriosa ne sia la scuola universitaria e segnatamente l' istituto matematico, dotato di un' ottima biblioteca e dove insegnarono uomini d' altissima fama come il Casorati ed il Beltrami, il Somigliana ed il Pascal e dove anche attualmente i maestri sono tra gli ottimi e basti citare il Berzolari ed il Vivanti. Serra più adatta non poteva accogliere davvero il fiore della sua genialità.

Nello stesso anno 1901 pubblicò la seconda parte della succitata bibliografia e, nei rendiconti del Circolo matematico di Palermo, una bella nota su la determinazione, per via geometrica, dei tre tipi di spazio: iperbolico, parabolico ed ellittico.

Si può dire che la maggior parte della sua operosità di insegnante e di studioso si sia svolta a Pavia, dove ei rimase finchè il male, che lo minava e che lo aveva sempre e duramente tormentato, non lo obbligò a ritornare a Bologna. Il suo insegnamento alla normale fu ottimo, perchè egli, per coltura e per ingegno e per bontà grandissima, era veramente un efficace e complesso educatore e sapeva far amare sè e la materia che insegnava, vivificandola con le più attraenti considerazioni e con le applicazioni più brillanti.

Poco dopo il suo trasferimento a Pavia sposò Giulia Musini, ch' egli da tempo amava teneramente e che gli fu affettuosissima ed intellettuale compagna e da ultimo, dolce, inesausta dispensiera di conforto e di soccorso; ora, colla di lui madre derelitta, custode inconsolabile delle sue reliquie, statua vivente di un dolore che supera ogni pietà.

La bibliografia sulla geometria non euclidea fu compiuta nel 1902 e ripubblicata in parte in latino col titolo: « Johannis Bolyai - in memoriam - Jndex operum ad geometriam absolutam spectantium ».

A Pavia fu presto ed universalmente amato e contrasse amicizie vere e sincere. Dal 1902 coperse il posto di coadiutore alla cattedra di calcolo infinitesimale nell'Ateneo pavese prima col Pascal, quindi col Vivanti. Nel 1903 pubblicò due note sulle proprietà metriche delle quadriche in geometria non euclidea nei rendiconti dell'istituto lombardo e ne « l'Enseignement Mathématique » delle acute osservazioni « sur un récent exposé des principes de la géometrie non-euclidienne ».

Il segreto di questa singolare copia ed importanza di produzione, malgrado le molte altre occupazioni e la cagionevole salute, stava nel metodo semplice della sua vita sobria e regolare. Se non avesse avuto predisposizione alla terribile ed inesorabile malattia che lo abbattè, egli avrebbe vissuta una vita lunghissima ed attivissima e l'Italia avrebbe avuto ancora uno dei suoi longevi e fecondi geometri. « Amava — scrive di lui la signorina Aurelia Gozo — amava sopra ogni cosa la famiglia e l'ambiente familiare. Le lotte di partito e di classe non lo appassionavano: egli osservava intorno a sè questo ascendere e questo mutare incessante di idee e di fedi, ne cercava spesso da buon filosofo le cause e ne prediceva anche i risultati, ma rimaneva semplice spettatore: non era in questo campo uomo di azione. Tutta la sua energia Egli la serbava per i suoi studi ed aveva sempre in animo di fare tante e tante cose. In ultimo, quando gli veniva meno la lena perchè la malattia crudele gli stava minando quella sua meravigliosa attività, egli aveva dei brevi momenti di sconforto, ma si riaveva sùbito ed era contento quando in una giornata aveva potuto fare qualche cosa. Egli sempre diceva: La cosa migliore che c'è nella vita è ancor quella di poter far qualcosa colla nostra testa ».

Nei mesi di aprile e maggio del 1904, e col consenso dell'Autorità accademica, tenne all'Università alcune conferenze apprezzatissime sui fondamenti della geometria, per gli studenti di matematiche pure, esponendovi alcune vedute originali che si erano a lui delineate a traverso le ben avviate ricerche teoriche e l'esperienza metodologica acquisita. Pur nel 1904 comunicò all'Istituto lombardo una nota sulle proprietà del quadrilatero trirettangolo nella metrica di Lobacefsky-Bolyai.

Andava intanto accumulando le notizie storico-critiche su lo sviluppo della geometria non euclidea e preparando il materiale per una compiuta esposizione sull' argomento.

Per tre anni consecutivi, dal 1904 al 1907, e per incarico della facoltà di scienze, tenne all' Università di Pavia il corso speciale di matematica per i chimici e naturalisti, facendosi anche qui apprezzare per abilità ed efficacia d' insegnamento. Questo triennio segna anche il vertice della sua breve, ma luminosa parabola di scienziato. Nel 1905 pubblicò quattro memorie, due all' Istituto lombardo l' una su « i teoremi del padre Gerolamo Saccheri sulla somma degli angoli di un triangolo e le ricerche di Max Dehn » e l' altra su « la trigonometria assoluta, secondo G. Bolyai ». Delle altre due una « intorno ad una proprietà del parallelogramma » comparve in questo *Bollettino* e l' altra in quello del Loria su un argomento d' interesse sommo: « Un teorema di Giordano Vitale da Bitonto sulle rette equidistanti ». Nel 1906 uscirono una sua notizia storica nel *Bollettino* del Loria su « il modello di Beltrami di superficie a curvatura costante negativa » e finalmente, pei tipi dello Zanichelli, l' esposizione storica dello sviluppo della Geometria non-euclidea, opera che egli curò con intelletto ed amore profondissimi, che rifece ed ampliò nelle successive edizioni e che fu tradotta in tedesco, in russo ed inglese. Purtroppo in questo periodo, e cioè verso il 1908, doveva incominciare per lui il lungo e doloroso calvario dell' infermità che l' obbligava a penose inazioni e frequenti viaggi a Bologna ed a molteplici e gravi atti operatorî; purtroppo le lunghe cure amorevoli e sapienti dei medici e chirurghi Boari e Busi, Musini e Monari non valsero a salvarlo dalla morte....

Nelle tregue che la crudele infermità gli consentiva, ritornò agli studî di geometria proiettiva, preparandosi per la libera docenza che conseguì con una notevole serie di ricerche su « i sistemi lineari di omografie spaziali » le quali comparvero parzialmente nel Periodico, nei Rendiconti dell' Istituto lombardo e negli Atti della Società modenese dei naturalisti e dei matematici.

A questo punto dovrei e vorrei disegnare la sua mentalità scientifica; ma come farlo degnamente? Ascoltiamo la parola di Federigo Enriques che gli fu maestro, inspiratore ed amico: « La figura scientifica — egli disse — di Roberto Bonola è tanto più alta quanto più discosta dalla consueta classificazione accademica; ragione questa che doveva ritardare il riconoscimento ufficiale dei suoi meriti, ma che non toglie certo alla simpatia di quanti anelano ad un più libero atteggiarsi della scienza e dell' insegnamento nella vita italiana ».

Dal marzo al luglio, per indicazione del prof. Vivanti e col consenso pieno della Facoltà, tenne degnissimamente la supplenza di calcolo; nel

1909 fu chiamato a far parte della Commissione giudicatrice pei concorsi alle cattedre di matematica delle Scuole tecniche. La Commissione si riunì a Napoli nel giugno del 1910. Il Pascal, che ne era membro, scrive in proposito nel Giornale di Battaglini:

« Insieme fummo a visitare tante cose e tanti luoghi ameni, cui egli grandemente mostrava d'interessarsi; volea tutto vedere, volea vedere quanto più potesse; chè forse sentiva già che la vita gli sfuggiva! ».

Questo desiderio di moto e di lavoro non lo lasciò mai e niuno seppe mai sopportare con tanto stoicismo la dolorosa odissea degli atti operatorî che si resero necessari per prolungargli la vita. La vita, come armonia di moto e di lavoro, era la sua fede luminosa. Nel settembre del 1910, dopo aver subìta una grave operazione chirurgica, volle visitare i suoi amici Gozo a Mesocco nel Canton Ticino.

« Lo vidi — scrive ancora Aurelia Gozo — per l'ultima volta allegro, vivace di buon aspetto e mi lasciai indurre a fare con lui una gita al passo del S. Bernardino. Ricorderò sempre quella nostra ascesa nella grande diligenza svizzera; il nostro buon amico, dall'anima profondamente entusiasta, davanti all'imponente spettacolo di quelle splendide montagne in parte bianche di neve, in una giornata che era una festa di luce e di sole, rimaneva muto e commosso in modo da non potersi descrivere. Poi nella discesa egli volle attraversare la grande pineta a piedi e quando, a metà via, noi gli impedimmo di proseguire per timore che la fatica gli dovesse nuocere, egli cedette; ma come quei fanciulli buoni ed entusiasti che rinunciano soltanto, per amore di chi vuol loro bene, al più grande dei piaceri ».

Venne intanto la notizia che aveva vinto per titoli il concorso speciale ad ordinario di matematiche nel R. Istituto superiore di magistero in Roma. Questa fu per lui una gioia grande e meritata. Poverino! Egli sperava di poter coprire la cattedra effettivamente: a Roma l'aspettavano tanti amici, il Castelnuovo, il Lauricella, il Conti.... E invece.....

Aveva già conseguita la promozione per merito, esercitava già la libera docenza in proiettiva all'Università; era noto, stimato, amatissimo. A Pavia la dimostrazione d'affettuoso saluto fu commoventissima. Le scolare, i colleghi, gli amici, tutti vi presero parte cordialmente. Ed era naturale, perchè egli aveva tutti conquistato colla sua bontà e con la lealtà d'un animo che non sapeva vani orgogli e bieche invidie.

Gli ultimi momenti furono strazianti, perchè egli fu sempre lucido e perspicace. I medici che lo assistettero come un fratello, in ispecie il cognato e l'amico suo professori Musini e Busi, erano straziati e spesso dovevano abbandonare la camera per non scoppiare in dirotto pianto. La madre, la sposa, i fratelli si aggiravano per la vasta casa come ombre, lividi ed impietriti di dolore. Egli era là sul suo lettuccio calmo e con-

fortava tutti e ragionava sulla sua malattia, sui dettagli della cura, sul viaggio a Roma....

Durante la non breve agonia, non ebbe che pochi vaniloquî in cui parlava della sua amata scienza. Voleva tutti vicino. Morì incoraggiando la sua Giulia...

Ah! non più! non più!

Così si spense quest'uomo che ebbe saggezza grande e bontà senza confine.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI
DEL
Prof. ROBERTO BONOLA

1. — Sulla introduzione degli enti impropri in Geometria Proiettiva. — Giornale di Matem., t. XXXIII, 1900.

2-3 4. — Bibliografia sui fondamenti della Geometria in relazione alla Geometria non-euclidea. Parte I, 1899; Parte II, 1901; Parte III, 1902. — Boll. di Bibliografia e Storia delle Scienze Matem.

5. — Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non-euclidee. — Zanichelli, Bologna, 1900.

6. — Determinazione, per via geometrica, dei tre tipi di spazio: iperbolico, parabolico, ellittico. — Rend. Circolo Matem., t. XV, 1901.

7. — Joannis Bolyai - in memoriam - Index Operum ad Geometriam absolutam spectantium. — Claudispoli, 1902.

8-9. — Sulle proprietà metriche delle quadriche in Geometria non-euclidea.
Nota I.: Classificazione delle quadriche.
Nota II.: Piani ciclichi e fuochi.
Rend. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXXVI, 1903.

10. — A propos d'un récent exposé des principes de la Géométrie non-euclidienne. — L'Enseignement Mathém.. 1903.

11. — Sulle proprietà del quadrilatero trirettangolo nella metrica di Lobacefski-Bolyai. - Rend. Istituto Lombardo, serie II, t. XXXVII, 1904.

12. — I teoremi del P. Geroìamo Saccheri sulla somma degli angoli di un triangolo e le ricerche di M. Dehn. — Rend. Istituto Lombardo, serie II, t. XXXVIII, 1905.

13. — Intorno ad una proprietà del parallelogramma. — Boll. di Matem., t. IV, 1905.

14. — La trigonometria assoluta, secondo G. Bolyai. — Rend. Istituto Lombardo, serie II, t. XXXVIII, 1905.

15. — Un teorema di Giordano Vitale da Bitonto sulle rette equidistanti. — Boll. di Bibliografia e Storia delle Scienze Matem., 1905.

16. — Il modello di Beltrami di superficie a curvatura costante negativa. — Boll. di Bibliografia e Storia delle Scienze Matem., 1906.
17. — La Geometria non-euclidea. — Esposizione storica del suo sviluppo. — Zanichelli, Bologna, 1906.
18 — Ricerche sui sistemi lineari di omografie nello spazio. — Fasci di omografie generali. — Period. di Matem., t. XXIII, 1908.
19-20-21. — Ricerche sui sistemi lineari di omografie spaziali:
Nota I.: Fasci di omografie speciali.
Nota II.: Reti contenenti l'identità.
Nota III.: Reti generali e sistemi lineari ∞^3 contenenti l'identità.
Rend. Istituto Lombardo, serie II, 1908.
22. — Sistemi lineari di omografie piane e spaziali che formano gruppo. — Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena, serie IV, t. X, 1908.
23. — Die Nichtenklidische Geometrie. — G. B. Teubner - Leipzig, 1908.
24. — Osservazione sopra una « Nota » di G. Battaglini relativa alla composizione di forze concorrenti. — Period. di Matem., t. XXIV, 1909.
25. — La Geometria non-euclidea; esposizione storica critica del suo sviluppo. — Traduzione russa del prof. A. Kulischer con modificazioni ed aggiunte dell'autore. — S. Petersburg, 1910.
26. — Id. — Traduzione inglese del prof. H. Carslaw, con modificazioni ed ulteriori aggiunte dell'autore.
The Open Court Pubbl. Company. — Chicago.
27. Esposizione dei principî della Geometria iperbolica ed ellittica.
G. B. Teubner.

RECENSIONI, RELAZIONI, ECC.

28. — *M. Barbarin:* Etudes de géométrie analytique non-euclidienne. — Boll. di Bibliografia e Storia delle Scienze Matem., 1902.
29. — *L. J. Delaporte:* Essai philosophique sur les Géométries non-euclidiennes. — Rivista Filosofica, 1904.
30. — *W. W. Rouse Ball:* Breve compendio di storia delle matematiche. — Boll. di Bibliografia e Storia delle Scienze Matem., 1905.
31. — Per la pubblicazione di una « Enciclopedia delle Matematiche Elementari ».
Relazioni presentate alla Sezione Lombarda della Società Italiana di Matematica ed al Congresso della Mathesis, 1909.
32. — Complementi di Geometria Proiettiva. — Programma di un corso libero per l'anno 1909-10, approvato dal Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione.

Bologna, agosto 1911.

RODOLFO VITI

Nello stesso mese di maggio, il *Bollettino* ha dovuto piangere la perdita d'un altro suo fedele Associato, del prof. Luigi Grandi della R. Scuola Normale Laura Bassi di Bologna; ad onorarne adeguatamente la Memoria, meglio non sapremmo fare che riprodurre integralmente le Note che seguono, cortesemente favoriteci, in seguito a nostra preghiera, dalla figlia del compianto Collega, Insegnante anch'essa e che, con la sua operosità e col suo amore per la Scuola, continua degnamente la tradizione paterna.

La Direzione

LUIGI GRANDI

nacque a Bologna il 26 marzo 1839 e vi morì il 29 maggio 1911.

Ancor fanciullo perdette il padre e si procurò i mezzi per continuare gli studi, insegnando.

Nell'aprile del 1860 entrò come insegnante nell'istituto Lambertini in Bologna, e nell'anno successivo, anche nell'istituto Ungarelli.

Il 1° maggio 1863, quando non aveva altro titolo che l'iscrizione all'Università, il Comune di Bologna gli offerse il posto d'insegnante elementare.

Nel 1864 rinunciò a questo ufficio per recarsi ad insegnare nel ginnasio e nelle scuole tecniche di Lovere, avendo intanto conseguito il diploma di matematica.

Vista la necessità di accoppiare l'insegnamento di matematica con quello di scienze naturali, nel 1870 si procurò il secondo diploma; e gli fu facile conseguirlo, perchè, avendo un'attitudine spiccata per la fisica e per la chimica, aveva arrischiato più volte la vita in esperimenti audaci, e costruito macchine che gli erano costate denaro e fatiche.

Nel 1871 gli fu affidato anche l'insegnamento delle scienze naturali nelle scuole tecniche al quale si dedicò con amore.

Nel 1873 pubblicò: « L'utile delle scienze ridotto a poche pagine per il popolo », come già prima aveva pubblicato diversi opuscoli di aritmetica e di geometria. Scrisse in seguito altri libri di testo per le scuole tecniche, ma non li pubblicò.

Continuò poi tutta la vita a costruire macchine e a fare esperimenti; ed ha lasciato ancora una preziosa raccolta di minerali ed un interessante erbario accuratamente classificato.

Nel 1874 passò ad insegnare nelle scuole tecniche e nel ginnasio di Gubbio, e dopo due anni diventò direttore di entrambi gl'istituti e fu considerato come la più grande autorità del paese in fatto d'istruzione. Egli vi tenne conferenze scientifiche e pedagogiche, ed anche le autorità provinciali lo ebbero in grande considerazione e gli affidarono più volte incarichi di fiducia.

Nel 1890 vinse il concorso governativo per le scuole normali e si recò a Caserta, dove restò fino al 1896, insegnando matematica e scienze. Ma l'insegnamento delle scienze naturali richiede tutta l'energia di un insegnante coscienzioso che studii continuamente e non abbia altri pensieri; invece il prof. Grandi doveva dedicare parte delle sue energie alla matematica, che gli era pur cara, e, per quanto non intendesse di abbandonare le scienze naturali, rinunciò ad insegnarle, chiedendo di passare nella scuola normale femminile di Brescia, dove insegnò la sola matematica fino al 1900, anno in cui fu trasferito alla scuola normale « Laura Bassi » di Bologna.

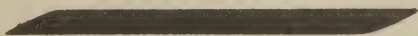
Nel 1889 pubblicò un opuscolo sui « Logaritmi e loro applicazioni alle regole d'interesse » e negli ultimi venti anni si dedicò specialmente a studi di astronomia; pubblicò nel 1894 tre lettere aperte agli Astronomi, che furono prese in considerazione, e lasciò poi morendo una grande quantità di manoscritti degli studi fatti.

Non si dedicò soltanto alle scienze positive, ma ancor giovinetto scrisse un dramma patriottico: « Il 12 giugno 1859 a Bologna » il quale fu rappresentato, e molte poesie che furono lodate.

Negli ultimi suoi anni mise in versi alcune teorie scientifiche.

Negli affetti di famiglia non fu secondo a nessuno: parlava con venerazione dei suoi genitori, beneficò costantemente le sorelle, e amò teneramente la moglie e i figli, fino a rinunciare per essi alla nomina di direttore di scuole normali, offertagli dal Ministero nel gennaio del 1900.

Visse oscuro e modesto, studiando indefessamente tutta la vita, amò la scuola, ebbe la religione del dovere che adempì scrupolosamente, e si spense quando non aveva più doveri da compiere.

ROSA GRANDI

VARIETÀ

JUBILÉ G. DARBOUX

(Circolare diffusa dal Comitato promotore delle onoranze).

Monsieur,

Cette année, l'un des plus éminents géomètres de notre époque, M. **Gaston Darboux**, aura accompli sa cinquantième année de services dans l'enseignement public; depuis plus de vingt-cinq ans, il est membre de l'Académie des Sciences, depuis dix ans, il en est le Secrétaire perpétuel.

Sa vie tout entière a été consacrée à la Science et à l'Enseignement. Ses beaux travaux d'analyse mathématique, de mécanique rationnelle, de géométrie infinitésimale l'ont placé au primier rang des savants de tous les pays. Par ses ouvrages, par ses cours à la Sorbonne, par ses conférences à l'Ecole Normale Supérieure et à l'Ecol Normale de jeunes filles de Sèvres, il est devenu le maître aimé et admiré d'un grand nombre de mathématiciens de nationalités diverses, et de la plupart des professeurs de mathématiques de France. Dans ses fonctions de Doyen à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, de Membre et de Vice-Président du Conseil Supérieur de l'Instruction publique, il a rendu les plus grands services à l'Enseignement dans tous ses degrés.

C'est pourquoi un groupe d'élèves, d'admirateurs et d'amis de M. **Gaston Darboux** croit devoir faire appel à ceux qui ont étudié ses ouvrages ou suivi ses leçons, comme à ceux qui ont pu apprécier sa bienveillante influence dans l'ordre scientifique ou dans l'ordre administratif, pour lui offrir à l'occasion de ses noces d'or universitaires et de ses noces d'argent académiques, une médaille reproduisant son effigie, avec une adresse portant les signatures des souscripteurs.

Les signataires, membres du Comité International du **Jubilé Darboux**, M. M.

Ch. André - directeur de l'Observatoire de Lyon,
P. Appell - membre de l'Académie des Sciences, doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, (Sorbonne),
B. Baillaud - membre de l'Académie des Sciences, directeur de l'Observatoire de Paris,
G.al Bassot - membre de l'Académie des Sciences, directeur de l'Observatoire de Nice,
M.lle L. Belugou - directrice de l'Ecole Normale des Jeunes filles, à Sèvres,
L. Bianchi - professeur à l'Université de Pise (Italie),
E. Blutel - professour au Lycée Saint Louis, à Paris,
L. Charve - doyen de la Faculté des Sciences de l'Universitè de Marseille,
E. Cosserat - directeur de l'Observatoire de Toulouse,
G. Darwin - professour à l'Université de Cambridge,
S. Dautheville - doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier,
A. Demoulin - professour à l'Université de Gand (Belgique).
D. Eginitis - directeur de l'Observatoire d'Athènes (Grèce),
D. Egoroff - professeur à l'Université de Moscou (Russie),
G. Floquet - doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy,

A. L. Forsyth - professeur à l'Université de Cambridge (Angleterre),

F. Gomez Teixeira - professeur à l'Université de Porto (Portugal).

A. G. Greenhill - professeur au Collège d'artillerie, Woolwich (Angleterre),

G. B. Guccia - professeur à l'Université de Palerme (Italie),

C. Guichard - professeur suppléant à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris (Sorbonne).

G. E. Hale - directeur de l'Observatoire de Mount Wilson (Californie),

H. Hancock - professeur à l'Université de Cincinnati (Etats-Unis).

C. Humbert - membre de l'Académie des Sciences, professeur à l'Ecole Polytechnique,

C. Jordan - membre de l'Académie des Sciences, professeur à l'Ecole Polytechnique et au Collège de France.

F. Klein, professeur à l'Université de Göttingen (Allemagne),

G. Koenigs - professeur à la Facultè des Sciences de l'Université de Paris (Sorbonne).

E. Lavisse - membre de l'Académie Française, directeur de l'Ecole Normale Supérieure.

G. Loria - professeur à l'Université de Gênes (Italie),

P. Mansion - professeur à l'Université de Gand (Belgique),

Ch. Méray - correspondant de l'Institut à Dijon,

M. Mittag Leffler - professeur à l'Université de Stockholm (Suède),

P. Painlevé - député, membre de l'Académie des Sciences, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris (Sorbonne) et à l'Ecole Polytecnique,

A. Petot - professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille,

Em. Picard - président de l'Académie des Sciences, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris (Sorbonne),

H. Poincaré - membre de l'Académie Française et de l'Académie des Sciences, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris (Sorbonne),

D.r Roux - membre de l'Académie des Sciences, directeur de l'Institut Pasteur à Paris,

P. H. Schoute - professeur à l'Université de Groningue (Hollande),

H. A. Schwartz - professeur à l'Université de Berlin (Allemagne),

Cyp. Stephanos - professeur à l'Université d'Athènes (Grèce),

Ph. van Tieghem - secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, professeur au Muséum,

H. van de Sande Bakhuyzen - professeur à l'Université de Leyde (Hollande),

Vito Volterra - sénateur, professeur à l'Université de Rome (Italie),

J. Tannery - membre de l'Académie des Sciences, sous directeur de l'Ecole Normale Supérieure.

G. Tsitzeica - professeur à l'Université de Bucarest (Roumanie),

vous prient de vouloir bien leur faire l'honneur d'envoyer votre adhésion et votre souscription à M. Guichard, professeur à la Sorbonne, secrétaire général du Comité internatiónal du **Jubilé Darboux**, secrétariat de la Faculté des Sciences, Sorbonne, Paris.

Une souscription de vingt-cinq francs donne droit à une médaille de bronze, et une souscription de cinquante francs, à une médaille d'argent, réductions de celle qui sera offerte à M. **Darboux**.

Le comité espère envoyer à tous les souscripteurs, quel que soit le montant de leur souscription, un exemplaire de la brochure commémorative.

Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

CONGRÈS DE MILAN

18-20 septembre 1911

Comité central:

Président: M. F. Klein, G. R. R., professeur à l'Université de Gœttingue;
Vice-président: Sir G. Greenhill, F. R. S., Londres;
Secrétaire-général: M. H. Fehr, professeur à l'Université de Genève.

Comité local de Milan:

Président: M. Ant. Sayno, vice-directeur de l'Ecole polytechnique de Milan

et MM. les professeurs G. Colombo, sénateur, directeur de l'Ecole polytechnique;

G. Celoria, sénateur, directeur de l'Observatoire de Brera à Milan.

S. Piazza, professeur à l'Université Bocconi et à l'Institut technique de Milan;

Ing. M. BARONI, professeur à l'Ecole polytechnique;
G. FASELLA, professeur à l'Ecole normale de jeunes filles G. Agnesi de Milan.

Secrétariat:

Du 16 au 21 septembre, le bureau du secrétaire-général sera installé au secrétariat de l'Ecol polytechnique, place Cavour, 4, Milan. MM. les représentants des sous-commissions nationales pourront y faire adresser leur correspondance.

Les lettres et envois destinés au secrétaire-général peuvent aussi être adressés à l'*Hôtel Terminus* (du 16 au 21 septembre).

PROGRAMME

Les séances ont lieu à l'Ecole polytechnique (*R. Istituto Tecnico Superiore, Piazza Cavour, n.° 4*).

Lundi 18 septembre.

9 heures. — *Séance du Comité central.*

16 heures. — *Séance du Comité central* en commun avec les sous-commissions A et B (1).

21 heures. — *Réunion familière au Café-Restaurant Cova* (angle de la via Manzoni et de la via Giuseppe Verdi).

Cette réunion, qui est principalement destinée aux présentations, permettra aux mathématiciens de prendre contact. Les participants pourront s'y rencontrer pour le dîner dès 19 h. $^1/_2$.

Mardi 19 septembre.

9 heures. — 1re *Séance des délégués et des membres des sous-commissions nationales.*

1. Allocution du président.
2. Etat des travaux dans les principaux pays; présentation des rapports des sous-commissions nationales. — Discussion.

16 heures. — 2e *Séance.*

1. Suite de la discussion.
2. Les mathématiques dans l'enseignement moyen: *Dans quelle mesure peut-on tenir compte, dans les écoles moyennes* (lycées, collèges, gymnases, écoles réales, etc.), *de l'exposé systématique des mathématiques? — La question de la fusion des différents branches mathématiques dans l'enseignement moyen.* — Rapport de la sous-commission A. — Discussion.

21 heures. — *Réception offerte aux congressistes par la Municipalité de Milan*, Palazzo Marino, Piazza della Scala. — (Tenue de ville ou redingote).

Mercredi 20 septembre.

9 heures. — 3e *Séance des délégués et des membres des sous-commissions nationales.*

1. La question des rapports à présenter au Congrès de Cambridge.
2. L'enseignement mathématique théorique et pratique destiné aux étudiants en sciences phxsiques et naturelles. — Rapport de la sous-commission B. — Discussion.

16 heures. — **Séance générale publique.**

1. Allocution d'un représentant de l'Italie.
2. Allocution de M. le prof. F. KLEIN, président de la Commission.
3. Conférence de M. le prof. F. ENRIQUES (Bologne), *Sur les mathématiques et la théorie de la connaissance.*

---

(1) Ore 18 (del 18 settembre) — Riunione della sottocommissione italiana in un'aula del Politecnico.

Jeudi 21 septembre (*Excursion au Lac Majeur*).

La réunion sera suivie d'une excursion au Lac Majeur et au Motterone, organisée par les soins du Comité local.

8 heures. — Départ de la Gare centrale de Milan pour Arone.
Trajet d'Arone à Stresa en bateau.
De Stresa au Motterone (1600 m.) par le nouveau chemin de fer électrique. A midi, dîner au sommet, à l'Hôtel Guglielmina.
Retour à Stresa; visite des Iles Borromées.
Retour à Arone, puis à Milan (arrivée à 19 h. 15).

Le trajet (aller et retour) en chemin de fer de Milan à Arone est gracieusement offert par le Comité local et la promenade sur le Lac Majeur par la Compagnie de Navigation.

Pour les autres frais de la promenade (y compris le repas au sommet), il est prévu une carte de 10 Lires par partecipant. Le Comité local a obtenu une forte réduction sur le tarif du chemin de fer au Motterone.

AVIS DIVERS

Le compte rendu de la réunion sera publié par les soins de la Revue internationale *L'Enseignement mathématique*, organe officiel de la Commission. Il sera envoyé gratuitement à tous les congressistes.

Adhésions. Cartes de congressistes. — MM. les délégués et MM. les membres des sous-commissions nationales sont instamment priés d'envoyer leur adhèsion au secrétaire-général, M. le prof. H. Fehr, *110, Florissant, Genève*, avant le 1er septembre, et de l'informer s'ils comptent participer à l'excursion au Lac Majeur (en indiquant le nombre de personnes).

En retirant leur carte de congressistes ils recevront un guide illustré de Milan, gracieusement offert par la Municipalité. Cette carte donnera libre accès au musées municipaux et aux musées de l'Etat (y compris la Chartreuse de Pavie). Elle pourra être retirée dès le samedi 16 septembre au *Secrétariat, Ecole polytechnique, Place Cavour, 4.*

Logements. — Afin que les congressistes soient dispersés le moins possible, nou avons prié le Comité local d'établir une liste de quelques hôtels.

Sur la Place de la Gare centrale:

Albergo	*Prezzo della camera*	*1ª Colaz.*	*2ª Colaz.*	*Pranzo*
Bellini's Hôtel Terminus	1 letto L. 4,50 2 letti " 8,—	L. 1,50	L. 3,50	L. 4,50
Albergo d'Italia .	1 letto " 3,— 4,50 2 letti " 6 à 8	" 1,25	" 3,—	" 4,—
Albergo Concordia	1 letto " 3,— 2 letti " 5,—	" 1,25	" 3,—	" 4,—
Hôtel du Nord et des Anglais	1 letto " 3,50 2 letti " 6,—	" 1,50	" 3,50	" 5,—
en ville:				
Hôtel Milano Via Manzoni	L. 7,—	" 1,50	" 4,—	" 5,—

En raison de l'affluence des étrangers en Italie à l'occasion du Cinquantenaire de l'Unité italienne, MM. les congressistes sont priés de retenir leurs chambres dans les hôtels au moins 4 à 5 jours à l'avance.

Pour le Comité local: A. Sayno.

Pour le Comité central H. Fehr.

(Vedi pag. VII della copertina interna « Lista dei membri della Commissione »).

Finito di stampare il giorno 12 settembre 1911.

Alberto Conti: *Direttore Responsabile.*

Revoca del R. Decreto Orlando?

Si è diffusa ed ha ancora credito la voce che col prossimo anno scolastico sia revocato il famoso R. Decreto 13 ottobre 1904 sull'opzione fra il greco e la matematica.

C'è però adesso il fatto nuovo del Ginnasio e Liceo moderno, sia pure in via di esperimento, fatto nuovo che complica, non potendo certo farsi obbligo di studiare il greco col programma della 1ª liceale a chi per legge non ne abbia fatto lo studio in 4ª e 5ª ginnasiale.

E quindi Minerva pensa!... In caso di revoca, c'è anche la questione del programma. Un ritorno allo *statu quo ante?* ossia ai programmi del 1900, *ma con quegli emendamenti indicati dai competenti in più occasioni* [Vedi Congressi e Convegni tenuti dalla Mathesis a Livorno e a Napoli e altrove]. Ad ogni modo pare certo che non saranno trascurati il parere e la collaborazione, della nuova associazione Mathesis.

MOVIMENTO DEL PERSONALE INSEGNANTE

per le cattedre di matematica delle scuole medie

(Secondo il Comunicato ufficiale del 1° Agosto 1911)

Regi Licei.

Volpi da Catanzaro ad Ascoli — Galvani a Cagliari, definitiva — Simonelli da Teramo a Campobasso — Guareschi da Lucera a Correggio — Joannin da Perugia a Genova « Doria » — Vischia da Cesena a Perugia — Strazzeri a Sassari, definitiva — Castelli da Bergamo a Vigevano — Boccardini da Vigevano a Bergamo.

Regi Ginnasi.

Zappetta da Campobasso ad Andria — Cabizza da Castrovillari a Bosa — Teisseira da Grosseto a Bra — Gasparri da Messina a Brindisi — Nani da Termini Imerese a Cefalù — Amato da Paternò a Termini Imerese — Toffoletti da Mantova a Ceva — La Terza da Catanzaro a Parma — Gemelli da Rossano a Catanzaro — Massimi da Avezzano a Velletri — Morelli da Roma « Mamiani » a Grosseto — Bettinali da Palermo « Umberto » a Roma « Tasso ».

Regi Istituti Tecnici.

Bonaventura da Livorno a Roma — Trevisan da Lodi a Modena — Marolli da Melfi a Mantova — Ducci da Foggia a Bari — Marenghi da Caltanissetta a Lodi — Sbrana da Parma a Genova — Mignosi da Modica a Palermo — Palmieri da Napoli a Firenze — Giudice da Genova a Pavia — Calvitti da Cagliari a Napoli — Bassi da Mondovì a Parma — Finzi da Bari a Napoli — Chella da Foggia a Bari — Aichino da Girgenti a Mondovì — Bindoni da Modena a Melfi — Amici da Macerata a Firenze — Gazzaniga da Melfi a Macerata.

RR. Scuole Normali.

Mazzelli da Padova a Bologna « Manzolini » -- Arbicone da Genova « Lambruschini » a Pavia — Moglia da Bari a Roma « Vittoria Colonna » — Barchi da Padova (maschile) a Bologna « Bassi » — Picco da Ascoli Piceno ad Alessandria — Amaturo Tedeschi da Salerno ad Anagni — Nicoletti da Avellino a Salerno — Genetti da Bergamo a Brescia — Giudici da Modena (assegnazione provvisoria) a Bergamo — Marcialis da Nuoro (maschile) a Cagliari (femminile) — Crespi Isabella da Aquila a Forlì — Frediani Zanardi da Grosseto a Lucca — Zucchetti Rosa da Parma « Sanvitale » a Novara — Sacchi Bassi da Mondovì a Parma « Sanvitale » — Dal Piaz da Pistoia a Perugia — Gugnoni da Mantova a Perugia.

RR. Scuole Normali maschili (Matematica e Scienze).

Lo Foco da Bari (assegnazione provvisoria) a Bari (assegnazione definitiva) — Carosi da Città Sant' Angelo a Urbino.

Scuole Tecniche.

Del Chicca da Livorno a Firenze « Alberti » — Greco da Legnano a Livorno — Cattaneo da Livorno a Roma « Buonarroti — Tognelli da Ventimiglia a Livorno — Taricco da Chivasso a Ventimiglia — Ena da Napoli a Roma « Di Rienzo » — Trafelli da Milano « Oriani » a Roma « Della Valle » — Aguglia da Milano « Lombardini » a Roma « Della Valle » — Teofilato da Civitavecchia a Roma « Buonarroti » — Spinelli da Ruvo di Puglia a Bari — Pascotto da Cascina a Mantova Natucci da Borgo San Donnino a Massa — Antonucci da Mondovì a Novara — Tardivelli da Genova « Bixio » a Mondovì — Ghezzi da Lovere a Reggio Emilia — Borini da Varallo a Reggio Emilia — Bongini da Cortona a Siena — Fusar da Chiavenna a Soresina — Gennari da Cremona a Spezia — Borelli da Crema a Cremona — Tagliarini da Sciacca a Termini Imerese — Sartori da Udine a Vicenza — Morone da Campobasso a Benevento — Sandrinelli da Mortara a Monza — Finzi a Parma — Metz da Arcevia ad Asola — Mei da Chioggia a Borgo San Donnino — Martino da Frosinone a Corleone — Cornacchia da Faenza a Casalmaggiore.

Liste des membres de la Commission.

Délégués des pays participants :

Allemagne : MM. F. Klein (Gœttingue), P. Stæckel (Carlsruhe), P. Treutlein (Carlsruhe).
Autriche : MM. E. Czuber, W. Wirtinger, R. Suppantschitsch.
Belgique : M. J. Neuberg (Liège).
Danemark : M. P. Heegaard (Copenhague).
Espagne : M. Z. G. de Galdeano (Saragosse).
Etats-Unis : MM. Dav.-Eug. Smith (New-York), W. Osgood (Cambridge, Mass.), J. W. A. Young (Chicago).
France : MM. A. de Saint-Germain, C.-A. Laisant et C. Bourlet.
Grèce : M. C. Stéphanos (Athènes).
Hollande : M. J. Cardinaal (Delft).
Hongrie : MM. M. Beke, C. Radoz, Ratz (Budapest).
Iles Britanniques : Sir Georges Greenhill, M. A., F. R. S.; Professor W. W. Hobson, Sc. D., F. R. S.; Mr. C. Godfrey, M. A.
Italie : MM. G. Castelnuovo (Rome), Fr. Enriques (Bologne), G. Scorza (Palerme).
Japon : L. R. Fujisawa (Tokio).
Norvège : M. Alfsen (Christiania).
Portugal : M. Gomes Teixeira (Porto).
Roumanie : M. G. Tzitzeica (Bucarest).
Russie : MM. N. v. Sonin, Kojalovic, K. W. Vogt (St-Pétersbourg).
Suède : M. H. v. Koch (Stockholm).
Suisse : MM. Fehr (Genève), C. F. Geiser (Zurich), J. H. Graf (Berne).

Délégués des Pays associés.

Australie : M. Carlslaw, Sidney ; suppléant en Europe : Prof. Bragg, Leeds.
Canada : M. Bovey, recteur au Collège impérial technique de Londres.
Colonie du Cap : M. Hough, de l'Observatoire royal de Capetown.
Mexique : M. Valentin Gama, professeur à l'Ecole nationale des ingénieurs, Tacuyaba.
Le *Brésil* sera représenté par M. le prof. Costa Seno, directeur de l'Ecole des mines d'Ouro Preto, actuellement en mission à l'Exposition de Turin.

La liste des délégués et des représentants des sous-commissions nationales présents au Congrès sera définitivement arrêtée lundi soir 18 septembre.

Le Secrétaire-général : H. Fehr, Genève.

V riunione della Società Italiana per il progresso delle scienze

Dal 12 al 18 ottobre ha avuto luogo a Roma la V riunione della Società italiana per il progresso delle Scienze. La stampa quotidiana diede già ampie notizie sulla cerimonia inaugurale di questa « Riunione », sul discorso dell' illustre fisico **Augusto Righi**, e sui discorsi generali a classi riunite tenuti dal prof. **Castelnuovo** « *Sulla evoluzione delle misure di spazio e di tempo* » e dal prof. **Enriques** sul tema « *Che cos' è la filosofia?* ». Più brevi furono necessariamente i resoconti dei giornali quotidiani sui lavori delle singole Classi e Sezioni, onde ai Lettori di questo *Bollettino* ci piace segnalare i discorsi di classe che furono tenuti dal prof. **Ugo Amaldi** « *Sullo sviluppo della Geometria in Italia nell' ultimo cinquantennio* », dal prof. **Lauricella** « *Sull' opera dei matematici italiani nei recenti progressi della teoria delle funzioni e delle equazioni integrali* », e dal prof. **Levi-Civita** « *Sull' estensione ed evoluzione della Fisica Matematica* ». Conformemente a deliberazione del Comitato scientifico, i discorsi di Classe trattarono dello svolgimento delle discipline varie scientifiche nell' ultimo cinquantennio, con speciale riguardo all' Italia; deliberazione veramente degna di plauso e piena di patriottismo, in virtù della quale i Congressisti passarono ore di vero godimento intellettuale e provarono anche care emozioni udendo gli elaborati discorsi degli illustri conferenzieri, che in veri e propri quadri sintetizzarono molto felicemente tutta l' opera meravigliosa dei Matematici e particolarmente dei Matematici italiani, dei nostri più amati Maestri.

Interessanti poi le Comunicazioni presentate alla Sezione I dal prof. **Andreoli** « *Sui postulati fondamentali dell' Algebra e della Logica* » e « *su alcune trascendenti* »; del prof. **Giacomelli** « *Sui fondamenti della meccanica* » del prof. **Mancini** « *Su alcune questioni di geografia matematica* », del prof. **Pascal** *sui suoi integratori per equazioni differenziali* e del prof. **Tummarello** « *Su alcuni nuovi tipi di trasformazioni birazionali dello spazio* ». Gli Atti di cui il Comitato organizzatore, con la sua solita solerzia, curerà al più presto la pubblicazione, ci daranno modo di apprezzare ancor più i Discorsi e le Comunicazioni predette e ci offriranno probabilmente l' occasione di tornare ad occuparcene su questo *Bollettino*.

Revoca del decreto Orlando

e nuovi programmi per le Scuole classiche

Finalmente, secondo il voto ripetutamente manifestato dalla grande maggioranza dei competenti, il R. D. 11 novembre 1904 sulla facoltà di scelta nei licei fra il greco e la matematica, è stato abrogato. La legge sui Ginnasi e Licei Moderni ha servito di pretesto legale per tornare a porre l' obbligo dello studio della matematica a tutti indistintamente gli alunni delle tre classi del Liceo, sia classico che moderno. Per la sezione moderna vi sarà tempo a pensare al relativo programma, giacchè per ora di *moderno* sorge soltanto la quarta ginnasiale, per la quale su per giù potrà andar bene lo stesso programma, *ma non l' orario*, della quarta dello stile antico. Per le classi liceali pertanto, il Decreto di revoca del R. D. 11 novembre 1904, porta allegati i nuovi programmi dei quali, nel momento in cui scriviamo, non conosciamo ancora il testo ufficiale, che sta seguendo le peregrinazioni del Decreto in parola, da Ministero a Ministero secondo la solita, non breve, procedura. Siamo però in grado di dirne qualchecosa, per cortesi comunicazioni avute da buona fonte, circa ai concetti fondamentali a cui pare si siano ispirati gli estensori dei nuovi programmi, concetti che sostanzialmente sarebbero stati i seguenti:

a) sfrondare gli antichi programmi, da tutto ciò, che apparisse meno utile e meno necessario.

b) dare all' intero programma una maggiore organicità.

Così, per la quarta ginnasiale si sarebbe limitato lo studio dei numeri primi a quel poco che può esser necessario per le teorie del M. C. D. e del M. C. M. e dalla quinta si sarebbe soppresso il Calcolo letterale. Dal programma di geometria della quinta verrebbe tolta la teoria dell' equivalenza e trasportata nella 1ª liceale ove così si troverebbero insieme le teorie della equivalenza e della similitudine nel piano. Della stereometria sarebbe iniziato lo studio nella 1ª liceale e spinto fino allo sviluppo completo delle proprietà di posizione delle rette e dei piani e del concetto d' uguaglianza delle figure solide.

Il calcolo algebrico sarebbe svolto nella 1ª liceale, fino alla risoluzione dei sistemi d' equazioni lineari a più incognite; nella 2ª invece seguirebbe la risoluzione delle equazioni di 2° grado, premesse le nozioni più essenziali sui numeri reali; alla 2ª classe stessa sarebbero assegnate le teorie dell' equivalenza e della similitudine nello spazio e tutta la

parte metrica della geometria del piano e dello spazio. Nella terza classe verrebbe raccolto tutto lo studio della trigonometria, con esclusione della trigonometria sferica; e nella terza classe stessa troverebbero posto la teoria dei numeri primi e qualche altro argomento algebrico d'indole complementare.

L'orario vien fissato così: 4 ore per la 1ª, 3 ore per la 2ª liceale; e due per la 3ª (solo quest'anno transitoriamente 3); e pel ginnasio, resta inesorabilmente l'orario di 2 ore settimanali.

In attesa di conoscere il testo ufficiale definitivo non esitiamo a dichiarare, per parte nostra, che riportiamo una buona impressione dai criteri a cui il nuovo programma sarebbe ispirato. La riduzione dell'orario non incontra certo un gran favore, ma non sarà per questo che diminuirà il compiacimento nostro e dei Colleghi dinanzi all'accoglimento di quello che fu uno dei loro più fervidi voti. Piuttosto noi raccogliamo, fin d'ora, dai Congressi e dalla voce di Colleghi autorevolissimi, il voto che, almeno per la Sezione moderna del ginnasio e del liceo, si stabilisca un orario più intenso per tutte le classi e si ripristini l'obbligo della prova scritta di matematica per tutti gli esami di promozione e di licenza.

NOTIZIE VARIE
sui concorsi a cattedre di matematica di Scuole Medie

Concorso pei Licei e Istituti tecnici. — I lavori del Concorso pei Licei e per gli Istituti tecnici sono stati ultimati entro l'ottobre, dalla Commissione definitivamente costituita dai proff. **Berzolari**, **Marcolongo** e **Martone**.

Dei 73 candidati presentatisi alla prova scritta, ne furono riprovati 39. Dei 34 ammessi agli orali, 1 solo non vi si presentò, e dei 33 che sostennero anche le prove orali, due soltanto non furono dichiarati idonei; ma i vincitori furono 24 soltanto, 4 di meno del numero totale dei posti messi a concorso.

I vincitori e gli idonei sono stati classificati nell'ordine di merito seguente:

(*Vincitori*). — 1 Cecconi - 2 Manfredini - 3 Rossi - 4 Teofilato - 5 Lenzi - 6 Darbi - 7 Bandini - 8 Chieffi - 9 Piccioli - 10 Gennari - 11 Ascoli - 12 Cattaneo - 13 Ruggeri - 14 Michel - 15 Natucci - 16 Bianca

- 17 D'Amico - 18 Repetto - 19 Bucca - 20 Chiomio - 21 Giraud - 22 Miotti - 23 Del Prete - 24 Marengoni.

(*Idonei*). — 1 Toffoletti - 2 Tocchi - 3 Ghezzi - 4 Vergerio - 5 Ceccherini - 6 Gamberini - 7 Dal Pozzolo.

Concorso per gli Istituti nautici. — Il tema assegnato per questo concorso, dalla stessa Commissione giudicatrice del Concorso pei licei e istituti tecnici, fu il seguente:

« *Risolvere il seguente problema di equazioni*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ ax^2 + by^2 + cz^2 = u \\ (b-c)^2 y^2 z^2 + (c-a)^2 z^2 x^2 + (a-b)^2 x^2 y^2 = v^2 \end{cases}$$

dove a, b, c, u, v, *sono numeri reali noti, e discutere le soluzioni nella ipotesi che sia* a > b > c.

A prova della sua cultura, il candidato potrà interpretare geometricamente i risultati, considerando, ad esempio, x, y, z, *quali coordinate carte siano ortogonali di un punto dello spazio ed* u, v, *quali coordinate di un punto di un piano e studiando la corrispondenza che viene a stabilirsi tra i punti del piano stesso ed i punti di una sfera di raggio uno.*

Si presentarono alla prova scritta 17 candidati, e di questi soltanto 12 furono ammessi alle prove orali.

Gli esami orali avranno luogo in dicembre.

Concorso per le Scuole Normali Femminili. — Anche questo Concorso è stato completamente espletato. Eccone la graduatoria finale:

(*Vincitori*). — 1. Cecioni Francesco - 2. Cherubino Salvatore - 3. Nalli Pia - 4. D'Amico Francesco - 5. Natucci Alpinolo - 6. Rovetti Carlo - 7. Cattaneo Paolo - 8. Scrosoppi Pietro - 9. Puccini Ada - 10. Bucca Riccardo - 11. Lenzi Enrico - 12. Repetto Giuseppe - 13. Minetola Silvio - 14. Amato Vincenzo - 15. Bandini Silvio - 26. Chieffi Olindo - Miotti Andrea - 18. Romanazzi Domenico - 19. Bianca Cesare - 20. Usai Giuseppe - 21. Giraud Giulio - 22. Artom Emilio - 23. Fiorentini Pietro - 24. Pampana Gino - 25. Gramegna Maria - 26. Pellizzari Nelda - Toffoletti Carlo - 28. Da Rios Sante - 29. Pistorio Giovanni - 30. Favini Ines - 31. Ricotti Ernestina - 32. Oriani Alberto - 33. Fortunato Ernesto - 34. Licopoli Guglielmo - 35. Vitale Alfredo - 36. Ottolenghi Bianca - 37. Mosca Pietro - 38. Aguglia Gaetano - 39. Tavani Modestino - 40. Caramelli Olga.

(*Idonei*). — 1. Marengoni Ardiccio - 2. Jodi Carlo Felice - 3. Insolera Filadelfo - 4. Calegari Adrasto - 5. Del Prete Oreste - 6. Ceccherini Francesco - 7. Tocchi Luigi - 8. Bongianni Carlo - 9. Cairo Emma - 10. Beggi Ezio - 11. Pasotti Eugenio - 12. Rossi Cornelio - 13. Rossetti Demetrio

SOMMARIO:

h) Resoconto dei Congressi di matematica, italiani e stranieri.

i) Relazioni e graduatorie dei Concorsi per cattedre di matematica; notizie del personale insegnante.

l) Una rubrica *(rubrica intermediario)* destinata ad accogliere da tutti i lettori domande intorno a qualsiasi argomento compreso nel programma del periodico, e che accoglierà altresì le risposte via via date alle dette domande dai lettori medesimi o dalla Direzione.

La quota d'abbonamento è di L. 6,50 per l'Italia (L. 7,50 per l'Estero).

L'abbonamento può esser preso in qualunque momento dell'anno, ma termina coll'anno stesso; e la Direzione non garantisce di poetre inviare tutti i numeri dell'annata a partire dal primo, a coloro che assumono l'abbonamento dopo il 15 febbraio.

L'ammontare della quota d'abbonamento dev'essere pagato in una sola volta e anticipatamente.

I fascicoli del " BOLLETTINO DI MATEMATICA „ portano la numerazione, d'anno in anno, da 1 a 12, ma escono di regola ogni due mesi. La Direzione si riserva il diritto di raccogliere in un sol fascicolo due o più numeri, all'intento di dare un proporzionato sviluppo a tutte le principali rubriche.

AVVERTENZA PEI NUOVI SOCI

Non è più disponibile alcuna collezione complet essendo esaurita l'annata II e l'annata VII. Sono però disponibi varie copie delle annate I, III, IV, V, VI, VIII e IX. Sono anche dis nibili alcune copie dell'Annata II del *Bollettino di Mate di Scienze Fisiche e Naturali,* la cui pubblicazione precedette del *Bollettino di Matematica*, un volume interessantissimo anch professori di matematica (*in specie per due monografie dei prof.* Co e Marenghi *sulle costruzioni geometriche coll' uso della sola riga*) oltre 300 pagine].

Anno X 1911 N. 5-6-7-8

INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA
TRATTATA ELEMENTARMENTE

ANTONIO BINDONI (Modena)

PREMESSE

I. Quot, rest.

1. — Df. Se a è un numero reale positivo o lo zero, e b è un numero reale positivo, allora: quot $(a\,;b)$ vuol dire: il massimo dei numeri (interi positivi o zero) x tali che: $bx \leqq a$.

2. — Df. Se a è un numero reale positivo o lo zero, e b è un numero reale positivo, allora:

$$\text{rest}\ (a\,;b) = a - b \cdot \text{quot}\ (a\,;b).$$

3. — P. Se a è un numero reale positivo o lo zero, e b è un numero reale positivo, consegue l'esistenza del quot $(a\,;b)$ e e del rest $(a\,;b)$,

[a) Sia α il minimo dei numeri naturali y tali che $by > a$. La classe di questi numeri è esistente, perchè la classe dei numeri reali positivi è archimedea, ed ha perciò un minimo, cioè α è un numero determinato. Segue che $\alpha - 1$ è un N_0 tale che $b(\alpha - 1) \leqq a$, ma è anche il massimo dei numeri x tali che $bx \leqq a$, perchè un numero k maggiore di esso fa sì che $bk > a$, e non può appartenere alla classe dei numeri x tali che $bx \leqq a$. Consegue che $\alpha - 1$ è il quot $(a\,;b)$.

b) Poichè $b\,(\alpha - 1) \leqq a$ segue che $a - b\,(\alpha - 1)$ è un numero reale positivo o zero; esso è stato d'altra parte chiamato rest $(a\,;b)$ e perciò consegue che rest $(a\,;b)$ esiste].

4. — P. Se a è un numero reale positivo o zero, e b un numero reale positivo, si deduce che:

$$a = b \text{ quot } (a\,;b) + \text{rest } (a\,;b)\,;$$

$$\text{rest } (a\,;b) < b.$$

[Si dimostra come per gli N_0].

5. — P. Se a, b, q, r sono numeri reali positivi o zero, ed

$$a = bq + r, \qquad r < b$$

allora

$$q = \text{quot } (a\,;b) \ , \ r = \text{rest } (a\,;b).$$

[Si dimostra come sopra].

6. — P. Se a un è numero reale positivo o zero, e b e c sono numeri reali positivi, allora

$$\text{quot } (a\,;b) = \text{quot } (ac\,;bc)$$

$$[\text{rest } (a\,;b)]\ c = \text{rest } (ac\,;bc).$$

[Si dimostra come sopra].

***

II. Versi per gli angoli di un piano. Determinazione di un arco di circonferenza mediante gli estremi di un verso [1].

7. — Se m, n, p, q sono i lati di due angoli $(m\,;n)$, $(p\,;q)$ convessi e appartenenti a un piano α, allora sono equivalenti i seguenti fatti a), b), c), d):

a) Una retta t del piano α che lascia da una stessa banda i vertici degli angoli e incontra un numero pari di lati m, n, p, q, taglia le rette dei lati in punti M, N, P, Q tali che $(M;N)$, $(P\,;Q)$ sono equiversi (contraversi).

---

[1] Per la teoria dei versi cfr. un recente ed esauriente articolo di E. Veneroni - *Periodico di Matem.*, anno XXVI, Fasc. 1.

b) Una retta t' del piano α che lascia da una stessa banda i vertici degli angoli e incontra un numero dispari di lati m, n, p, q, taglia le rette dei lati in punti M', N', P', Q' tali che $(M' ; N')$, $(P' ; Q')$ sono contraversi (equiversi).

c) Una retta t_1, del piano α che lascia da bande opposte i vertici degli angoli e incontra un numero pari di lati, taglia le rette dei lati in punti M_1, N_1, P_1, Q_1 tali che $(M_1 ; N_1)$, $(P_1 ; Q_1)$ sono contraversi (equiversi).

d) Una retta t'_1, del piano α che lascia da bande opposte i vertici degli angoli e incontra un numero dispari di lati, taglia le rette dei lati in punti M'_1, N'_1, P'_1, Q'_1 tali che $(M_1' ; N_1')$, $(P'_1 ; Q'_1)$ sono equiversi (contraversi). Cioè: da una qualunque delle *a*), *b*), *c*), *d*) si deduce un'altra qualunque delle stesse.

8. — Df. Due angoli di un piano α si dicono equiversi (contraversi) quando è verificato per essi uno qualunque dei fatti *a*), *b*), *c*), *d*) della precedente proposizione.

9. — Df. L'angolo $(h ; k)$ concavo e l'angolo $(r ; s)$ convesso sono equiversi (contraversi) vuol dire: l'angolo $(k ; h)$ convesso e l'angolo $(r ; s)$ convesso sono equiversi (contraversi).

10. — Df. Gli angoli $(a ; b)$, $(c ; d)$ concavi sono equiversi (contraversi) vuol dire: gli angoli convessi $(a ; b)$, $(c ; d)$ sono equiversi (contraversi).

11. — Df L'angolo piatto $(a ; a')$ che contiene il raggio l e l'angolo $(b ; c)$ sono equiversi (contraversi), significa: l'angolo convesso $(a ; l)$ e l'angolo $(b ; c)$ sono equiversi (contraversi).

11.bis — L'angolo piatto $(a ; a')$ che contiene il raggio l e l'angolo piatto $(b ; b')$ che contiene il raggio m sono equiversi (contraversi), significa: gli angoli convessi $(a ; l)$, $(b ; m)$ sono equiversi (contraversi).

12. — P. I. Due angoli equiversi a un terzo sono equiversi fra loro.

II. Due angoli uno equiverso e l'altro contraverso a un terzo sono contraversi fra loro.

13. — P. L'angolo convesso $(m ; n)$ e l'angolo concavo $(m ; n)$ sono contraversi.

14. — P. Angoli opposti al vertice sono equiversi.

15. — P. L'angolo piatto $(a ; a')$ che contiene il raggio l e l'angolo piatto $(a ; a')$ che contiene il raggio l' opposto ad l sono contraversi.

16. — P. L'angolo piatto $(a\,;a')$ che contiene il raggio l e l'angolo piatto $(a'\,;a)$ che contiene il raggio l' opposto ad l sono equiversi.

***

17. — Df. Se τ è un piano, O, A punti di esso, $M, N, R, S. T$ punti della circonferenza di centro O per A nel piano τ, allora: per arco $(M\,;N)$ verso RST s'intende quell'arco che è contenuto in quell'angolo $(OM\,;ON)$ che è equiverso all'angolo $(OR\,;OT)$ contenente il raggio OS.

***

§ 1. — Affissa di un numero reale sopra una circonferenza.

18. — Df. Se le lettere del numero precedente conservano lo stesso significato, ed OA è l'unità di misura dei segmenti, allora: se a è un numero reale, per *affissa* di a rispetto all'origine A e al verso RST s'intende il punto M della circonferenza (O, A, τ) tale che: se a è positivo o zero, l'arco $(A\,;M)$ verso RST ha per misura rest $(a\,;2\pi)$; se a è negativo, l'arco $(A\,;M)$ verso TSR ha per misura rest $(-a\,;2\pi)$.

19. — P. Se a è un numero reale (positivo, negativo o zero), M l'affissa di a (origine A, verso RST), α la misura dell'arco $(A\,;M)$ verso RST, allora $a - \alpha = 2k\pi$, dove k è intero (positivo o negativo) o zero.

[1.° Sia $a > o$, $q =$ quot $(a\,;2\pi)$, $r =$ rest $(a\,;2\pi)$; allora

$$a = 2q\pi + r \quad , \quad a - r = 2q\pi.$$

Ma $r = \alpha$, e quindi $a - \alpha = 2q\pi$.

2.° Sia $a < o$, $q =$ quot $(-a\,;2\pi)$, $r =$ rest $(-a\,;2\pi)$; allora

$$-a = 2q\pi + r \ , \ a = -2q\pi - r = -2(q+1)\pi + (2\pi - r)$$

e quindi

$$a - (2\pi - r) = -2(q+1)\pi.$$

Ma $2\pi - r = \alpha$ e quindi $a - \alpha = -2(q+1)\pi$] [1].

20. — P. La condizione necessaria e sufficiente affinchè due numeri dati a, b abbiamo la stessa affissa è che sia

$$a - b = 2k\pi \text{ con } k \text{ intero o zero.}$$

[1.° La condizione è necessaria, cioè, se a, b hanno la stessa affissa M, è $a - b = 2k\pi$ con k intero o zero.

Sia α la misura dell'arco $(A ; M)$ verso RST. Pel teorema precedente

$$a = \alpha + 2l\pi \quad , \quad b = \alpha + 2l'\pi$$

con $l; l'$ interi, positivi o negativi, o zero. Quindi $a - b = 2(l - l')\pi$ con $l - l'$ intero, positivo o negativo, o zero.

2.° La condizione è sufficiente.

Siano M e M' le affisse di a, b; α, β le misure degli archi $(A ; M)$, $(A . M')$ verso RST, Pel teorema precedente

$$a = \alpha + 2l\pi \quad , \quad b = \beta + 2l'\pi$$

con l, l' interi, positivi o negativi, o zero.

Allora

$$a - b = \alpha - \beta + 2(l - l')\pi,$$

ma per ipotesi è $a - b = 2k\pi$ con k intero, positivo o negativo, o zero e quindi poichè α e β sono ambedue minori di 2π, $\alpha - \beta = o$ cioè $\alpha = \beta$ e quindi M coincide con M').

21. — P, Se a, b sono numeri reali, RST punti della circonferenza (O, A, τ), OA l'unità di misura, M l'affissa di a (origine A, verso RST), N l'affissa di b (origine M, verso RST), allora N è l'affissa di $a + b$ (origine A, verso RST).

[Sia α la misura dell'arco $(A ; M)$ verso RST, β la misura dell'arco $(M ; N)$ verso RST; allora

$$a = 2k\pi + \alpha \quad , \quad b = 2k'\pi + \beta,$$

$$a + b = 2(k + k')\pi + (\alpha + \beta)$$

e quindi l'affissa di $a + b$ è identica all'affissa $\alpha + \beta$.

---

[1] 3.° Sia $a = o$. In questo caso

$$\text{rest}\,(a ; 2\pi) = o$$

e perciò l'affissa di a è il punto A e l'arco AM verto RST, è l'arco nullo, che ha per misura lo zero.

Si ha quindi $a - \alpha = o - o = o$, cioè è vera la P.

a) Se $\alpha + \beta < 2\pi$, allora $\alpha + \beta$ è la misura dell'arco $(A\,;\,N)$ verso RST e quindi l'affissa di $\alpha + \beta$ (origine A, verso RST) è N, che è perciò anche l'affissa di $a + b$.

b) Se $\alpha + \beta = 2\pi$, allora

$$a + b = 2(k + k' + 1)\pi + (\alpha + \beta - 2\pi)$$

e quindi l'affissa di $a + b$ è eguale a quella di $\alpha\beta - 2\pi$, cioè ad A; Ma se $\alpha + \beta = 2\pi$, N coincide con A; quindi l'affissa di $a + b$ è N.

c) Se $\alpha + \beta > 2\pi$, allora

$$a + b = 2(k + k' + 1)\pi + (\alpha + \beta - 2\pi)$$

e quindi l'affissa di $a + b$ è eguale a quella di $\alpha + \beta - 2\pi$. Ma l'affissa di $\alpha + \beta - 2\pi$ è N, perchè

$$\alpha + \beta - 2\pi = \text{rest}\ (\alpha + \beta - 2\pi\,;\,2\pi)$$

ed è appunto $\alpha + \beta - 2\pi$ la misura dell'arco $(A\,;\,M)$ verso RST].

21.bis — P. Se M è affissa di a (origine A, verso RST) ed N è affissa di $a + b$ (origine A, verso RST), allora N è affissa di b (origine M, verso RST). [Sia N' l'affissa di b (origine M, verso RST); N' è affissa di $a + b$ (origine A, verso RST); dunque

$$N' \equiv N].$$

22. — P. Se M è affissa di a (origine A, verso RST), N affissa di b (origine M, verso RST), allora, se

$$a + b = c + 2k\pi,$$

N è affissa di c (origine A, verso RST).

[1.° Sia $a + b = c + 2k\pi$. Dalla P. 19 si ha che $a + b$ e c hanno identica affissa. Ma (20) N è affissa di $a + b$ e perciò N è affissa di c.

2.° Sia N affissa di c (origine A, verso RST). Siccome (P. 20) è anche N affissa di $a + b$ (origine A, verso RST), così $a + b$ e c hanno identica affissa, e quindi (P. 19)

$$a + b = c + 2k\pi].$$

Affisse di numeri opposti.

22.bis — P. Se a, b sono numeri reali, e $a + b = o$, le affisse di a, b rispetto a una stessa origine A e ad uno stesso verso RST sono simmetriche rispetto al diametro che passa per l'origine.

[Sia a positivo e quindi b negativo. Poichè $a = -b$,

$$\text{rest}\ (-b\,;\ 2\pi) = \text{rest}\ (a\,;\ 2\pi).$$

Le affisse di a, b sono dunque estremi di archi: $(A\,;\,M)$ verso RST, $(A\,;\,M')$ verso TSR aventi eguale misura, e perciò M, M' sono simmetrici rispetto al diametro OA.

Affisse di numeri supplementari.

23. — P. Se a, b sono numeri reali, e $a + b = \pi$, le affisse di a, b rispetto alla stessa origine e allo stesso verso sono punti simmetrici rispetto al diametre perpendicolare a quello che passa per l'origine.

[Sia M l'affissa di a, M' quella di b; sia α la misura dell'arco $(A\,;\,M)$ verso RST, β la misura dell'arco $(A\,;\,M')$ verso RST; allora

$$a = 2k\pi + \alpha \quad , \quad b = 2k'\pi + \beta$$

e quindi

$$a + b = 2\,(k + k')\,\pi + \alpha + \beta = \pi$$

e quindi l'affissa di $\alpha + \beta$ è A', opposto ad A rispetto al centro. Dunque A' è l'affissa di β, origine M, verso RST, e l'arco $(M\,;\,A')$ verso RST è uguale all'arco $(A\,;\,M')$ vsrso RST, cioè M, M' sono simmetrici rispetto al diametro verticale al diametro OA].

Affisse di numeri che differiscono di π.

24. — P. Le affisse di due numeri reali che differiscono di π sono simmetriche rispetto ad O (centro del cerchio).

[Sia $a - b = \pi$. Allora $a + (-b) = \pi$ e si trae che le affisse dei numeri a, $-b$ sono simmetriche rispetto al diametro verti-

cale a quello che passa per l'origine. Ma le affisse di $b, -b$ sono simmetriche rispetto al diametro che passa per l'origine. Segue che le affisse di a, b sono simmetriche rispetto al centro].

Affisse di numeri complementari.

25. — P. Se $a+b=\frac{\pi}{2}$, le affisse di a, b (origine A, verso RST) sono simmetriche rispetto al diametro che passa pel punto medio dell'arco $(A\,;B)$, verso RST, la cui misura è $\frac{\pi}{2}$ (ovvero: dell'arco $(A\,;B)$ tale che B è affissa di $\frac{\pi}{2}$ (origine A, verso RST).

[Sia M (M') l'affissa di a (di b); sia α (β) la misura dell'arco $(A\,;M)$ verso RST (dell'arco $(A\,;M')$ verso RST). Allora M (M') è affissa di α (β), cioè a (b) ed α (β) hanno la stessa affissa e perciò

$$a=2k\pi+\alpha \quad , \quad b=2k'\pi+\beta$$

onde

$$\frac{\pi}{2}=a+b=2(k+k')\pi+\alpha+\beta$$

cioè l'affissa di $\alpha+\beta$ coincide con quella di $\frac{\pi}{2}$ cioè con B. Dalla P. 21 risulta che B è l'affissa di β (origine M, verso RST), onde l'affissa di β (origine A, verso RST) è l'estremo di un arco $(A\,;M_1)$ origine A, verso RST, uguale all'arco $(M\,;B)$ verso RST. Ma l'affissa di β è M' e perciò l'arco $(A\,;M')$ verso RST è eguale all'arco $(M\,;B)$ verso RST e quindi anche all'arco $(B\,;M)$ verso TSR (perchè l'arco $(M\,;B)$ verso RST e l'arco $(B\,;M)$ verso TSR coincidono). Quindi M, M' sono simmetrici rispetto al detto diametro.

Osservazione. — Si ha:

$$\pi=2(a+b)=4(k+k')\pi+2(\alpha+\beta)$$

e quindi

$$\pi-4(k+k')\pi=2(\alpha+\beta)$$

cioè

$$\pi[1-4(k+k')]=2(\alpha+\beta).$$

Ma $o < 2(\alpha + \beta) < 4\pi$ e perciò $k + k' = o$ ovvero $k + k' = -1$ onde $2(\alpha + \beta) = \pi$ ovvero $2(\alpha + \beta) = 5\pi$ da cui $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ovvero $\alpha + \beta = 5\frac{\pi}{2}$.

26. — Df. Se α è un numero reale, data una circonferenza (O, A, τ) e i punti R, S, T in essa, allora: affissa di α° (α gradi) (origine A, verso RST) significa:

1,° Se α è positivo, l'estremo dell'arco AM, verso RST, la cui misura sessagesimale è rest $(\alpha ; 360)$.

2.° Se α è negativo, il punto M tale che arco AM, verso TSR, ha per misura rest $(\alpha ; 360)$.

27. – P. Se α_1 è la misura sessagesimale dell'arco AM, verso RST, ed M è l'affissa di α, allora si deduce che

$$\alpha - \alpha_1 = 2 \cdot \sigma \cdot 180,$$

dove σ è un numero intero oppure zero.

[Si distinguono due casi:

1.° α è un numero reale positivo. Allora, se

$$q = \text{quot}\ (\alpha : 360) \quad , \quad r = \text{rest}\ (\alpha : 360),$$

$$\alpha = 2 \cdot 180 \cdot q + r$$

da cui

$$\alpha - r = 2 \cdot q \cdot 180.$$

Ma per definizione di affissa

$$r = \text{rest}\ (\alpha : 360)$$

non è altro che la misura sessagesimale α dell'arco $(A ; M)$ verso RST e cioè $r = \alpha_1$ e quindi

$$\alpha - \alpha_1 = 2 \cdot q \cdot 180.$$

2.° α è un numero reale negativo. Allora, se

$$q = \text{quot}\ (-\alpha : 360) \quad , \quad r = \text{rest}\ (-\alpha : 360),$$

si ha

$$-\alpha = 2 \cdot q \cdot 180 + r$$

e quindi

$$\alpha = -2 \cdot q \cdot 180 - r,$$

da cui

$$\alpha = -2 \cdot q \cdot 180 - r + 2 \cdot 180 - 2 \cdot 180,$$

ovvero

$$\alpha = -2(q+1)\,180 + 2 \cdot 180 - r$$

e togliendo da ambo i membri $2 \cdot 180 - r$ si ha

$$\alpha - (2 \cdot 180 - r) = -2(q+1)\,180. \qquad (1)$$

Ma, come è ovvio, si ha che

$$r = 2 \cdot 180 - \alpha_1$$

e perciò, sostituendo nella (1) ad α_1 il suo valore, si ottiene

$$\alpha - \alpha_1 = 2\,[-(q+1)]\,180.$$

Confronto di numeri reali con numeri gradi.

28. — P. Se a ed α sono numeri reali, la condizione necessaria e sufficiente affinchè a ed α° abbiano la stessa affissa è che:

$$\frac{a}{2\pi} - \frac{\alpha}{360} = l$$

ove l è intero o zero.

[La condizione è necessaria. Infatti, sia a_1, la misura circolare e α_1, la misura sessagesimale dell'arco $(A\,;M)$, verso RST, dove M è l'affissa comune ad a, α; allora esisteranno due numeri k e k' tali che

$$a = a_1 + 2k\pi$$

$$\alpha = \alpha_1 + 2k' \cdot 180$$

e quindi, dividendo la prima per 2π e la seconda per 360, si hanno le

$$\frac{a}{2\pi} = \frac{a_1}{2\pi} + k$$

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{\alpha_1}{360} + k',$$

che sottratte membro a membro danno la

$$\frac{a}{2\pi} - \frac{\alpha}{360} = \left(\frac{a_1}{2\pi} - \frac{\alpha_1}{360}\right) + k - k'.$$

Ora, poichè a_1 ed α_1 sono le misure circolari e sessagesimali d'uno stesso arco, è

$$\frac{a_1}{2\pi} - \frac{\alpha_1}{360} = o,$$

e perciò si ha

$$\frac{a}{2\pi} - \frac{\alpha}{360} = k - k',$$

che è un numero intero o zero,

La condizione è sufficiente. Siano M ed M' le affisse di a e di α°; a_1, la misura circolare dell'arco $(A\,;M)$, verso RST, e α_1 la misura sessagesimale dell'arco $(A\,;M')$, verso RST. Esisteranno i numeri k e k' tali che

$$a = a_1 + 2\pi k$$

$$\alpha = \alpha_1 + 2k' \cdot 180,$$

e quindi

$$\frac{a}{2\pi} = \frac{a_1}{2\pi} + k\,;\ \frac{\alpha}{360} = \frac{\alpha_1}{360} + k'.$$

Ma $\frac{a_1}{2\pi}$ e $\frac{\alpha_1}{360}$ sono due frazioni proprie e perciò la loro differenza è pure una frazione propria e poichè addizioata ad un intero $(k - k')$ dà un intero, dovrà essere

$$\frac{a_1}{2\pi} - \frac{\alpha_1}{360} = o.$$

E perciò a_1 ed α_1 sono uno la misura circolare e l'altro la sessagesimale d'uno stesso arco, e quindi M coincide con M', cioè i due numeri α ed a hanno la stessa affissa].

29. — P. Se α e β sono numeri reali, la condizione necessa-

ria e sufficiente affinchè α° e β° abbiano la stessa affissa è che sia $\alpha - \beta = 2\sigma \cdot 180$, ove σ è un numero intero o zero.

[La condizione è necessaria. Infatti esistono due numeri reali a e b tali che

$$\frac{a}{2\pi} - \frac{\alpha}{360} = o \quad , \quad \frac{b}{2\pi} - \frac{\beta}{360} = o. \tag{1}$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$\frac{a - b}{2\pi} - \frac{\alpha - \beta}{360} = o. \tag{2}$$

Ma dalle (1) e dal teorema precedente si ha che a ed α° hanno la stessa affissa, e così b e β°, e perciò dalla ipotesi che α° e β° abbiano la stessa affissa segue che a e b hanno pure la stessa affissa, e quindi esisterà un numero σ intero o zero tale che $a - b = 2\sigma\pi$. Sostituendo $2\sigma\pi$ ad $a - b$ nella precedente eguaglianza, si ha

$$\frac{2\sigma\pi}{2\pi} - \frac{\alpha - \beta}{360} = o, \text{ ovvero } \sigma = \frac{\alpha - \beta}{360}$$

e infine

$$\alpha - \beta = 2\sigma \cdot 180.$$

La condizione è sufficiente. Esista un numero k intero o zero tale che sia

$$\alpha - \beta = 2k \cdot 180.$$

Sostituendo nella (2) avremo:

$$\frac{a - b}{2\pi} - k = o, \text{ ovvero } a - b = 2k\pi,$$

e quindi a e b hanno la stessa affissa e perciò anche α° e β° (essendo l' affissa di a eguale all'affissa di α° e l'affissa di b eguale all'affissa di β°].

30. — P. Se α e β sono numeri reali ed M è l'affissa di α° (origine A, verso RST) ed N è quella di β° (origine M, verso

RST), si deduce che N è l'affissa di $(\alpha+\beta)^\circ$ (origine A, verso RST).

[Infatti esistono due numeri a e b tali che

$$\frac{a}{2\pi}-\frac{\alpha}{360}=o \quad (1), \qquad \frac{b}{2\pi}-\frac{\beta}{360}=o \qquad (2)$$

e quindi anche tali che

$$\frac{a+b}{2\pi}-\frac{\alpha+\beta}{360}=o. \qquad (3)$$

Ma per un teorema già dimostrato l'affissa di $a+b$ (origine A, verso RST) è N, e quindi anche l'affissa di $\alpha+\beta$ (origine A, verso RST) è N].

31. — P. Se α, β sono numeri reali, ed è $\alpha-\beta=180$, si deduce che le affisse di α°, β° sono simmetriche rispetto ad O (centro del cerchio).

[Esistono due numeri reali a, b tali che

$$\frac{a}{2\pi}-\frac{\alpha}{360}=o \quad , \quad \frac{b}{2\pi}-\frac{\beta}{260}=o,$$

e quindi anche tali che

$$\frac{a-b}{2\pi}-\frac{\alpha-\beta}{360}=o$$

ovvero, per l'ipotesi fatta,

$$\frac{a-b}{2\pi}-\frac{1}{2}=o,$$

da cui $a-b=\pi$. Segue che le affisse di a, b sono simmetriche rispetto ad o. Ma le affisse di a, b sono eguali a quellle di α° e β° e quindi le affisse di α^0 e β^0 sono simmetriche rispetto ad o].

32. — P. Se α e β sono numeri reali ed è $\alpha+\beta=180$, si deduce che le affisse di α^0 e β^0 sono simmetriche rispetto al diametro perpendicolare a quello che passa per l'origine.

[Esistono due numeri reali a, b tali che

$$\frac{a}{2\pi}-\frac{\alpha}{360}=o \quad , \quad \frac{b}{2\pi}-\frac{\beta}{360}=o,$$

e quindi tali che

$$\frac{a+b}{2\pi} - \frac{\alpha+\beta}{360} = o,$$

ovvero

$$\frac{a+b}{2\pi} - \frac{1}{2} = o$$

e infine

$$a+b=\pi:$$

Allora si deduce che le affisse di a e b, e quindi anche quelle di α^0 e β^0 sono simmetriche rispetto al diametro perpendicolare a quello che passa per l'origine].

33. — P. Se α e β sono numeri reali ed è $\alpha+\beta=90$, allora le affisse di α^0 e β^0 sono simmetriche rispetto al diametro bisettore del 1^0 e 3^0 quadrante.

[Esistono due numeri reali a, b tali che

$$\frac{a}{2\pi} - \frac{\alpha}{360} = o \quad , \quad \frac{b}{2\pi} = \frac{\beta}{360} = o$$

e quindi tali che

$$\frac{a+b}{2\pi} - \frac{\alpha+\beta}{360} = o,$$

ovvero per l'ipotesi fatta

$$\frac{a+b}{2\pi} - \frac{1}{4} = o$$

e infine

$$a+b=\frac{\pi}{2}.$$

Allora si deduce che le affisse di a e b sono simmetriche rispetto al diametro bisettore del 1^0 e 3^0 quadrante. Ma le affisse di a, b sono identiche a quelle di α^0 e β^0, e perciò anche le affisse di α^0 e β^0 sono simmetriche rispetto al detto diametro].

Dimostrazione di un teorema sui numeri razionali [1]

ANTONIO BINDONI e GIOVANNI SANDRI (Modena)

Teorema: Fra due numeri razionali positivi disuguali esiste sempre un razionale che è potenza m.esima di un altro razionale.

Siano a e b due razionali positivi, dei quali $a < b$, ed m, n, n_1 interi positivi qualunque.

Potremo sempre determinare due interi positivi x ed y tali che si abbia:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^m \leqq a < \left(\frac{x+1}{n}\right)^m \tag{1}$$

$$\left(\frac{y}{n_1}\right)^m \leqq a < \left(\frac{y+1}{n_1}\right)^m \tag{2}$$

perchè basta che sia

$$x^m \leqq an^m < (x+1)^m$$

$$y^m \leqq an_1{}^m < (y+1)^m$$

e allora x^m ed y^m sono le maggiori potenze m.esime perfette contenute rispettivamente in an^m e in $an_1{}^m$,

Ora dalle 1) e 2) otteniamo:

$$\left(\frac{y}{n_1}\right)^m < \left(\frac{x+1}{n}\right)^m$$

---

(1) La stesura di questa dimostrazione è del prof. G. Sandri del R. Liceo di Modena. (Cfr. G. Sandri: *Teoria dei numeri reali.* - Società Tipografica Modenese, Modena).

donde

$$\frac{y}{n_1} < \frac{x+1}{n}$$

e da quest' ultima si deduce:

$$yn < (x+1)\, n_1$$

ed aggiungendo n ad ambo i membri

$$(y+1)\, n < (x+1)\, n_1 + n$$

e dividendo ambo i membri per nn_1

3) $$\frac{y+1}{n_1} < \frac{x+1}{n} + \frac{1}{n_1}\,.$$

Si osservi ora che, essendo ε un determinato razionale positivo comunque, si potrà scegliere n_1 in modo che

$$\frac{1}{n_1} < \varepsilon$$

e dalla 3) a maggior ragione si ricava

4) $$\frac{y+1}{n_1} < \frac{x+1}{n} + \varepsilon.$$

Supposto n determinato è pure determinato il corrispondente valore di x e la 4) poi sarà verificata anche da qualunque intero maggiore di n_1 e dal corrispondente valore di y.

Sia

$$n' > n_1$$

ed y' il valore di y corrispondente ad n'.

La 2) diventa

5) $$\left(\frac{y'}{n'}\right)^m \leqq a < \left(\frac{y'+1}{n'}\right)^m.$$

Supposto $u > v$ si sa essere:

$$u^m - v^m = (u-v)\,(u^{m-1} + vu^{m-2} + v^2u^{m-3} + \cdots + v^{m-1})$$

donde

$$u^m - v^m < (u-v)\, mu^{m-1}$$

Quindi anche

$$6)\qquad \left(\frac{y'+1}{n'}\right)^m - \left(\frac{y'}{n'}\right)^m < \frac{1}{n'}\, m \left(\frac{y'+1}{n'}\right)^{m-1}$$

e siccome $n' > n_1$ dalla 4) si ottiene

$$\frac{y'+1}{n'} < \frac{x+1}{n} + \varepsilon$$

e perciò dalla 6) si deduce altresì

$$7)\qquad \left(\frac{y'+1}{n'}\right)^m - \left(\frac{y'}{n'}\right)^m < \frac{1}{n'}\, m \left(\frac{x+1}{n} + \varepsilon\right)^{m-1}.$$

Osservando che $m\left(\frac{x+1}{n} + \varepsilon\right)^{m-1}$ è costante deriva che n' potrà essere determinato in modo che

$$\frac{1}{n'}\, m \left(\frac{x+1}{n} + \varepsilon\right)^{m-1} < b - a$$

e allora dalla 7) a maggior ragione si ha:

$$8)\qquad \left(\frac{y'+1}{n'}\right)^m - \left(\frac{y'}{n'}\right)^m < b - a.$$

Ricordando che per la 5)

$$\left(\frac{y'}{n'}\right)^m \leqq a < \left(\frac{y'+1}{n'}\right)^m$$

si vede che affinchè sia soddisfatta la 8) deve essere $\left(\frac{y'+1}{n'}\right)^m < b$ e perciò dalla 8) e 5) risulta

$$a < \left(\frac{y'+1}{n'}\right)^m < b$$

e il teorema è dimostrato.

Una semplice proprietà delle serie di potenze ed applicazioni

LUIGI GALVANI (Cagliari)

---

1. In una mia nota precedentemente compilata e che apparirà fra breve nel *Periodico di Matematica* mi sono proposto di segnalare un notevole gruppo di identità analitiche che si ottengono applicando successivamente ed iteratamente ad una funzione $f(x)$ le operazioni di moltiplicazione per $\varphi(x)$ e di derivazione rispetto alla x stessa, in questo ordine.

Qui voglio soltanto rilevare ciò che risulta dall'eseguire le operazioni anzidette su di una serie di potenze della x, limitatamente al caso in cui sia $\varphi(x) = x$, e precisamente mostrerò che *se* f(x) *è una funzione sviluppabile in serie di potenze,*

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

e si moltiplicano ordinatamente i termini di questa serie per quelli della progressione

$$p^q \quad (p+1)^q \quad (p+2)^q \cdots \qquad (p \text{ intero})$$

si ottiene una serie di potenze (convergente nello stesso cerchio della prima) di cui si può esprimere la somma in funzione della f(x) *e delle sue prime* q *derivate.*

Difatti si ha dalla (1)

$$x^p f = a_0 x^p + a_1 x^{p+1} + a_2 x^{p+2} + \cdots + a_n x^{p+n} + \cdots$$

e derivando i due membri

$$(2) \; p x^{p-1} f + x^p f' = p a_0 x^{p-1} + (p+1) a_1 x^p + \cdots + (p+n) a_n x^{p+n-1} + \cdots$$

da cui facilmente, mediante divisione per x^{p-1}:

$$pf + xf' = pa_0 + (p+1)a_1x + \cdots + (p+n)a_nx^n + \cdots$$

La proprietà enunciata vale dunque per $q=1$.

Volendola dimostrare per $q=2$ basterà moltiplicare i due membri della (2) per x e derivare poi rispetto ad x, con che si avrà

$$(3) \qquad p^2x^{p-1}f + (2p+1)x^pf' + x^{p+1}f'' =$$
$$= p^2a_0x^{p-1} + (p+1)^2a_1x^p + \cdots + (p+n)^2a_nx^{p+n-1} + \cdots$$

donde infine dividendo per x^{p-1} risulterà:

$$p^2f + (2p+1)xf' + x^2f'' = p^2a_0 + (p+1)^2a_1x + \cdots + (p+n)^2a_nx^n + \cdots$$

Così ancora, moltiplicando i due membri della (3) per x, derivando rispetto ad x e dividendo poi per x^{p-1} verrà:

$$p^3f + (3p^2+3p+1)xf' + (3p+3)x^2f'' + x^3f''' =$$
$$= p^3a_0 + (p+1)^3a_1x + \cdots + (p+n)^3a_nx^n + \cdots$$

Il procedimento indicato, applicato per q volte darà:

$$(4) \qquad p^qf + g_{q+1,2}xf' + g_{q+1,3}x^2f'' + \cdots + g_{q+1,q+1}x^qf^{(q)} =$$
$$= p^qa_0 + (p+1)^qa_1x + \cdots + (p+n)^qa_nx^n + \cdots$$

dove i coefficienti $g_{r,s}$ si possono via via determinare mediante la relazione ricorrente

$$(5) \qquad g_{r+1,s} = g_{r,s-1} + (p+s-1)\,g_{r,s}$$

e resta pertanto dimostrato che la somma della serie

$$p^qa_0 + (p+1)^qa_1x + \cdots + (p+n)^qa_nx^n + \cdots$$

è esprimibile mediante la f e le sue prime q derivate successive

Si noti che i coefficienti $g_{r,s}$ si possono disporre a formare il prospetto triangolare

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} 1 \\ p & g_{2,2} \\ p^2 & g_{3,2} & g_{3,3} \\ p^3 & g_{4,2} & g_{4,3} & g_{4,4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^{r-1} & g_{r,2} & g_{r,3} & g_{r,4} \cdots g_{r,s} \cdots g_{r,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

e si noti anche che per $p = 1$ essi assumono i valori numerici

$$(6')\quad \left\{\begin{array}{lllll} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & c_{r,2} & c_{r,3} & c_{r,4} & c_{r,5} \cdots c_{r,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

i quali sono studiati nella nota accennata in principio ed hanno una semplice relazione con le differenze successive di O^q.

2. Quando di una espressione analitica f, sviluppabile in serie di potenze entro un cerchio conveniente, si sappiano direttamente calcolare le successive derivate fino a quella di ordine q, allora applicando la relazione (4) si potranno avere le somme di altre serie di potenze dedotte dalla primitiva col moltiplicarne i termini per quelli delle progressioni aritmetiche

$$\begin{array}{llll} p & p+1 & p+2 & \ldots \\ p^2 & (p+1)^2 & (p+2)^2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^q & (p+1)^q & (p+2)^q & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

In ciò che segue mostrerò appunto alcuni esempi di tale fatto.

3. Si consideri in primo luogo

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

e si applichi l'identità (4) successivamente per $q = 1, 2, 3, 4, 5$ e per $p = 1$; si avranno così gli sviluppi:

$$(7)\qquad 2x - 4\frac{x^3}{3!} + 6\frac{x^5}{5!} - 8\frac{x^7}{7!} + \cdots = \text{sen}\, x + x\cos x$$

$$(8)\qquad 2^2 x - 4^2\frac{x^3}{3!} + 6^2\frac{x^5}{5!} - 8^2\frac{x^7}{7!} + \cdots =$$
$$= \text{sen}\, x + 3x\cos x - x^2\,\text{sen}\, x$$

$$(9)\qquad 2^3 x - 4^3\frac{x^3}{3!} + 6^3\frac{x^5}{5!} - 8^3\frac{x^7}{7!} + \cdots =$$
$$= \text{sen}\, x + 7x\cos x - 6x^2\,\text{sen}\, x - x^3\cos x$$

$$(10)\qquad 2^4 x - 4^4\frac{x^3}{3!} + 6^4\frac{x^5}{5!} - 8^4\frac{x^7}{7!} + \cdots =$$
$$= \text{sen}\, x + 15x\cos x - 25x^2\,\text{sen}\, x - 10x^3\cos x + x^4\,\text{sen}\, x$$

$$(11)\qquad 2^5 x - 4^5\frac{x^3}{3!} + 6^5\frac{x^5}{5!} - 8^5\frac{x^7}{7!} + \cdots =$$
$$= \text{sen}\, x + 31x\cos x - 90x^2\,\text{sen}\, x - 65x^3\cos x + 15x^4\,\text{sen}\, x + x^5\cos x$$

Più in generale, con riduzione dei termini simili in *sen* x e in *cos* x al secondo membro, si avrà:

$$(12)\quad 2^q x - 4^q\frac{x^3}{3!} + 6^q\frac{x^5}{5!} - 8^q\frac{x^7}{7!} + \cdots = M\,\text{sen}\, x + N\cos x$$

dove:

$$M = 1 - c_{q+1,3}\,x^2 + c_{q+1,5}\,x^4 - \cdots \pm \begin{cases} c_{q+1,q+1}\,x^q, & \text{se } q \text{ è pari;} \\ c_{q+1,q}\,x^{q-1}, & \text{se } q \text{ è dispari;} \end{cases}$$

$$N = c_{q+1,2}\,x - c_{q+1,4}\,x^3 + \cdots \pm \begin{cases} c_{q+1,q}\,x^{q-1}, & \text{se } q \text{ è pari;} \\ c_{q+1,q+1}\,x^q, & \text{se } q \text{ è dispari;} \end{cases}$$

essendo i coefficienti $c_{r,s}$ quelli stessi dello specchio (6').

4. Come altro esempio, dalla serie

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

per mezzo della (4) applicata per $q = 1, 2, 3, \cdots q$ e per $p = 1$ si avranno gli sviluppi seguenti:

$$(13) \quad 1 - 3\frac{x^2}{2!} + 5\frac{x^4}{4!} - 7\frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x - x \operatorname{sen} x$$

$$(14) \quad 1 - 3^2\frac{x^2}{2!} + 5^2\frac{x^4}{4!} - 7^2\frac{x^6}{6!} + \cdots = \\ = \cos x - 3x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x$$

$$(15) \quad 1 - 3^3\frac{x^2}{2!} + 5^3\frac{x^4}{4!} - 7^3\frac{x^6}{6!} + \cdots = \\ = \cos x - 7x \operatorname{sen} x - 6x^2 \cos x + x^3 \operatorname{sen} x$$

. . . .

$$(16) \quad 1 - 3^q\frac{x^2}{2!} + 5^q\frac{x^4}{4!} - 7^q\frac{x^6}{6!} + \cdots = M_1 \cos x + N_1 \operatorname{sen} x$$

dove è facile vedere, se si ricorda il significato di M ed N al N.° precedente, che $M_1 = M$ ed $N_1 = -N$.

5. Sommando e sottraendo membro a membro gli sviluppi (12) e (16) scaturiscono le serie seguenti:

$$(17) \quad 1 + 2^q x - 3^q\frac{x^2}{2!} - 4^q\frac{x^3}{3!} + 5^q\frac{x^4}{4!} + \cdots = \\ = (M - N) \operatorname{sen} x + (M + N) \cos x$$

$$(18) \quad 1 - 2^q x - 3^q\frac{x^2}{2!} + 4^q\frac{x^3}{3!} + 5^q\frac{x^4}{4!} - \cdots = \\ = -(M + N) \operatorname{sen} x + (M - N) \cos x$$

6. Nelle serie (12), (16) si supponga $x = 1$; ne risulteranno per M, N, M_1, N_1 valori interi e quindi si concluderà che *cia-*

scuna delle serie

$$2^q + \frac{4^q}{3!} + \frac{6^q}{5!} - \frac{8^q}{7!} - \cdots$$

$$1 - \frac{3^q}{2!} + \frac{5^q}{4!} - \frac{7^q}{6!} + \cdots$$

ha una somma uguale ad un certo numero di volte sen 1 *più un certo numero di volte* cos 1. — Analoga osservazione per le (17) e (18).

7. Nello stesso modo che per le serie esprimenti *sen* x e *cos* x, si può procedere per le serie

$$sh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

dalle quali si dedurrà che

$$2^q x + 4^q \frac{x^3}{3!} + 6^q \frac{x^5}{5!} + 8^q \frac{x^7}{7!} + \cdots = P\, sh\, x + Q\, ch\, x \tag{19}$$

$$1 + 3^q \frac{x^2}{2!} + 5^q \frac{x^4}{4!} + 7^q \frac{x^6}{6!} + \cdots = P_1\, ch\, x + Q_1\, sh\, x \tag{20}$$

dove si è posto brevemente

$$P = P_1 = 1 + c_{q+1,3}\, x^2 + c_{q+1,5}\, x^4 + \cdots + \\ + \begin{cases} c_{q+1,q+1}\, x^q, & \text{se } q \text{ è pari;} \\ c_{q+1,q}\, x^{q-1}, & \text{se } q \text{ è dispari;} \end{cases}$$

$$Q = Q_1 = c_{q+1,2}\, x + c_{q+1,4}\, x^3 + \cdots + \begin{cases} c_{q+1,q}\, x^{q-1}, & \text{se } q \text{ è pari;} \\ c_{q+1,q+1}\, x^q, & \text{se } q \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Sommando membro a membro le (19) e (20) si ha

$$1 + 2^q x + 3^q \frac{x^2}{2!} + 4^q \frac{x^3}{3!} + \cdots = (P + Q)\, e^x \tag{21}$$

dove $P+Q$ è un polinomio intero in x di grado q, a coefficienti interi.

Se dunque si suppone, come già si fece per le (12) e (16), $x=1$, $P+Q$ assumerà un valore intero, e quindi *la somma della serie*

$$1+2^q+\frac{3^q}{2!}+\frac{4^q}{3!}+\cdots$$

è uguale ad un certo numero intero di volte il numero e.

8. La serie numerica ora ottenuta è analoga alla

$$1+\frac{2^q}{2!}+\frac{3^q}{3!}+\frac{4^q}{4!}+\cdots$$

la quale pure ha una somma uguale ad un certo numero di volte il numero e [1].

Ma applicando l'identità (4) per un valore $p \neq 1$ alla serie esponenziale e supponendo poi $x=1$ si giungerà a questo risultato assai più generale: *la serie*

$$p^q+(p+1)^q+\frac{(p+2)^q}{2!}+\frac{(p+3)^q}{3!}+\cdots$$

è convergente per qualunque valore intero di p *e di* q *ed ha come somma un certo numero intero di volte il numero* e.

Difatti, per la (4) sarà:

$$(22)\qquad p^q+(p+1)^q\,x+\frac{(p+2)^q\,x^2}{2!}+\frac{(p+3)^q\,x^3}{3!}+\cdots=$$
$$=e^x\left(g_{q+1,1}+g_{q+1,2}\,x+g_{q+1,3}\,x^2+\cdots+g_{q+1,q+1}\,x^q\right)$$

dove i coefficienti $g_{r,s}$ (dello specchio (6)) sono essenzialmente interi, e quindi, per $x=1$:

$$(23)\qquad p^q+(p+1)^q+\frac{(p+2)^q}{2!}+\frac{(p+3)^q}{3!}+\cdots=$$
$$=e\left(g_{q+1,1}+g_{q+1,2}+g_{q+1,3}+\cdots+g_{q+1,q+1}\right)$$

come si doveva dimostrare.

---

(1) Cesàro: *Analisi algebrica*, pag. 466.

Per esempio

$$4^3 + 5^3 + \frac{6^3}{2!} + \frac{7^3}{3!} + \cdots = e(g_{4,1} + g_{4,2} + g_{4,3} + g_{4,4}).$$

Ora i coefficienti $g_{r,s}$ dello specchio (6) si debbono calcolare per $p = 4$, e tenendo conto della legge di ricorrenza (5); in tal modo le prime quattro linee dello specchio (6) divengono:

$$\begin{matrix} 1 & & & \\ 4 & 1 & & \\ 16 & 9 & 1 & \\ 64 & 61 & 15 & 1 \end{matrix}$$

e si conclude che

$$4^3 + 5^3 + \frac{6^3}{2!} + \frac{7^3}{3!} + \cdots = 141\, e. \tag{24}$$

9. — La formula (4) applicata alla serie binomiale

$$1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \cdots$$

ci assicura che anche *la serie*

$$p^q + (p+1)^q \binom{m}{1} x + (p+2)^q \binom{m}{2} x^2 + \cdots$$

è non soltanto convergente in tutti quei casi in cui lo sia la serie binomiale; ma ha altresì una somma che può essere calcolata in funzione di $(1 + x)^m$, *somma della serie binomiale, e delle sue prime* q *derivate*. Per esempio, per m qualunque ed $|x| < 1$ si ha, per $p = 1$ e $q = 1, 2$:

$$1 + 2\binom{m}{1} x + 3\binom{m}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^m + mx(1+x)^{m-1} \tag{25}$$

$$1 + 2^2\binom{m}{1} x + 3^2\binom{m}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^m + 3mx(1+x)^{m-1} + m(m-1)x^2(1+x)^{m-2} \tag{26}$$

. . . .

Se poi si suppone $m > o$, gli sviluppi precedenti si manterranno convergenti anche per $x = \pm 1$ e quindi risulterà:

$$(27) \quad 1 + 2\binom{m}{1} + 3\binom{m}{2} + \cdots = 2^m + m2^{m-1}$$

$$(28) \quad 1 - 2\binom{m}{1} + 3\binom{m}{2} - \cdots = 0$$

$$(29) \quad 1 + 2^2\binom{m}{1} + 3^2\binom{m}{2} + \cdots = 2^m + 3m2^{m-1} + m(m-1)2^{m-2}$$

$$(30) \quad 1 - 2^2\binom{m}{1} + 3^2\binom{m}{2} - \cdots = 0$$

. . . .

Queste formule per m non intero costituiscono una generalizzazione di note proprietà dei coefficienti binomiali, e sono analoghe, benchè più generali, alla serie considerata in CESÀRO, *Analisi algebrica*, pag. 277.

10. Dalla serie esponenziale

$$a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\log a)^3}{3!} + \cdots$$

si deduce per $p = 1$ e $q = 1, 2$:

$$(31) \quad 1 + 2x \log a + 3\frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + 4\frac{x^3 (\log a)^3}{3!} + \cdots = a^x (1 + x \log a)$$

$$(32) \quad 1 + 2^2 x \log a + 3^2 \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + 4^2 \frac{x^3 (\log a)^3}{3!} + \cdots = $$
$$= a^x (1 + 3x \log a + x^2 (\log a)^2)$$

. . . .

11. Si sa che per $|x| < 1$:

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

e si sa anche che:

$$D \log(1+x) = (1+x)^{-1} \; ; \; D^{(2)} \log(1+x) = -(1+x)^{-2} \; ; \cdots$$
$$D^{(n)} \log(1+x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n} \; ;$$

perciò la formula (4), per $p = 1$ e q generico, fornirà in questo caso:

$$(33) \qquad 2^q x - 3^q \frac{x^2}{2} + 4^q \frac{x^3}{3} - 5^q \frac{x^4}{4} + \cdots =$$

$$= \log(1+x) + c_{q+1,2}\, x(1+x)^{-1} - c_{q+1,3}\, x^2(1+x)^{-2} + \cdots \pm c_{q+1,q+1}\, x^q(1+x)^{-q}.$$

12. Come ultimo esempio, si consideri la serie ciclometrica

$$y = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

convergente per $|x| \leq 1$; poichè di $y = \operatorname{arctg} x$ si sa esprimere la derivata di ordine qualunque ed è [1]

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)!\, \cos^n y \operatorname{sen} n\left(y + \frac{\pi}{2}\right),$$

così mediante la (4) si potrà trovare la somma della serie:

$$(34) \qquad 2^q x - 4^q \frac{x^3}{3} + 6^q \frac{x^5}{5} - \cdots$$

e più generalmente della:

$$(35) \qquad p^q x - (p+2)^q \frac{x^3}{3} + (p+4)^q \frac{x^5}{5} - \cdots$$

intendendo sempre che sia $|x| \leq 1$.

Cagliari, luglio 1911

---

[1] V. p. es. PASCAL: *Esercizi e note critiche*, Milano, pag. 103.

Sulla teoria delle proporzioni fra grandezze

ROBERTO VOLPI (Catanzaro)

Fra le teorie pertinenti alla geometria elementare quella delle proporzioni fra grandezze offre delle speciali difficoltà scientifiche e didattiche e forse non si può dire ancora esaurientemente sistemata. Senza occuparmi quì direttamente del lato scientifico (per cui lo HILBERT nei notissimi « Gründlagen » aprì la via ad un profondo esame del soggetto in relazione ai postulati) mi trattengo in questo articolo specialmente sulla parte didattica e dopo un brevissimo cenno dei metodi in uso, ne espongo uno (1) che mi sembra degno di nota.

Dopo Légendre venne in voga l'uso di trattare la teoria delle proporzioni fra grandezze come conseguenza ed applicazione della teoria delle proporzioni fra numeri, riferendosi alla corrispondenza biunivoca che si può porre fra queste e quelle. Un tale metodo, assai in uso nei trattati francesi ed anche tedeschi e in molti testi italiani per le scuole normali, non è difficilmente accessibile agli alunni, ma la sua semplicità è più apparente che sostanziale (come notano opportunamente il Sannia e il D'Ovidio nella prefazione alla sesta edizione della loro Geome-

(1) Mentre era in corso di stampa questo articolo, son venuto a conoscenza di un lavoro del chiar.mo Prof. B. LEVI « *Teoria geometrica delle proporzioni fra segmenti,* etc. » *Supplemento al Periodico di Matematica*, Livorno, 1903, il quale ha grande analogia col presente. Vuol dire che resterà a me poco più del modesto merito di aver insistito ancora su di un argomento di indiscutibile interesse didattico.

tria) e in ogni modo introduce nella geometria la nozione completa di numero reale, portando così un elemento che può rimanere estraneo e che richiede uno sviluppo relativamente ampio. A questo tipo di trattazione si avvicina quello originale del Veronese, esposto nelle prime edizioni degli Elementi di geometria, per l'abbondante uso che vi si fa dell'elemento analitico. Restano i metodi derivati da qnello classico di Euclide, come quello « del multiplo » usato per esempio dal De Paolis, dal Bettazzi, da Sannia e D' Ovidio e quello del sottomultiplo preferito dal Faifofer. Questi che su per giù si equivalgono (potendosi concedere a quello dell'unico multiplo una preferenza sull'euclideo, per la possibilità di una trattazione più semplice, che forse si può ridurre a maggior semplicità col metodo del sotto multiplo, quando si voglia prescindere dall'inconveniente, allora manifesto, di dover postulare la divisibilità in parti uguali delle grandezze, non essendo conveniente nella scuola dedurla, unitamente al postulato di Archimede, dal postulato della continuità) hanno il vantaggio di evitare la nozione di grandezze incommensurabili, ma pur essi fanno uso abbondante ed *essenziale* di elemento analitico ed offrono dimostrazioni difficili da essere comprese e sopratutto da essere ben ritenute dall'alunno

Il metodo quì proposto riesce puramente geometrico in tutte le parti essenziali, e quindi introduce l'elemento analitico soltanto al momento in cui occorre passare alla teoria della misura; si fonda sui postulati di associazione, distribuzione, congruenza, su quello della parallela ed evita, nella parte essenziale, quello di Archimede e la nozione di equivalenza, la quale, come è noto, si potrebbe far intervenire, in modo poco naturale, per stabilire geometricamente la teoria delle proporzioni fra segmenti. Esso è correlativo del metodo di Légéndre: come quello deduce le proprietà delle proporzioni fra grandezze dalle proprietà delle proporzioni fra numeri, questo le deduce dalle proprietà delle proporzioni fra segmenti. Le proporzioni fra segmenti, come noterà il Lettore, vengono trattate in modo facilissimo e si usufruisce del fatto che le proprietà relative sono, diremo così, incluse in quel gruppo di proposizioni che riguardano il capitolo *delle linee proporzionali.*

Il metodo quì proposto ha poi, a nostro avviso, un altro vantaggio didattico e pedagogico: quello di applicare la nozione di proporzione alle diverse specie di grandezze geometriche

man mano che vengono introdotte, seguendo un criterio sistematico che ora sembra preferito dai trattatisti, come ne hanno dato saggio notevolissimo l'Enriques e l'Amaldi ed anche il Veronese nelle loro Geometrie; criterio che consiste appunto nel definire, applicare e concretare i concetti generali, come di uguaglianza, equivalenza, somiglianza, ai diversi simboli geometrici volta per volta che questi si presentano nel corso della trattazione.

Proporzioni fra segmenti.

Premettiamo i seguenti lemmi, le cui dimostrazioni si trovano in ogni trattato di geometria elementare e che del resto sono molto ovvie.

1. — *Se un fascio di parallele è tagliato da due trasversali, a segmenti di una trasversale, intercettati dalle parallele, che siano uguali fra loro, corrispondono, sull'altra trasversale, segmenti uguali fra loro: a segmenti disuguali corrispondono segmenti disuguali nello stesso senso.* Reciprocamente: *Se a segmenti uguali di una retta corrispondono rispettivamente segmenti uguali di un'altra, in modo che gli estremi omologhi delle due serie di segmenti si succedano nello stesso ordine, e se le congiungenti gli estremi omologhi, meno una, sono parallele fra loro, anche la rimanente congiungente è parallela alle altre.*

2. — *Se due trg.* (triangoli) *hanno i lati rispettivamente paralleli, le congiungenti i vertici omologhi passano per uno stesso punto o sono parallele fra loro.* Reciprocamente: *Se le congiungenti i vertici di un trg. coi rispettivi vertici di un'altra passano per uno stesso punto e due lati del primo sono paralleli agli omologhi del secondo, anche il terzo lato del primo è parallelo al terzo lato del secondo.*

3. — *Se da un punto* O *hanno origine due semirette e sulla prima si hanno i segmenti adiacenti* OA, AB *rispettivamente uguali ai segmenti adiacenti* OA', OB' *della seconda, le rette* AA' *e* BB' *sono parallele fra loro.* Inoltre: *Se, poste le condizioni precedenti, da* O *parte un'altra semiretta su cui si trovino due punti* M, N

tali che la MA' *sia parallela alla* NB', *sarà anche la* MA *parallela alla* MB (n. 2°).

4. — Definizione. — Quattro segmenti α, β, γ, δ si dicono *in proporzione* nell'ordine dato, se, prendendo su due semirette qualunque, uscenti da O, i segmenti adiacenti $OA = \alpha$, $AB = \beta$, $OC = \gamma$, $CD = \delta$, la AC riesca parallela alla BD.

Osservazione. — Per il n. 3, variando l'angolo delle semirette, le AC e BD si conservano parallele.

5. — Corollario. — *Si ha sempre:* $\alpha : \alpha = \beta : \beta$ (n. 1).

6. — Corollario. — *Si ha sempre:* $\alpha : \beta = \alpha : \beta$ (n. 3),

7. — Corollario. — *Se* $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, *si ha* $\gamma : \delta = \alpha : \beta$.

8. — Corollario. — *Se* $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ e $\gamma : \delta = \varepsilon : \epsilon$, *allora* $\alpha : \beta = \varepsilon : \epsilon$ (n. 2).

9. — Teorema. — *Se un fascio di parallele è tagliato da due trasversali, due segmenti della prima trasversale, intercettati dalle parallele, stanno fra loro come gli omologhi della seconda.*

Dimostrazione. — Se le trasversali sono parallele fra loro il teorema discende dal n. 6 In caso diverso, a partire dal punto comune alle due trasversali, si portino su ciascuna delle medesime due segmenti adiacenti, uguali rispettivamente ai due considerati sulla trasversale stessa. Ne verranno quattro segmenti che, per la prima parte del n. 1, si trovano nelle condizioni richieste dalla definizione del n. 4.

10. — Corollario. — *Se* $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, *allora* $\beta : \alpha = \delta : \gamma$.

11. — Corollari. — *Se* $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, *allora* $\alpha + \beta : \beta = \gamma + \delta : \delta$, $|\alpha - \beta| : \beta = |\gamma - \delta| : \delta$, $\alpha + \beta : |\alpha - \beta| = \gamma + \delta : |\gamma - \delta|$ *Se* $\alpha : \beta = \alpha' : \beta' = \alpha'' : \beta'' = \cdots\cdot$ *allora* $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \cdots\cdot : \alpha = \beta + \beta' + \beta'' + \cdots : \beta$.

12. — Teorema. — *Esiste un solo segmento quarto proporzionale dopo tre dati.* Più in generale: *Il problema di trovare un dato termine di una proporzione quando siano noti gli altri tre ammette sempre una soluzione ed una sola.*

Dimostrazione. — Una costruzione per ottenere il quarto proporzionale risulta subito dalla definizione del n 4; l'unicità del quarto proporzionale è conseguenza immediata del postulato della parallela. Se il termine da costruire è il primo, affinchè si abbia $x : \beta = \gamma : \delta$, per i n.[i] 7, 10, occorre e basta che si abbia $\delta : \gamma = \beta : x$, alla quale relazione soddisfa un solo segmento x. Analogamente se x, fra i termini della proporzione, deve occupare il secondo o terzo posto.

13. — Corollario. — *Se due proporzioni hanno uguali, ordinatamente, tre termini, avranno uguali anche i termini rimanenti.*

14. — Teorema. — *Se due trg. hanno gli angoli rispettivamente uguali, hanno i lati proporzionali (e reciprocamente). Se hanno due coppie di lati proporzionali, comprendenti angoli uguali, hanno tutti gli angoli rispettivamente uguali e tutti i lati proporzionali.*

Le singole dimostrazioni si deducono nel modo solito dai n.[i] 9, 13.

15. — Teorema. — *Se da un punto* O *del piano di un circolo si conducono due rette che incontrino il circolo rispettivamente in* A, B e C, D, *si ha:* OA : OC = OD : OB. Reciprocamente: *Se sopra due rette si hanno rispettivamente i punti* A, B *e* C, D *che diano* OA : OC = OD : OB, *i punti* A, B, C, D *sono su di un medesimo circolo.*

La dimostrazione si stabilisce nel solito modo, basandosi sul teorema del n. 14 e sul corollario del n. 13.

16. — Corollario. — *Se* $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, *si ha:* $\alpha : \gamma = \beta : \delta$ e $\delta : \beta = \gamma : \alpha$.

17. — Corollario. — *Se* $\alpha : \beta = \alpha' : \beta' = \alpha'' : \beta'' = \cdots$, *si ha:* $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \cdots : \beta + \beta' + \beta'' + = \alpha : \beta$.

Dimostrazione. — Basta permutare i medi nella ultima proporzione del n. 11.

18. — Teorema. — *Se* $\alpha : \alpha' = \beta : \beta' = \gamma : \gamma' = \delta : \delta'$ *e se* $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ *anche* $\alpha' : \beta' = \gamma' : \delta'$.

Dimostrazione. — Per il n. 16 $\alpha : \beta = \alpha' : \beta'$, $\gamma : \delta = \gamma' : \delta'$ e quindi per il n. 8, $\alpha' : \beta' = \gamma' : \delta'$.

19. — TEOREMA. — *Se* $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ *sarà,* $\alpha \gtreqless \beta$, *secondochè sia* $\gamma \gtreqless \delta'$, *e sarà* $\alpha \gtreqless \gamma$ *secondochè sia:* $\beta \gtreqless \delta$.

DIMOSTRAZIONE. — Per la prima parte basta riferirsi al n. 1. Per la seconda analogamente, avendosi che $\alpha : \gamma = \beta : \delta$.

20. — TEOREMA. — *Se* $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ *e* $\alpha' : \beta = \gamma : \delta'$, si *avrà:* $\alpha : \alpha' = \delta' : \delta$. — Similmente: *Se* $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ *e* $\alpha : \beta' = \gamma' : \delta$, *si avrà:* $\beta : \beta' = \gamma' : \gamma$.

DIMOSTRAZIONE. — Dei due segmenti β e γ sia uno, per esempio γ, il maggiore fra i sei α, δ, β, γ, α', δ'. Per il n. 19 sarà allora β il minore dei sei. Difatti se è $\delta < \gamma$, sarà $\beta < \alpha$; e se è $\alpha < \gamma$, sarà $\beta < \delta$, Similmente si prova che β è minore di α' e δ'. Supponiamo invece che il maggiore dei sei segmenti considerati sia uno dei quattro α, α', δ, δ', per es. δ. Allora, siccome $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, ragionando come sopra, si ricava che α è il minore fra i quattro α, β, γ, δ, Inoltre uno almeno dei due α' e δ' deve essere compreso fra α e δ. Difatti se α' è minore di α, e quindi di β e γ, avendosi $\alpha' : \beta = \gamma : \delta'$, sarà $\delta' > \gamma$, epperò $\delta' > \alpha$. Ora si immagini un circolo (C), le cui corde AD, BC segandosi in O diano $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, $OD = \delta$. Se δ è il maggiore dei sei segmenti detti, a partire da O e da parte opposta si portino i segmenti $OM = ON = \delta'$, essendo $\gamma < \delta' < \beta$: uno dei punti M ed N cadrà entro (C) e l'altro fuori e quindi il circolo di centro O e raggio δ', per un postulato noto, incontrerà (C) in due punti distinti. Se P è uno di questi e se la OP incontra ulteriormente (C) in Q, sarà $OP = \delta'$ e, per i n.i 15 e 13, $OQ = \alpha'$. Allora, essendo α, α', δ', δ tratti di corde di uno stesso circolo, per il n. 15 si avrà: $\alpha : \alpha' = \delta' : \delta$. Osserviamo poi che, nel caso di δ' ($o\,\alpha'$) uguale al maggiore dei quatto α, β, γ, δ, si ha α' ($o\,\delta'$) uguale ad α o a β e che il teorema sussiste allora manifestamente.

21. — TEOREMA. — *In una proporzione ai due primi termini o ai due ultimi o agli antecedenti od ai conseguenti si possono sostituire loro equimultipli di equisummultipli.*

DIMOSTRAZIONE. — Se $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, avendosi: $\alpha : \beta = \alpha : \beta = \alpha : \beta = \cdots$ (m volte), per il n. 17 si ha: $m\alpha : m\beta = \alpha : \beta$ e per

il n. 8: $m\alpha : m\beta = \gamma : \delta$ e quindi:

$$m\frac{A}{n} : m\frac{B}{n} = \frac{A}{n} : \frac{B}{n} = n\frac{A}{n} : n\frac{B}{n} = A : B = C : D.$$

Da questo caso, per i n.i 7, 16 si traggono gli altri.

22. — Teorema. — *Se $\alpha : \beta : \gamma : \delta$, misurando gli antecedenti con equisummultipli dei conseguenti si ottengono quozienti uguali; misurando equimultipli degli antecedenti coi conseguenti si ottengono quozienti uguali; equimultipli degli antecedeuti sono simultaneamcnte maggiori, uguali o minori rispetto ad equimultipli dei conseguenti. Valgono pure le proposizioni reciproche.*

Basta riferirsi alle solite dimostrazioni del teorema di Talete, che si fanno nei comuni trattati a seconda delle varie definizioni di proporzione da cui si parte. I reciproci vengono dalla unicità della parallela.

Proporzioni fra grandezze.

Sia G un insieme di enti (*grandezze*) A, B, C,...., per il quale:

a) Ad ogni elemento di G corrisponda un unico segmento;

b) Si riguardino come uguali (equivalenti) due enti a cui corrisponda lo stesso segmento;

c) Di due enti si riguardi come maggiore quello che corrisponde a segmento maggiore;

d) Ad ogni segmento corrisponda almeno un elemento di G;

e) Si dica somma di $A, B, C, D, \cdots$ l'elemento di G corrisponde al segmento $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots\cdot$, essendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$ i segmenti che corrispondono rispettivamente ad $A, B, C, D, \cdots\cdot$

[Allora si può dimostrare molto facilmente che per gli enti di G valgono tutte le proprietà delle grandezze intuitive, che si riferiscono all'uguaglianza e disuguaglianza alla somma e alla sottrazione ai multipli e sottomultipli (e che sono ben note nel caso dei segmenti e dei numeri assoluti), quando però si prescinda dalle proprietà comutativa ed associativa della somma].

Definizione. — *Quatto elementi di* G *si dicono in proporzione* (in senso lato e formale) *quando lo sono i rispettivi segmenti.*

Segue immediatamente che *per le propozioni fra quattro gran-*

dezze di un medesimo insieme G (omogenee) *valgono tutte le proprietà delle proporzioni fra segmenti.*

[Qui occorre un'osservazione importante: La definizione data di proporzione fra grandezze può non corrispondere alla nozione intuitiva e pratica di proporzionalità. Per esempio, se gli elementi di *G* sono gli archi di un circolo di raggio fisso, e per segmento corrispondente di un arco minore della semicirconferenza si prende la rispettiva corda, mentre se l'arco non è minore del semicircolo si prende per segmento corrispondente la somma di tanti diametri quanti sono i semicircoli contenuti nell'arco, più la corda dell'arco rimanente, quattro archi che siano in proporzione nel senso sopra definito non lo sono nel senso pratico. Questo inconveniente, del resto, si presenta con qualunque altra definizione di proporzione, poichè esso non è inerente alla qualità della definizione di proporzione, ma al modo di definire la somma degli enti di *G* o al modo di porre la corrispondenza fra essi ed i segmenti].

Definizione. — *Se* A *e* B *sono due grandezze di* G *ed* A' *e* B' *di* G' *si dirà che* A, B, A', B' *sono in proporzione se lo sono i corrispondenti segmenti.*

Segue pure immediatamente che per tali proporzioni valgono i soliti teoremi di proporzioni fra segmenti, quando non si combinino, per somma e sottrazione, elementi di *G* con elementi di *G'*.

Per le diverse speci di grandezze della geometria elementare, occorre stabilire la corrispondenza coi segmenti:

Archi di circolo. — Si fa corrispondere ad ogni arco il segmento che dà l'arco rettificato [1].

Angoli e diedri. — Si premette il teorema che « *due archi della medesima ampiezza stanno come i rispettivi raggi* » (che si dimostra in modo affatto analogo a quello tenuto per esempio dal Faifofer per il teorema che i perimetri di due circoli stanno come i rispettivi raggi). Allora, preso un circolo di raggio fisso ed avente il centro nel vertice dell'angolo si prende per segmento corrispondente all'angolo quello che corrisponde all'arco su cui

[1] Lo stesso dicasi di ogni altro arco di curva, soddisfacente alle note condizioni dello Scheffer o del Jordan, per essere rettificato.

insiste l'angolo stesso. Per il teorema premesso, la proporzionalità fra angoli sarà indipendente dalla scelta del circolo ausiliario. Per i diedri si prendono i segmenti corrispondenti alle loro sezioni normali.

Superfici. — Se si tratta di rettangoli di uguale altezza, per ogni rettangolo si assumerà come segmento corrispondente la propria base. Per poligoni (piani), fissato un segmento α, si trasformerà il poligono in rettangolo di altezza α e si prenderà, per segmento corrispondente al poligono, la base del rettangolo. La scelta di α non cambia il senso della proporzionalità fra poligoni per l'ovvio teorema, da premettersi, che « *se* A *ed* A′ *sono rettangoli di uguale attezza, equivalenti rispettivamente ai rettangoli* B *e* B′, *che siano pure di uguale altezza, le basi dei due primi rettangali sono proporzionali alle basi dei due ultimi* », (dedotto per esempio dal teorema sulla proporzionalità dei lati di rettangoli equivalenti). Per le altre superfici considerate nella geometria elementare cioè cerchi, settori circolari, superfici laterali di cilindri o di coni retti circolari, superfici di sfere, di calotte o zone sferiche, di fusi cilindrici, conici o sferici e loro combinazioni per somma o sottrazione, come corone circolari, superfici laterali di tronchi di cono, triangoli sferici etc, etc., si ricorre ai metodi dei comuni trattati per equipararli a superfici poligoniali, considerando poi i segmenti relativi ai corrispondenti poligoni (1).

Solidi. — Si procede in modo del tutto analogo al caso delle superfici, partendo dai parallelepipedi ortogonali che hanno due spigoli rispettivamente uguali e prendendo il rimanente spigolo come segmento corrispondente del parallelepipedo.

Finiamo col notare che per settori circolari, fusi e spicchi cilindrici, conici e sferici si può stabilire la proporzionalità seguendo, come al solito, uno dei criteri del teorema n. 22, esteso al caso di settori o fusi o spicchi e corrispondenti archi rettificati, ma che si potrebbe anche per essi assumere direttamente i corrispondenti poligoni piani, considerando i limiti delle poligonali iscritte e circoscritte o delle parti di superfici laterali di prismi o di piramidi iscritte o circoscritte etc. etc.

---

(1) Lo stesso dicasi di tutte le altre superfici considerate nella geometria che sono ragguagliabili a poligoni con procedimenti puramente geometrici, anche nel caso più ostico di superfici a punti iperbolici.

Atti della Sottocommissione Italiana

della

Commissione internazionale dell' insegnamento matematico

Nel resoconto della riunione tenuta a Milano dalla Commissione internazionale dell' insegnamento matematico, è detto quanto si riferisce allo stato dei lavori della Sottocommissione italiana. Quì, col cortese consenso dei Delegati italiani, riproduciamo le Relazioni sull'insegnamento delle matematiche nelle scuole classiche e nelle scuole ed istituti tecnici, riservandoci di pubblicare, la prossima volta, le altre sull' insegnamento delle matematiche nelle Scuole primarie e popolari, e nelle Scuole normali.

La maggior diffusione possibile di queste Relazioni, che già comparvero anche sul *Bollettino dell'Associazione Mathesis*, susciterà, — ne abbiamo fiducia — un largo dibattito sugli studi a cui attendono i cultori della matematica di tutto il mondo civile. Un' ampia discussione varrà a precisare meglio di quali forze dispongano le varie correnti che si contendono il campo nel movimento per le riforme dell' insegnamento matematico. E se l' appello non sarà stato rivolto invano, le discussioni svoltesi sulle Riviste, saranno la migliore preparazione desiderabile pel Congresso che molto probabilmente sarà tenuto dalla associazione « Mathesis » durante le prossime ferie pasquali.

La Direzione

L'insegnamento della matematica nelle Scuole classiche

I.

I successivi programmi dal 1867 al 1910

RELAZIONE

di U. SCARPIS, prof. nel R. Liceo Minghetti di Bologna

1) Ove si ponga mente alla storia del nostro risorgimento, si immagina subito per quale lunga trafila di parziali rivolgimenti e successivi adattamenti, abbiano dovuto passare le nostre Istituzioni scolastiche prima di raggiungere un primo assetto generale.

Sarebbe cosa difficile lo stendere una cronaca minuta delle innumerevoli innovazioni e modificazioni a cui dovettero sottostare le nostre Leggi scolastiche man mano che l'Italia veniva conquistando la sua unità; specialmente in causa del fatto, che le notizie in proposito si trovano, al di là da una certa epoca, inabissate nei poderosi volumi della *Gazzetta ufficiale*, sprovvisti di indice analitico e che bisogna sfogliare pagina a pagina. Ma anche se tale cronaca potesse facilmente attuarsi, non credo che se ne potrebbe trar vantaggio; e ritengo quindi bastevole allo scopo il cominciare dal '67 nel quale anno si pubblicarono per la prima volta programmi e regolamenti per tutte le scuole e per tutte le materie di insegnamento.

I programmi del 24 ottobre 1867 per quanto concerne l'insegnamento della Matematica nelle scuole classiche, si rivelano subito come frutto di menti chiare e profonde; e s'indovina di leggeri che autori ne furono quelli stessi che pubblicarono gli Elementi d'Euclide, vale dire il Betti ed il Brioschi.

Lo studio della Matematica s'inizia nel V corso ginnasiale a cui viene assegnata la trattazione del primo libro di Euclide e

dell'Aritmetica razionale degli interi e delle frazioni, con un non lieve orario di cinque ore settimanali.

Nel I corso liceale si continua lo studio della Geometria col II e III libro d'Euclide, si completa l'Aritmetica razionale con la teoria della radice quadrata e dei numeri incommensurabili, e si inizia lo studio dell'Algebra portandolo fino al calcolo dei radicali e degli esponenti frazionari.

Pel II corso vengono prescritti il IV, V, VI, XI, XII libro di Euclide, più la teoria della misura; e, per quanto concerne l'Algebra, la teoria delle proporzioni, l'equazioni e i sistemi di I e II grado ad una e più incognite, le progressioni, la potenza con esponente irrazionale e di più i primi elementi di trigonometria.

L'orario del I corso è di 6 ore settimanali mentre quello del II sale a 7 ore e mezzo.

L'insegnamento della Matematica termina nel II corso; ciò però non toglie che i candidati alla Licenza, pubblici o privatisti senza distinzione alcuna, debbano sottostare ad una prova scritta e, probabilmente, ad una prova orale quale riassunto della materia studiata negli anni precedenti.

2) Se la distribuzione della materia nel corso classico secondo i programmi del '67 può sembrare ai nostri giorni piuttosto strana e poco opportuna, d'altra parte l'istruzioni che accompagnano i programmi stessi conservano intera la loro freschezza. Così, ad esempio, vi si dice esplicitamente contro un pregiudizio che non ha mancato di produrre dei danni che « la Matematica non deve considerarsi come un complesso di cognizioni *utili in sè perchè applicabili ai bisogni della vita*, ma principalmente come un mezzo di coltura intellettuale, come una ginnastica del pensiero diretta a svolgere le facoltà del raziocinio ed aiutare quel sano criterio che serve a distinguere il vero da ciò che ne ha solo l'apparenza ».

Con molta ragionevolezza si raccomanda che la materia sia tanto lontana da riempire l'orario, da concedere al professore il tempo necessario per compiere molti esercizii.

Viene poi imposto più o meno esplicitamente di ritornare, seguendo l'esempio inglese, ad Euclide, raccomandando ai docenti « di non intorbidare la purezza della Geometria greca trasformando i teoremi geometrici in formule algebriche ».

3) La strana distribuzione dell'orario nei programmi del '67 per cui l'insegnamento matematico veniva stipato in tre succes-

sivi degli 8 corsi classici, non poteva non produrre serii inconvenienti: e già nel '69 si danno consigli ai professori per ovviare alla mancanza d'insegnamento nel III corso invitandoli ad impartire tratto tratto delle ore straordinarie di lezione ai licenziandi con lo scopo principalmente di tenerli esercitati nelle teorie apprese.

Nel 1870 si muta radicalmente l'orario, assegnando un'ora settimanale di Aritmetica pratica in ciascuno dei tre corsi del ginnasio inferiore; 3 ore settimanali ai due del ginnasio superiore per l'Aritmetica razionale; mentre nel liceo se ne fissano 6 per il I e II corso, concedendo un'ora e mezza di esercitazioni nel III. Pur mantenendo in vigore la prescrizione dell'uso dei primi 6 libri di Euclide, si lascia facoltà per la stereometria di seguire un autore moderno.

4) Tolta una inconcludente modificazione d'orario nel '74, per parecchi anni non si ha notizia di mutamenti importanti per quanto concerne l'insegnamento della Matematica nelle scuole classiche.

A cominciare dalla I ginnasiale fino alla III liceale rimane sempre obbligatorio indistintamente per tutti l'esame di Matematica con doppia prova orale e scritta, e la scelta del tema per quest'ultima è lasciata al professore per tutti gli esami di promozione, mentre viene fatta dal Ministero dell'istruzione per la licenza liceale.

Osserviamo subito che questo tema il quale veniva giù dal l'alto, era considerato da tutti gli alunni ed anche da insegnanti provetti, come una spada di Damocle sospesa sul loro capo e non del tutto senza ragione.

Ed in vero non doveva esser cosa agevole per il docente di un istituto classico dove gli studi letterarii ed umanistici hanno il sopravvento, tenere esercitati in pari grado i giovani sia nella risoluzione di questioni di pura Geometria, come di Algebra.

Si aggiunga che, dato l'indirizzo strettamente teorico dell'insegnamento dell'Aritmetica del ginnasio superiore, i giovani entravano poi al liceo ben poco addestrati nelle regole fondamentali del calcolo specialmente delle frazioni, la qual deficienza costituiva un noiosissimo ostacolo al rapido e sicuro possesso dell'algoritmo Algebrico.

Mentre gl'insegnanti stretti tra due fuochi, cioè gli alunni da una parte e la Giunta superiore di controllo dall'altra, si studia-

vano alla meglio di salvare capra e cavoli; i giovani, specialmente i candidati privatisti, poco disposti a sottomettersi a un duro lavoro di preparazione, seguendo, com'è naturale, la legge del minimo mezzo, ricorrevano a tutte le possibili astuzie per giungere a superare il paventato ostacolo!

Tuttavia in quei tempi il principio di autorità non era scosso come ai giorni nostri, regnava nel corpo insegnante una ben'intesa disciplina e le cose procedettero abbastanza regolarmente fino al 1878.

In quest'anno, nella sessione di luglio, venne assegnato il seguente tema: Trovare la relazione che deve esistere tra p, q, p,' q' perchè le due equazioni

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 + p'x + q' = 0$$

abbiano una radice in comune ».

Sia che una certa indeterminatezza nell'enunciato abbia impedito ai giovani di mettersi subito nel vero punto di luce per affrontare la questione, sia che in quell'anno accidentalmente non fossero stati esercitati nella trattazione di questioni affini, il fatto si è che nella sessione di luglio si ebbe alla licenza liceale una vera *débacle* ed in parecchie sedi non uno dei candidati potè salvarsi

Se agl'insegnanti fosse stata concessa maggior libertà di giudizio, probabilmente il disastro non sarebbe stato così generale. Ed in vero se la risoluzione completa di un un problema è titolo di onore, non di meno anche un tentativo, benchè non riuscito, può alle volte esser indizio di capacità e di conoscenza della materia; ma c'era da far i conti con la Commissione centrale incaricata della revisione dei lavori che avrebbe potuto ascrivere a peccaminosa debolezza una qualsiasi indulgente larghezza di giudizio, per cui probabilmente ben pochi ebbero il coraggio di sfidare i rimproveri di un così alto e onnipossente consesso.

5) La cosa non poteva passar inosservata: se ne occupò la stampa, se n'ebbe un'eco in Parlamento e nell'aprile del '79 Sua Eccellenza il Ministro Coppino preoccupato dei poco buoni risultati della prova scritta di Matematica, manifesta l'intenzione di affidare ad apposita Commissione l'incarico di presentare definitive proposte atte ad ovviare agl'inconvenienti verificatisi nel

passato senza però « nulla togliere all'importanza che la Matematica deve avere nell'insegnamento liceale ».

Caduto il Ministro Coppino e succedutogli al potere l'On. Baccelli, comincia il periodo in cui la Matematica nelle scuole classiche va man mano sempre più perdendo d'importanza.

Nel 1881 il Ministro Baccelli compie una riforma radicale nell'insegnamento della Matematica, introducendo lo studio della Geometria intuitiva ed il disegno geometrico nel ginnasio inferiore, assegnando al superiore la sola Aritmetica pratica ed infine restringendo i limiti dei precedenti programmi del liceo in modo da potervi introdurre nel primo corso lo studio dell'Aritmetica razionale senza per questo ampliare l'orario che viene modificato come segue: due ore settimanali per ciascuna classe del gianasio inferiore, un'ora settimanale a ciascuna del superiore, 5 ore al I corso liceale, 4 al II e 3 al III.

Viene poi soppressa la prova scritta in tutti gli esami di promozione riservandola alla sola licenza liceale, ma con queste innovazioni che il tema non verrà più dal Ministero, ma sarà *improvvisato* dal professore pochi minuti prima della seduta di esame, al cospetto dell'intera Commissione prendendo lo spunto dalla pagina di un libro aperto a caso.

Anche questo metodo per l'assegnazione del compito ispirato ad un sentimento di diffidenza non sempre giustificato, non poteva dare buoni frutti.

Infatti nella relazione della Giunta superiore per la revisione dei lavori scritti si legge che « i temi assegnati furono o troppo facili, quand'anche non si ridussero ad una semplice ripetizione scritta di qualche proposizione del testo e qualche volta *errati* per la fretta della composizione ».

Le relazioni analoghe per gli anni successivi non sono improntate a minor pessimismo. A proposito degli esami del 1883 vi si dice che « la Commissione è venuta nella conclusione che l'insegnamento della Matematica è appena sufficiente in 34 licei insufficientissimo in 41, ed in molti altri è tale da non potergli attribuire alcun valore scientifico ».

Di nuovo si lamenta l'inopportunità del sistema in vigore per la scelta del compito.

Nella relazione intorno agli esami dell '84 si nota un qualche leggero miglioramento sugli anni precedenti; ma dopo d'aver di-

chiarato che il profitto fu buono in 16 licei, mediocre in 50 e cattivo in tutti gli altri, si osserva come queste cifre dimostrino quanto rimanga ancora a farsi perchè l'insegnamento della Matematica abbia valore scientifico nelle nostre scuole classiche. La sotto Commissione raccomanda poi agl' insegnanti la frequenza degli esercizii che è il metodo più efficace per addestrare gli alunni nella soluzione dei problemi e per convincerli dell'utilità pratica di questo studio che dai più si crede a torto « *poco meno di un perditempo* ».

6) Nel 1884 viene alla luce un nuovo regolamento in cui si toglie l'assoluta obbligatorietà della prova di Matematica, lasciando al Ministero l'arbitrio di scegliere anno per anno tra una prova scritta di Matematica, Fisica od altra materia scientifica, e ciò per saggiare l'efficacia dell' insegnamento scientifico. Si modificano pure gli orarii prescrivendo due ore settimanali per ciascuna classe del ginnasio inferiore, tre pel ginnasio superiore e rispettivamente 4, 3, 4 ore al liceo.

Nel 1885 vi fu la prova di Matematica e dalla successiva relazione si deduce che in quest'anno i risultati furono « *tutt' altro che buoni* » e lo si spiega col fatto che i giovani nell' incertezza di dover sottostare ad una prova di Matematica o di Fisica, finirono molto probabilmente col non studiare a fondo nè l'una nè l'altra di tali discipline.

La sotto Commissione fu poi unanime nell' esortare S. E. il Ministro a mantenere l' esperimento scritto di Matematica, senza di che « l' insegnamento di tale materia nei licei perderebbe ogni importanza ».

Nel 1886 e nel 1887 il Ministero scelse a volte la Matematica a volte la Fisica ma le relazioni su questi esami nulla presentano di notevole e vi si ripetono i soliti lamenti delle precedenti.

7) Nel 1888 il Ministero modificando radicalmente l'art. 18 del regolamento per la licenza liceale, concede facoltà ai candidati di optare tra una prova scritta di Greco ed una di Matematica od altra materia scientifica; e di più vien fatta qualche leggera limitazione nei programmi, mentre l'orario viene ridotto a 2 ore settimanali per ciascuna classe del ginnasio indistintamente e 3 per il liceo.

Nella relazione sugli esami dell'88 si legge che « su qualche migliaio di candidati solo 436 optarono per la prova di Matematica ed i risultati ne furono complessivamente buoni ».

Si lamenta però la scarsezza di esercitazioni che viene dimostrata dai difetti di esposizione, e la Commissione torna a dichiarare che ritiene necessaria l'obbligatorietà della prova scritta.

Nella relazione pel 1889, dopo d'aver segnalato un effettivo miglioramento sugli esami precedenti, che trova la sua ragione nella libertà di scelta per cui affrontarono la prova di Matematica solo quelli che si sentivano più idonei, si osserva però che è strano come il numero dei giovani che prescelsero tale esperimento sia di gran lunga inferiore al numero di quelli che ordinariamente si inscrivono nella Facoltà di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

« È nostro dovere, continua la relazione, segnalare all'attenzione delle Autorità e di tutti coloro cui sta a cuore l'educazione scientifica della nostra gioventù, che gli studenti presentemente inscritti al primo anno universitario di Matematica si mostrano meno istruiti nelle teorie elementari e molto più mal destri nel calcolo dei loro predecessori, il che condurrà ad un progressivo abbassamento del livello degli studi.

Che l'insegnamento della Matematica sia pur mantenuto tra modesti confini, ma però sempre informato a correttezza di metodi e di concetti, reso utile ed educativo mediante continue esercitazioni e controllato fino a l'ultimo da serie prove d'esami ».

Questi saggi consigli ispirati da un alto concetto della funzione educativa della Matematica, ed informati a temperati criterii didattici, non solo dovevano restare lettera morta ma, quasi per ironia, condurre ad un effetto diametralmente opposto.

Ed infatti, se nel 1892 il Ministro Villari ripristina l'esperimento scritto nella sola licenza ginnasiale, subito dopo nel 1893 il Ministro Martini lo sopprime definitivamente in tutti i corsi, restringendo per di più l'orario e gli stessi programmi.

8) Dal 1893 al 1901 non avvengono mutamenti sia nei programmi come negli orarii: ma indubbiamente l'insegnamento della Matematica nelle scuole classiche va man mano perdendo terreno specialmente quando viene riconfermata stabilmente la dispensa dagli esami di promozione e di licenza, e più ancora quando, senza riguardo alcuno alle fatiche degli insegnanti, si

sancisce pubblicamente una deplorevole distinzione tra materie primarie e secondarie collocando, ben inteso, fra quest' ultime anche la Matematica.

Come ciò non bastasse per colmo di misura si proibì all' insegnante di assegnare agli alunni lavori domestici.

Era naturale che di fronte a tale stato di cose, la classe dei docenti di Matematica che vedevano la loro materia ridotta a condizioni di poco superiori a quella della Ginnastica, cercasse di reagire a tale lenta opera di demolizione, e fu appunto nel 1896 che sorse la società *Mathesis* con il nobile intento di difendere presso il pubblico l' importanza dell' insegnamento della Matematica anche nelle scuole di puro indirizzo classico. Non è il mio compito il far la cronaca dell'attività spiegata da questa Associazione; dirò solo che se essa ha fallito in gran parte al suo scopo, lo si deve forse all'aver mirato troppo in alto: ritornare all'antico era ormai impossibile, e bisognava accontentarsi di aspirazioni più modeste, ma più pratiche e più in armonia con lo spirito dei tempi che, in fatto di scuola, s'era profondamente mutato.

Nel 1901 in seguito appunto a ripetuti voti espressi nei congressi della *Mathesis* ed all'azione del suo Comitato direttivo vengono notevolmente mutati i programmi.

Si intensifica l' insegnamento nella IV e V ginnasiale assegnando a questi due corsi l' intera Aritmetica razionale e l'equivalente dei primi 4 libri d' Euclide.

Nel primo corso liceale, oltre al calcolo letterale e all'Algebra fino ai sistemi di equazione di I grado, vengono prescritte le nozioni di Geometria solida di posizione che pel passato s' insegnavano nel terzo, ed in oltre l' equivalenza delle figure piane e solide e la proporzionalità delle grandezze geometriche. Orario: 4 ore settimanali.

Nel II corso si prescrive l'estrazione di radice, il calcolo dei radicali, le equazioni ed i sistemi di II grado, la similitudine delle figure piane e solide, la teoria della misura e l'applicazione dell'Algebra alla Geometria. Orario: ore tre settimanali.

Nel III corso la teoria della divisibilità, i numeri irrazionali, le progressioni, i logaritmi e la solita trigonometria. Orario: 2 ore settimanali.

A questo piano di studi, concepito in parte anche per accontentare i fautori della fusione della Geometria solida con la piana (come del resto risulta anche dalle istruzioni che lo accompagnano) furono mossi parecchi appunti: ma forse il torto suo più grave fu di aver accumulato troppa materia nel ginnasio superiore dove i giovanetti erano già gravati dallo studio di ben quattro lingue, oltre che da quello della storia, della geografia e della storia naturale. I programmi del 1901, senza riparare ad alcuno degli inconvenienti rilevati, peggiorarono la situazione; e difatti 3 anni dopo, impreveduto, e ad anno già inoltrato giungeva improvviso il decreto Orlando a sancire l'opzione tra lo studio del Greco e quello della Matematica alla fine del primo anno di liceo.

Se tale riforma fosse stata concepita meno frettolosamente, avrebbe potuto accontentare, almeno in parte, i matematici: ma invece ha incontrato la generale disapprovazione. Ed in vero se può darsi che nel I anno di liceo, utilizzando il lavoro fatto nel ginnasio superiore, si riesca a svolgere un modesto programma bastevole ai bisogni della Fisica negli anni successivi, e che valga a dare ai più intelligenti tra i giovani una qualche idea della funzione della Matematica nell' interpretazione delle leggi naturali; non si riesce a capire a cosa possa mai servire quello studio del Greco che viene abbandonato quando si comincerebbe a raccoglierne i primi frutti. I programmi che in seguito al decreto Orlando sono prescritti pel II e III corso di liceo, tolta l'anomalìa del calcolo degli irrazionali posposto alla teoria della misura a cui del resto ogni insegnante può a tempo debito riparare, nulla presentano di notevole e si riducono ad una copia, con qualche limitazione, di quelli in vigore nel II biennio degli istituti tecnici.

9) Da quanto precede risulta dimostrato in modo indiscutibile come il concetto dell'efficacia educativa della Matematica sia andato sempre più perdendo d'importanza presso i legislatori che si succedettero in questo ultimo triennio.

Allo stato attuale delle cose è inutile quindi nutrire l'illusione di poter ritornare all'antico: conviene piuttosto studiare ed attuare nuovi ordinamenti scolastici informati a maggior spirito di libertà per poter meglio sfruttare le tendenze e le attitudini individuali dei giovani; e nello stesso tempo vedere se si possa dare all'insegnamento della Matematica un indirizzo tale che

valga ad aumentarne il prestigio presso il pubblico, convincendolo non tanto della sua utilità dal punto di vista della pratica applicazione, quanto dell'altro più elevato di una sana educazione filosofica atta a conciliare i più delicati sentimenti di tolleranza con le più ardite aspirazioni di progresso.

II.
Critiche e proposte

RELAZIONE

di G. FAZZARI, prof. nel R. Liceo Umberto I di Palermo

Per adempiere il compito a me affidato, riferirò brevemente intorno alle discussioni sui programmi di Matematica della scuola classica, fatte specialmente dagli insegnanti delle scuole medie per iniziativa dell' associazione *Mathesis*, e mi permetterò in fine di tracciare in linee generali le modificazioni che si potrebbero apportare ai programmi per l'insegnamento di questa disciplina in detta scuola, affinchè esso possa riuscire efficace.

Verso la fine del 1895 si è costituita l'associazione *Mathesis* fra insegnanti di matematica di scuole medie con lo scopo del miglioramento della scuola e del perfezionamento degl' insegnanti sotto il punto di vista scientifico e didattico (art. 1 dello Statuto), scopo che il prof. G. Frattini scolpì con felice motto « volgere i progressi della scienza a beneficio della scuola », anche nel senso che *progresso* della scienza matematica implica *semplificazione* e quindi, piegando la didattica ai dettami delle nuove verità, la gioventù studiosa delle nostre scuole con meno lavoro riceverebbe maggiori conoscenze [1].

---

[1] *Atti del secondo Congresso dei professori di matematica delle scuole secondarie, tenuto a Livorno nei giorni 17-22 agosto 1901.* (Livorno, 1902, pag. 13).

Il Consiglio direttivo di essa fin dal suo inizio propose ai soci la discussione di diverse questioni intorno ai programmi della nostra disciplina nei vari ordini e gradi di scuole medie ed intorno ai metodi d'insegnamento; questioni che i soci discussero ampiamente in adunanze parziali tenute in varie città d'Italia e nel primo loro Congresso di Torino (1898) con l'intervento di illustri e benemeriti insegnanti universitari. Non credo necessario di riferire qui dettagliatamente le discussioni intorno ai programmi, perchè esse, più che ad una vera e propria riforma dei programmi in vigore, tendevano a coordinarli alle altre discipline scientifiche, rimanendo nei limiti assegnati dalla nostra tradizione scolastica e distribuendo la materia negli otto anni del corso classico. Il ministro Gallo si rivolse alla detta Associazione per compilare i nuovi programmi di matematica ed alla Associazione italiana di fisica per quei di chimica e fisica, e vennero così i programmi stabiliti con R. Decreto del 24 ottobre 1900, non in tutto però conformi a quelli che erano stati compilati dal prof. D'Ovidio e dal prof. Bettazzi, presidente della *Mathesis* (1).

Con essi giustamente si volle all'aritmetica pratica aggiungere nel ginnasio inferiore le nozioni intuitive intorno alle figure geometriche, le regole relative alla loro misura ed i rudimenti di disegno geometrico; passarono dal Ginnasio superiore alla terza del Liceo le non facili teorie dei numeri primi, della divisibilità e dei periodici, rimanendo in quarta le proprietà formali delle operazioni sui numeri interi, il massimo comun divisore ed il minimo multiplo comune di più numeri ed in quinta le frazioni con le relative proprietà formali.

Per l'insegnamento della geometria razionale venne assegnato alle due classi del ginnasio superiore il contenuto dei primi tre libri di Euclide e alle due prime classi del Liceo il resto nei limiti degli antichi programmi; e sempre nei detti limiti l'insegnamento dell'algebra venne diviso nelle tre classi del Liceo, ponendo nella terza i numeri irrazionali, le progressioni e i logaritmi; si assegnò poi alla terza liceale l'insegnamento della trigonometria rettilinea.

Questi programmi in massima si giudicarono buoni, riguardando lo studio della matematica nelle scuole classiche come un

(1) *Boll. Ass. Mathesis*, anno V, n. 4.

mezzo di cultura generale, come una ginnastica del pensiero (veggansi le istruzioni del Cremona le quali accompagnano i programmi del 1867); ma essi difficilmente permettono all'insegnante di portare la vita nelle nostre scuole, mostrando come gli avvenimenti che si svolgono sotto i nostri occhi ed i fenomeni che accadono intorno a noi siano dominati dalle leggi del numero e della estensione e come la matematica serva a mille interessanti ed utili ricerche di indole pratica.

***

Di questa questione, cioè intorno alle applicazioni che dovrebbero accompagnare l'insegnamento della matematica nella scuola classica, pur rimanendo nei limiti assegnati dai programmi, si è occupato il Consiglio direttivo di *Mathesis*, approvando una mia proposta; ma nulla o troppo poco si è ottenuto.

Il prof. Bettazzi in una sua nota « Le applicazioni della matematica » [1] ha rilevato alcune utili applicazioni che si potrebbero portare nella scuola: per es., far disegnare, dato un segmento per unità, certi numeri irrazionali non complicati: far disegnare sviluppi di poliedri date prima le misure di alcuni elementi, confrontando il risultato grafico con quello del calcolo; riduzione di scala in disegni; i noti problemi di calcolare l'altezza di un edifizio ecc.; sulle carte topografiche calcolare distanze, pendenze di strade, ecc.,; proporre tracciati di ferrovie, con tratti rettilinei e circolari, obbligate a date condizioni; problemi presi dalla fisica; l'uso d'istrumenti oltre la riga ed il compasso, come il pantografo, e simili; i grafici di curve rappresentative di fenomeni ecc. [2],

Ma chi ha pratica della nostra scuola pur troppo sa per esperienza che tutte queste cose utili e belle sono più o meno facili a proporsi ma difficili ad attuarsi, tenendo conto dell'orario non solo, ma anche del fatto che i programmi, che purtroppo bisogna svolgere, non offrono occasione a tali applicazioni. Inoltre, l'alunno della terza classe liceale dovrebbe, per es., avere già acquistate

---

(1) *Boll. Mathesis*, anno VIII, n. 3, 1903-904, pag. 40-44.

(2) Questa importante questione era già trattata dallo stesso BETTAZZI in una sua nota: *La pratica nell'insegnamento della matematica*. Lucca 1900, dal BELLACCHI: *Le applicazioni elementari della matematica*. Firenze 1888, e da altri autori.

nelle classi antecedenti quelle nozioni necessarie per svolgere le sopradette questioni pratiche, ma vi è il fatto che la maggioranza dei giovani coi nostri ordinamenti scolastici, arrivando all'ultima classe a forza di *sei*, hanno più o meno dimenticato quello che avrebbero dovuto apprendere negli anni antecedenti e stentano quindi ad eseguire un qualsiasi calcolo con numeri non interi.

***

Fra le questioni che riguardano i metodi d'insegnamento, discusse dai soci di *Mathesis*, innanzi tutto è da rilevare la quinta: « Opportunità della fusione della geometria elementare », [1] sia per l'importanza della discussione che ne seguì, sia perchè essa suggerì di compilare i sopra detti programmi in modo che nelle due classi del Liceo l'insegnante avesse modo di seguire o no il metodo della fusione, idea già manifestata dal prof. Bettazzi fin dal 1891 all'apparire della 1ª edizione degli *Elementi di Geometria* di G. Lazzeri e A. Bassani (Livorno 1891) [2].

Questo nuovo indirizzo, forse per la secolare tradizione, non trovò seguito in Germania e neppure in Francia, ove i *Nouveaux éléments de géométrie* del Méray, pubblicati per la prima volta nel 1874, videro una seconda edizione dopo ben 29 anni nel 1903. In Italia il Brioschi nei programmi dell'ottobre del 1871 per gl'istituti tecnici ed il Cremona nei suoi *Elementi di geometria proiettiva* (1873) avevano fatto rilevare che spesso è utile anche nell'insegnamento secondario di servirsi di considerazioni stereometriche per dimostrare proprietà relative a figure piane ed il De Paolis prima ed il Lazzeri e Bassani poi, hanno coi loro volumi dimostrato col fatto che, eliminando l'antica distinzione, molte teorie potevano venire semplificate.

Però nella discussione di questa questione i professori secondari si divisero in due campi, pro e contro la fusione, non ostante l'entusiasmo con il quale il prof. De Amicis nella sua importante relazione *Pro-fusione* ne avesse prese le difese [3].

---

[1] *Boll. Mathesis*, anno I, n. 1, pag. 10.

[2] R. Bettazzi: *Sull'insegnamento della geometria nei Licei*. - (*Per. di mat.*, anno, VI, pag. 113-116).

[3] *Boll. Ass. Mathesis*, anno II, 1897-98, n. 4. pag. 73-96.

La questione fu trattata anche al Congresso di Torino innanzi accennato, fissando che « per fusione deve intendersi un metodo « didattico, secondo il quale fin da principio si studiano simulta- « neamente gli argomenti affini di geometria piana e solida e si « vengono in seguito applicando le proprietà dell' una o dell' altra « per trarne il maggior vantaggio possibile » (¹).

Posta così la questione, il Congresso ha fatto voti che venissero « modificati i programmi in modo che sia concesso all' inse- « gnante la libertà di scegliere fra il metodo separatista ed il « fusionista » (²).

Secondando questo voto furono stabiliti i programmi innanzi accennati del 1900, i quali però permettono di seguire il metodo fusionista non fin dall' inizio dello studio della geometria, ma alla prima liceale, cioè dopo che il giovane ha studiato le teorie contenute nei primi tre libri di Euclide, conforme in ciò al metodo tenuto dal Veronese nel suoi « Elementi di Geometria ».

La discussione sui programmi rimase però sempre viva in seno dell' associazione; e nel secondo Congresso tenuto a Livorno nel 1901 la questione fu posta di nuovo all' ordine del giorno con una relazione del prof. Bettino Bettini (³). Il relatore, considerando che i programmi del 1900 erano stati in massima quelli voluti dall' associazione, per ragioni di opportunità si limitò a rilevare alcuni difetti, facendo voti che qualche teoria da una classe passasse ad un' altra. La discussione si chiuse proclamando « la necessità « di introdurre in tutti gli esami una prova scritta di matema- « tica, circondata da tutte le garanzie che possono assicurarne « la sincerità » (⁴). Questo voto non è stato finora accolto dal

---

(¹) *Primo Congresso tenuto dai professori di matematica di scuole secondarie ad iniziativa dell' Associazione « Mathesis ». Verbali. - Per. di mat.*, anno XIV, pag. 4.

(²) *l. c.*, pag. 5.

(³) *Atti del secondo Congresso*, ecc., pag. 60-68 e relativa discussione, pag. 6-9.

(⁴) *l. c.*, pag. 9.

Ministero della P. I. quantunque gl'insegnanti di matematica della scuola classica in maggioranza non abbiano trascurato alcuna occasione per rilevarne la necessità, non tanto per il valore della prova in sè, quanto per costringere l'alunno a studiare con maggiore interesse questa materia per il doppio esame scritto ed orale, che dovrebbe sostenere, per abituarlo durante l'anno scolastico alla risoluzione di facili questioni. È un fatto che l'alunno che si abitua alla risoluzione scritta di questioni, non solo prende interesse allo studio della matematica, ma in lui non si verifica un fenomeno stranissimo, che si osserva con allievi anche di una certa intelligenza, i quali sono rimasti pigri e paghi solo di ripetere la lezione appresa nel libro di testo, cioè il *distacco*, per così dire, della parola dall'idea.

È certo poi che « dal giorno in cui venne soppressa la prova « scritta di matematica, l'insegnamento in molti istituti classici « assunse una forma dogmatica che lo rende infecondo e di cui è « urgente spogliarlo; insegnare delle definizioni e dei teoremi « senza applicare quelle e questi a risolvere dei problemi, è quanto « insegnare ad un soldato la teoria delle armi da fuoco senza « fargli mai tirare al bersaglio.... Ritorniamo dunque all'antico « sistema delle prove scientifiche scritte, fidando che così i licen- « ziati dalle scuole classiche conosceranno la matematica, se non « con maggiore estensione con maggior profondità e cesserà quel- « l'abbassarsi continuo del livello nella cultura matematica dei « giovani che passano dai Licei alle nostre Facoltà di Scienze, « abbassamento che molti avvertirono senza rendersi ragione delle « cause che lo producono » (1).

Anche dopo l'attuazione dei programmi del 1900 seguirono i lamenti per il poco profitto degli alunni. Ciò era da prevedersi, poichè molteplici sono le cause; queste non si elimineranno con semplici ritocchi ai programmi, ma con una riforma sostanziale della scuola. Di ciò si è dovuto ben rendere conto il Ministro

---

(1) G. Loria: *Matematica.* - *Il Pitagora*, anno III, n. 3, pag. 40, n. 4, pag. 53.

Leonardo Bianchi, quando con R. Decreto 19 novembre 1905 nominò una Commissione, composta di uomini preclari nelle lettere e nelle scienze, per studiare il problema generale della scuola media e per proporre un piano di riforme degno della terza Italia.

La Commissione con una dotta relazione compì il suo mandato: spetta ora al Ministero ed al Parlamento di tradurre in atto la riforma, iniettando nuovo sangue ossigenato alla nostra scuola media, già anemica, affinchè essa possa prendere nell'odierna civiltà il suo posto ed essere mezzo di cultura e di progresso alla nostra patria.

Il Consiglio direttivo di *Mathesis*, facendosi interprete di questi lamenti, con saggia deliberazione propose quale primo tema al suo terzo Congresso di Napoli (14-17 settembre 1903): « studiare le cause del poco profitto, che fanno, nello studio della « matematica, i giovani delle scuole medie e proporre i mezzi « per ovviarvi ».

Il relatore prof. Enrico Nannei [1] divise queste cause in comuni a tutti gl' insegnamenti (eccessivo numero di alunni per ogni classe; eccessivo lavoro richiesto dagli alunni con 4, 5 e talvolta 6 ore di scuola al giorno; vacanze troppo lunghe; mutazioni frequenti di disposizioni regolamentari; cambiamento di insegnante) ed in speciali: riguardo alla materia che è difficile, non desta interesse nè diletta; in riguardo al diverso grado di intelligenza e di volontà degli alunni; in riguardo all'insegnante ed agli ordinamenti scolastici.

Certo la deduzione logica richiede che la mente degli alunni sia giunta ad un sufficiente sviluppo e perciò bisognerebbe evitare che nel Ginnasio fossero ammessi giovanetti immaturi, pure avendo il loro bravo diploma di maturità.

È un principio pedagogico indiscutibile che un insegnamento in tanto riesce efficace in quanto può e sa destare interesse nello scolaro o per la sua importanza o per la sua utilità o per il diletto che suscita.

Ora è ben difficile che il giovanetto del Ginnasio inferiore comprenda l'importanza dello studio della Matematica; ma egli comprende che nel nostro ordinamento scolastico il latino, p. es., è

---

[1] *Atti del 3° Congresso fra i professori di Matematica delle scuole italiane.* Torino, 1904, pag. 9-26 e pag. 57-58.

più importante della Matematica, ed egli e la sua famiglia sanno che il latino è *materia principale* con tante ore d'insegnamento, mentre la Matematica, con 2 ore la settimana, è una materia affatto *secondaria*, quindi dedica allo studio del latino tutto il suo tempo e trascura quasi completamente quello della Matematica.

Inoltre il giovanetto dai 10 ai 13 anni possiede il senso intuitivo ma non il senso logico, e le cognizioni matematiche che possono interessare il suo spirito in questo studio, appartengono all'aritmetica pratica ed alla geometria intuitiva, anzi questa desta più interesse di quella, come il disegno e la spiegazione delle figure lo interessano più delle definizioni, i problemi pratici più delle regole per le operazioni; adunque programmi e orario per questa disciplina dovrebbero essere tali, che l'insegnante potesse con brevi spiegazioni, con continue ripetizioni, con moltissimi esercizi di indole essenzialmente pratica e possibilmente con richiami di altre discipline, destare nell'alunno l'*interesse* e nello stesso tempo abituarlo alla precisione del linguaggio nelle definizioni, nelle descrizioni e nei ragionamenti sui problemi pratici. Tutto ciò non è possibile coi programmi attuali e col presente ordinamento scolastico.

Non bisogna però pretendere molto dai giovani: l'insegnante deve tener presente che l'alunno in generale nelle classi superiori si trova in quello stato di sviluppo mentale nel quale, se vi è l'attitudine alla deduzione logica, non vi è l'attitudine alla critica; perciò nell'insegnamento non si devono rifiutare i sussidi del mondo esterno e della vita pratica, non si deve dimostrare ciò che all'alunno sembra evidente, ricordando che l'*evidenza* è la qualità per la quale certe proposizioni s'impongono allo spirito in modo che non si possano negare « senza una pena interna e dei rimproveri segreti della ragione » secondo la viva espressione del Malebranche, l'autore della *Ricerca della verità*; ricordando l'assioma dell'*evidenza* del Descartes, cioè che bisogna ritenere per vero ciò che si concepisce *chiaramente e distintamente*.

Inoltre s'insista per far imprimere nella mente del giovane che il mondo è tutto governato dalle leggi del numero e dell'estensione; che « il matematico si trova in possesso di uno strumento mirabile e prezioso, creato dagli sforzi accumulati per « lungo andare di secoli dagli ingegni più acuti, dalle menti più

« sublimi che sien mai vissute »; che « egli ha, per così dire, la « chiave che può aprire il varco a molti oscuri misteri dell'uni- « verso, ed un mezzo per riassumere in pochi simboli una sintesi « che abbraccia e collega vasti e disparati risultati di scienze « diverse [1].

Mentre l'Associazione *Mathesis* proponeva di eliminare per quanto era possibile le cause del poco profitto degli alunni delle scuole medie col migliorare i metodi d'insegnamento e col far voti d'innalzare nell'insegnamento classico l'importanza della Matematica, ripristinando in tutti gli esami la prova scritta per questa disciplina e aumentandone l'orario, comparvero nel *Bollettino Ufficiale della P. I.*, del 29 dicembre 1904, le nuove istruzioni ed i nuovi programmi, tuttora in vigore, approvati circa due mesi prima con R. Decreto dell'11 novembre 1904, i quali resero facoltativo nei due ultimi anni del Liceo lo studio della Matematica o quello del Greco. Questo decreto è stato da tutti più o meno giustamente biasimato: i senatori Professori Villari e Blaserna [2] ne rilevarono la inopportunità; i senatori Professori Veronese e Cerruti [3] dimostrarono i gravi danni che esso avrebbe recato non solo all'insegnamento della Matematica ma anche a quello della fisica; l'associazione *Mathesis* nel suo convegno di Milano nei giorni 21-22 aprile 1904 [4] giudicò pessimi i programmi sia dal lato scientifico che dal lato didattico; valorosi pedagogisti come G. A. Colozza [5] ed il compianto Cesca [6], biasimarono la ragione del decreto; la Società italiana per la

---

[1] VOLTERRA: *Sui tentativi di applicazione della Matematica alle scienze biologiche e sociali.* Roma, 1901.

[2] *Atti del Parlamento. Senato del Regno.* Tornata del 7 dicembre 1904.

[3] Id. Tornata del 4 marzo 1905.

[4] *Boll. Mathesis*, (an. IX, 1904-1905, n. 5-6).

[5] *Errori e pericoli degli studi elettivi.* Napoli, L. Pierro, 1906.

[6] *La libertà di opzione tra il Greco e la Matematica* (*Biblioteca delle scuole italiane*), an. XI.

Vegg. anche nello stesso periodico la *Lettera aperta a S. E. il Ministro della P. I.* del prof. A. Arrò, su *L'opzione tra il Greco o la Matematica nei Licei.*

diffusione e l'incoraggiamento degli studi classici e la Federazione nazionale degli insegnanti delle scuole medie (1) riprovarono questa facoltà data ai giovani dei Licei di abbandonare dopo il primo anno del Liceo lo studio di una delle due discipline che pur sono dichiarate, strana contraddizione, fondamentali nella relazione che precede il detto decreto (2). Dal secondo volume pubblicato dalla Commissione per l'ordinamento degli studi secondari in Italia (*Risposte al questionario diffuso con circolare 27 marzo 1906*) si rileva che dei 113 collegi dei professori di Liceo che risposero in qualche modo al quesito riguardante gli effetti di questo decreto, solo 13 si mostrarono favorevoli all'opzione, 28 si dichiararono incerti per il tempo troppo breve fino allora trascorso, gli altri 72 tutti contrari (3).

Dopo ciò è inutile fermarsi su questi programmi, ma bisogna far voti che in attesa della Riforma della scuola media, se non si vuole abolire la facoltà dell'opzione, almeno si modifichino i programmi, come la didattica e la scienza prescrivono.

Fra le questioni discusse nel *Bollettino della Mathesis* merita qui speciale menzione la XI: se le proporzioni debbono introdursi nelle scuole seguendo il metodo di Euclide, cioè indipendentemente dal concetto di numero fratto o irrazionale, ovvero premessa la teoria dei numeri irrazionali, devono essere dedotte da quella della misura. I soci si divisero in due gruppi, pro e contro il metodo euclideo.

La differenza fra i due metodi è che nel metodo euclideo si definisce non il rapporto di due grandezze omogenee, ma solo la eguaglianza o la disuguaglianza di due rapporti, ossia introdotto

---

(1) *La recente riforma dell'insegnamento del Greco e della Matematica nei Licei.* Relatori: V. Ussani del R. Liceo Cavour di Torino e Giuseppe Legrenzi del Liceo di Forlì (IV Congr. ecc.).

(2) (N. d. D.) cfr. *anche l'articolo di* A. Conti *comparso su questo* Bollettino *poco dopo la promulgazione del Decreto in parola* « *La recente riforma della Scuola classica, ossia Abbasso Senofonte, abbasso Euclide* » *Anno III n*i. *10-11-12.*

(3) Si veggano le pagine 55-184 e 235-251 al n. I del detto vol. II.

un nuovo ente, detto *rapporto*, si stabiliscono con le proporzioni le sue relazioni con altri enti consimili, mentre col metodo aritmetico si definisce il rapporto come numero, ente già noto al giovane.

Certo il primo metodo è vantaggioso per l' educazione della mente; ma tenendo conto delle difficoltà da superare, non ostante i grandi miglioramenti apportati nei nostri migliori trattati di geometria elementare [1], e del tempo necessario a svolgere questa teoria con detto metodo, tempo che potrebbe essere utilizzato a studiare altre teorie con maggiore interesse dei giovani e quindi con maggiore efficacia per tutto l'insegnamento, ci persuaderemo che sarebbe utile abolire dai programmi di geometria questo capitolo, riformando convenientemente i programmi. Anzi secondo le idee dei proff. G. Peano e C. Burali-Forti [2], si potrebbe abolire questo capitolo anche dai programmi di aritmetica, sostituendovi con maggiore utilità l' algoritmo algebrico, ed insistendo meglio di quello che oggi non si faccia sul concetto di proporzionalità, che è tanto fecondo di numerose applicazioni. Anzi « si deve esser osservato che i giovani abituati al maneggio delle « proporzioni non si occupano quasi mai di constatare se le gran- « dezze con le quali formano la proporzione sono o no propor- « zionali, e quindi, almeno per essi, proporzione e proporzionalità « sono una stessa cosa » [3]. Il prof. Loria, rispondendo ad alcuni quesiti proposti nella rivista *L' enseignement mathématique*, propose anch'egli l'abolizione della teoria delle proporzioni secondo Euclide, per procedere nell'insegnamento con maggior sollecitudine. Della medesima opinione si addimostrarono anche altri insegnanti di scuole medie e superiori.

*
* *

Ed ora cerchiamo di dire brevemente quali modificazioni si potrebbero apportare ai nostri programmi, affinchè, secondo il mio

---

[1] Vegg. anche A. Natucci: Alcune considerazioni nella teoria delle proporzioni in geometria elementare. (*Il Bollettino di Matematica*, an IV, 1905, n. 5-8, pag. 114-117).

[2] G. Peano: *Sul libro V di Euclide* (*Il Bollettino di matematica*, anno V, 1906, n. 5-6, pag. 87-91).

Le idee del Burali-Forti si trovano nel *Bollettino Mathesis*, anno II, 1897-98, n. 5, pag. 126-129).

[3] Burali-Forti: *l. c.* pag. 128, *nota*.

avviso, nell' attuale nostra scuola classica, l'insegnamento fosse efficace. Innanzi tutto si deve aumentare l' orario nel Ginnasio, abolire le prove trimestrali e ripristinare gli esami finali scritti ed orali. Nel Ginnasio inferiore inoltre l'insegnamento della Matematica deve tendere non solo a conservare ed accrescere negli alunni la capacità di eseguire con speditezza e sicurezza le operazioni fondamentali sui numeri, a far loro conoscere le principali proprietà delle figure geometriche con precisione di linguaggio, a disegnare queste figure con nitidezza, ma sopratutto a far sorgere in essi al più presto il desiderio di rendersi ragione dei procedimenti di cui a mano a mano imparano a servirsi, mantenendo inoltre nel modo più stretto possibile la connessione fra lo studio dell' aritmetica e quello della geometria ([2]). Per raggiungere questi scopi si deve dare subito agli alunni il concetto di numero fratto, in modo da non ritardare lo studio della misura delle figure per poter con problemi d'indole pratica procedere di pari passo nell'insegnamento della geometria e dell'aritmetica e far sì che i due insegnamenti siano l'uno di vero ausilio dell' altro. Si tenga presente che il giovanetto, finito il corso elementare, dovrebbe sapere eseguire il calcolo delle operazioni fondamentali con numeri interi e decimali e conoscere anche il sistema metrico decimale; epperò si potrebbe iniziare il corso con problemi nei quali i dati e l'incognita siano numeri interi e decimali e questo esercizio, che dovrebbe essere continuo alla lavagna e per iscritto, supposto che l'orario fosse sufficiente, dovrebbe non solo mirare ad abituare i giovani ad esprimere con precisione le proprie idee, ma potrebbe offrire l'occasione di imprimere nella loro mente il concetto esatto delle operazioni, le loro proprietà, e con opportune osservazioni anche l'uso delle parentesi. Si potrebbe anzi fare di più: tenendo presente che i problemi che si possono dare ai giovani che iniziano il corso ginnasiale, sono lineari ad un'incognita, si potrebbe abituarli nella risoluzione a fare uso costante dell' algoritmo algebrico, pur senza

---

([2]) Veggasi al riguardo quanto si riferisce agli insegnamenti scientifici nel nuovo Ginnasio riformato nel I volume della *Relazione della Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia* (Roma, 1909, pag. 322-329).

parlare di equazioni e degli inutili teoremi sulle equazioni equivalenti [1].

Mentre così con questioni d'indole pratica si esercitano i giovanetti al calcolo mentale e scritto e si abituano a risolvere problemi con l'algoritmo algebrico, si potrà esporre nel 1° anno il concetto di numero frazionario col calcolo relativo, e studiare le principali figure poligonali ed il circolo, in modo che nel 2°, e non nel 3° anno come negli attuali programmi, si potrà passare alla misura delle figure, e nel 3° si potrebbero anche proporre questioni che richiedono due equazioni lineari a due incognite con coefficienti sempre numerici e le cui soluzioni siano naturalmente numeri assoluti.

Nel 2° e nel 3° corso poi, sempre che l'occasione si presenti, e con esempi anche tratti da altre scienze, si dovrebbe altresì imprimere bene nella mente degli allievi il concetto esatto di proporzionalità e fare apprendere il calcolo approssimato con un numero determinato di cifre decimali esatte, calcolo completamente trascurato nel nostro Ginnasio.

Per concludere, in questo primo periodo dell'insegnamento della Matematica, si dovrebbe mirare che il giovane, finito il corso del Ginnasio inferiore, avesse nozioni precise intorno alle figure geometriche ed alle loro misure, intorno ai segni delle operazioni, sapesse l'uso delle parentesi, eseguisse con speditezza le operazioni sui numeri razionali e potesse risolvere problemi lineari ad una od a due incognite con coefficienti numerici e con soluzioni aritmetiche.

Nel Ginnasio superiore, ritornando per lo studio della Geometria razionale ai programmi del 1900, si potrebbe sostituire, con maggior vantaggio, all'aritmetica razionale, il calcolo coi numeri razionali relativi, introducendo i numeri negativi, spiegandone il concetto e giustificandone le regole di calcolo mediante la loro interpretazione nei problemi pratici di debiti e di crediti di distanze in una direzione od in direzione opposta, ecc. Così non solo si potrebbe nei due anni del Ginnasio superiore fare esercitazioni di calcolo letterale, ma porre il giovane in condizione

---

[1] Catania: *Sulla inutilità dei teoremi sull'equivalenza delle equazioni.* (*Il Pitagora*, anno XIII, 1906-907, pag. 33-34).

che alla fine del 5° anno di Ginnasio potesse risolvere un sistema di equazioni di primo grado a più incognite, anche con coefficienti letterali, ed un'equazione di secondo grado ad un' incognita. Lo studio dell'aritmetica razionale potrebbe passare nei due primi anni del Liceo, nei quali si completerebbe, nei limiti dei programmi del 1900, anche l'insegnamento dell'Algebra e della Geometria e poi nell' ultimo anno, oltre lo studio dei complementi dell'aritmetica e quello dell'Algebra e della Trigonometria piana, si potrebbe, se è il caso, introdurre qualche nuova teoria.

Non ostante i grandi miglioramenti già apportati nei nostri libri di testo, si può affermare che sono possibili ancora altre semplificazioni. P. e. premettendo alla teoria della similitudine delle figure quella della misura delle grandezze in generale, si potrebbe sopprimere nell' insegnamento la teoria delle proporzioni, le quali si mostrerebbero nella loro vera essenza di eguaglianza di due numeri reali (1); a base delle singole teorie si dovrebbero mettere teoremi possibilmente della massima generalità; si dovrebbero cercare dimostrazioni analoghe per teoremi analoghi e collegare quanto più sia possibile le diverse teorie per dare ai procedimenti la più grande uniformità, affinchè diminuisca negli alunni lo sforzo della memoria, ecc.

Semplificate le diverse teorie, si potrebbe, senza aumentare sensibilmente l'attuale orario del Liceo, introdurre nei programmi dell' insegnamento classico superiore, qualche nuova teoria e dedicare qualche ora la settimana ad utili applicazioni. Per attribuire alle figure geometriche tutta la loro generalità, senza dover esaminare casi particolari, si potrebbero considerarle dotate di segno; si potrebbero introdurre la teoria della omotetia, che trovasi in alcuni nostri libri di testo ma non nei programmi, e quella della inversione come trovasi p. e., nel bel volumetto del Casey: A *sequel to the first six books of the Elements of Euclid* (2),

---

(1) Abbiamo già innanzi riferito che questa è idea diffusa fra gli insegnanti di Matematica.

(2) 7ª ediz., 1895, pag. 95-112.

per ravvicinare sempre più alla Matematica superiore la elementare, facendo osservare al giovane che la figura geometrica che in Euclide appare rigida, può trasformarsi per rivelare nuove proprietà.

Soppressa nel Ginnasio superiore l'aritmetica razionale, come innanzi abbiamo osservato, e sostituito il calcolo letterale, le operazioni sui numeri relativi e la risoluzione di sistemi di equazioni di 1° grado a più incognite e della equazione di 2° grado ad una incognita, vi si potrebbero aggiungere anche le nozioni di disposizioni, permutazioni e combinazioni e, se non nel Ginnasio superiore, alla prima liceale, qualche nozione del calcolo della probabilità e lo sviluppo, in molte questioni necessario, della potenza m esima, m intero e aritmetico, del binomio.

Alla terza liceale si potrebbe esporre la trigonometria piana quale un capitolo della geometria metrica, dopo di avere esposti i concetti fondamentali della geometria analitica cartesiana e introdurre ancora la rappresentazione grafica delle funzioni, come p. e. è presentata nel volumetto del Gibson, *An elementary Treatise on Graphs.* (London, 1904).

L'insegnamento della matematica nelle Scuole e negli Istituti tecnici

RELAZIONE

di G. SCORZA, prof. nel R. Istituto tecnico di Palermo

I.
Cenni storici.

1. La Scuola tecnica e l'Istituto tecnico hanno una storia breve e travagliata, ma assai interessante per chi voglia formarsi, mediante esempi concreti, un esatto giudizio della capacità dello Stato a organizzare delle scuole secondarie e superiori.

Di insegnamenti tecnici, in Italia, anche prima della celebre legge Casati del 13 novembre 1859, non ne mancavano: si avevano

in Piemonte delle scuole *speciali*, in Lombardia delle scuole *reali*, a Firenze delle scuole *tecniche*, riordinate più tardi in un *Istituto tecnico* dal Governo granducale toscano con Decreti del 22 ottobre 1853 e dell'11 novembre 1856, a Melfi, fin dal 1856, una scuola d'agricoltura pratica e qua e là delle altre scuole di tipo più o meno professionale.

Ma poichè la divisione in tanti piccoli staterelli e le mille difficoltà che, talvolta a bella posta, si frapponevano allo sviluppo commerciale [1], avevano enormemente ritardato fra di noi quel rigoglioso sviluppo delle industrie che altrove aveva resa evidente la necessità di scuole tecniche e professionali, le scuole di questo tipo erano fra di noi pochissimo frequentate o godevano presso il pubblico tanta scarsa simpatia che, quando col regolamento approvato con R. Decreto del 19 settembre 1860, si volle render possibile un adeguato sviluppo degli Istituti tecnici creati con la legge del 13 novembre 1859, un buon mezzo si trovò nel concedere ai licenziati dalla sezione fisico-matematica dell'Istituto l'iscrizione a una facoltà universitaria, previo un esame complementare di latino e di filosofia razionale [2], cioè, col violare, in un suo punto

---

[1] Per es.: « Il Congresso di Vienna aveva stabilito che la navigazione del Po sarebbe stata libera. Questa convenzione non fu mai eseguita, e cinque diverse dogane con cinque diverse tariffe interrompono il commercio tra Pavia e il Ponte di Lago Scuro ». (Da una lettera del Pecchio ad H. Brougham. Vedi un articolo di M. Lupo-Gentile nella *Rivista d'Italia,* fasc. dell'agosto 1910).

[2] Vedi la relazione del Ministro Mamiani che precede il regolamento in discorso, ove fra altro è detto:

« Per un temperamento siffatto (cioè con la concessione di cui si parla nel testo) l'esponente spera che senza abbassare il concetto che vuolsi fare degli studi universitari, *si innalzi per contrario notevolmente nella pubblica opinione quello degli istituti tecnici a grande uopo di loro, siccome quelli che da non pochi uomini erano finora tenuti, se non a vile, almeno come conducenti ad umili professioni* ».

Giova inoltre ricordare che intorno al 1853 il Ministro Gioia aveva nominata una Commissione, composta del Boncompagni, del Berti e del Rayneri, per studiare il modo di favorire lo sviluppo delle scuole *speciali* e « vi fu perfino chi suggerì di proporre un premio a quei Municipi che avessero mostrato il desiderio di sostituire ai loro istituti di latinità *scuole speciali* ». [Relazione della Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia, (1909), vol. I. pag. 25 e 26].

fondamentale, lo spirito della legge della quale il regolamento doveva chiarire l'applicazione.

Si può dunque asserire con sufficiente esattezza che la storia dell'insegnamento tecnico ha, fra di noi, origine contemporanea a quella del nostro risorgimento nazionale, e che esso, creato quasi *ex novo* dal legislatore e riformato in varie occasioni — sempre col sistema delle commissioni di competenti — è da considerarsi come un prodotto discretamente genuino di ciò che può fare un grande Stato moderno quando si mette a far da pedagogo.

2. Gli autori della legge Casati, che da una diecina di anni avevano visto affermarsi nella opinione degli uomini più illuminati e più colti, nelle discussioni parlamentari e, anche, per quanto in maniera rudimentale e timida, nell'opera del legislatore (basti ricordare la legge Boncompagni del 4 ottobre 1848) un vivace moto di reazione all'istruzione esclusivamente classica e letteraria, preoccupati dall'assoluto bisogno di far sorgere e prosperare un insegnamento tecnico vigoroso, che potesse educare e disciplinare le energie della piccola e media borghesia la cui importanza politica allora specialmente cominciava a farsi sentire, delinearono in modo abbastanza netto e preciso i fondamenti delle nuove scuole.

Nel titolo IV della legge 13 novembre 1859 essi indicarono con gli articoli 272-277 *il fine*, *i gradi* e *l'oggetto* dell'istruzione tecnica stabilendo che:

[Art. 272]. L'istruzione tecnica ha per fine di dare ai giovani che intendono dedicarsi a determinate carriere del pubblico servizio, alle industrie, ai commerci ed alla condotta delle cose agrarie, la conveniente cultura generale e speciale;

dichiarando che:

[Art 273]. Essa è di due gradi, e vien data tanto pel primo, quanto pel secondo nello stadio di tre anni;

e che infine gli insegnamenti del 1° grado dovessero essere:

[Art. 274]... 1° la lingua italiana (la francese nelle provincie in cui è in uso questa lingua);

2° la lingua francese;

3° l'aritmetica e la contabilità;

4° gli elementi di algebra e di geometria;

5° il disegno e la calligrafia;

6° la geografia e la storia;

7° elementi di storia naturale e di fisico-chimica;

8° nozioni intorno ai doveri ed ai diritti dei cittadini;

e quelli del 2° grado:

[Art. 273]... 1° la letteratura italiana (la francese nelle provincie in cui è in uso questa lingua);

2° storia e geografia;

3° la lingua inglese e tedesca;

4° istituzioni di diritto amministratrivo e di diritto commerciale;

5° economia politica;

6° la materia commerciale;

7° l'aritmetica sociale;

8° la chimica;

9° la fisica e la meccanica elementare;

10° l'algebra, la geometria piana e solida, e la trigonometria rettilinea;

11° il disegno e gli elementi di geometria descrittiva;

12° l'agronomia e la storia naturale.

Ponevano inoltre per *legge* che:

[Art. 276]. Questi insegnamenti saranno dati tanto nel primo, quanto nel secondo grado, sotto l'aspetto dei loro risultamenti pratici, e particolarmente sotto quelli delle applicazioni di cui possono essere suscettibili nelle condizioni naturali ed economiche dello Stato.

Altre disposizioni riguardavano gli *stabilimenti tecnici*, *gli alunni e gli uditori*, ecc.; fra le quali basterà ricordare quelle che stabilivano la proporzione in cui le spese per gli stabilimenti tecnici dovevano esser divise tra i Comuni, le Provincie e lo Stato; quelle che davano le norme per le nomine dei professori, previo concorso; e quella che dichiarava gratuita la scuola tecnica (¹).

3. Ma per formarsi un'idea chiara delle condizioni in cui nacquero le scuole e gli Istituti tecnici non basta, naturalmente, tener conto della sola legge Casati, poichè essa stessa, delineati

---

(¹) Tale disposizione fu però abrogata col R. Decreto 28 giugno 1866 « emanato in forza dei pieni poteri concessi al Governo per la guerra con l'Austria ». GALLETTI e SALVEMINI: *La riforma della Scuola media*. Palermo, Sandron, 1908, pag. 35.

appena i caratteri generali dal nuovo tipo di scuole, si rimetteva, per gli opportuni particolari, al regolamento che avrebbe dovuto spiegarne l'applicazione.

E quì sorsero, come è facile comprendere le prime difficoltà.

L'articolo 272 della legge Casati parla di « conveniente cultura generale e speciale », e con gli articoli successivi mostra in qual senso debba essere intesa questa frase, ove a sventare il pericolo di una troppo lata interpretazione della parola *generale* è stata posta l'altra *conveniente;* ma le condizioni storiche del momento, data da una parte la lotta fortunata che in altri paesi si era combattuta per avere accanto alla scuola classica un'altra scuola pure di alta coltura, ma senza latino e senza greco, dall'altra la pressione esercitata dalle nuove classi sociali, che venivano a prender parte attiva alla vita politica, perchè fossero aperte delle scuole di un carattere più utilitario di quelle tradizionali, *ma conducenti come quelle agli studi superiori*, rendevano assai difficile che l'insegnamento tecnico potesse sorgere con tendenze spiccatamente speciali o professionali.

Così avvenne che la prima Commissione nominata per la redazione del regolamento dopo tre mesi di discussioni nell'indirizzo da dare alle nuove scuole, per l'impossibilità di arrivare a un accordo, si dimise senza alcun risultato utile; e la seconda, da cui furono escluse le persone tecniche, per non scontentar troppo nè quelli che volevano un nuovo tipo di scuole di cultura generale, nè quelli che volevano delle scuole speciali, prese, per dir così, una via di mezzo. Cioè, per le scuole tecniche « abbandonò ogni idea di specializzazione e [le] costruì come istituti di cultura indifferenziata a complemento delle elementari, in modo che da un lato abilitassero gli alunni a certe occupazioni immediatamente lucrative... per le quali si richiede solo un'istruzione un po' superiore alla primaria, con l'aggiunta di qualche studio strumentale (calligrafia, computisteria, disegno) non necessariamente indirizzato ai fini di un determinato mestiere; dall'altro somministrassero la cultura preparatoria per gli studi tecnici di secondo grado » (1): ma per gli Istituti si attenne fedelmente agli intenti della legge e li organizzò in « quattro sezioni professionali: com-

(1) GALLETTI e SALVEMINI: *loc. cit.*, pag. 35.

merciale-amministrativa, chimica, agronomica, fisico-matematica...; e all'infuori di tre insegnamenti di *cultura generale* comuni a tutte le sezioni — italiano, storia e geografia — e impartiti in poche ore settimanali da un unico insegnante, tutti gli altri studi erano specializzati secondo i fini delle singole sezioni » ([1]).

Da ciò apparisce chiaro che se per la scuola tecnica l'opera del legislatore mostrandosi incerta fra due opposti indirizzi fu la causa prima di quel suo *ibridismo* che in prosieguo di tempo finì per snaturarla e quasi disorganizzarla, per gli Istituti tecnici essa fu invece illuminata e precisa; e se col passar degli anni anche gli Istituti han finito per perdere il loro carattere di scuole eminentemente professionali, di questo fatto non è possibile trovar la spiegazione adeguata nelle disposizioni della legge del 13 novembre 1859 e del relativo regolamento.

4 A rendere ancora più proprizie le condizioni in cui nacquero gli Istituti tecnici concorse poi, rendendo loro sempre più facile il poter sorgere con opportuna multiformità, una curiosa circostanza fortuita.

Come abbiamo già detto, la legge del 13 novembre 1859 dava soltanto le linee fondamentali dell'organizzazione dell'insegnamento tecnico; quanto ai particolari essa si rimetteva al regolamento che sarebbe stato promulgato più tardi. Ma poichè nel settembre del 1860, questo regolamento, sebbene si trovasse già in avanzato corso di stampa, non era ancora stato reso e non poteva esser reso pubblico a troppo breve scadenza, il Ministro della Pubblica Istruzione comprese che per render possibile l'apertura delle nuove scuole col novembre 1860 conveniva sciogliere le autorità comunali e provinciali dall'obbligo di attendere il regolamento promesso.

E ciò fu fatto con la circolare ministeriale del 2 settembre 1860, la quale fornì alle Autorità interessate i necessari « schiarimenti intorno all'ordinamento e alla spesa degli Istituti tecnici » ma nel tempo stesso dichiarò che delle norme indicate « il Ministero non intende[va] di prescrivere la stretta osservanza in modo assoluto e tale da non ammettere quelle modificazioni, che senza alterare l'economia del piano generale, facesse ragione ai bisogni

---

([1]) *Ibidem*, pag. 109.

locali. Che se è necessario esigere dai giovani che escono dagli Istituti tecnici quel corredo di scienza, che deve renderli atti alle carriere alle quali gli istituti stessi aprono l'adito, importa assai più che ivi acquistino conveniente cultura in quelle discipline che possano favorire lo svolgimento delle industrie e dei commerci locali » (1).

Ora le norme di cui il Ministero non prescriveva la stretta osservanza eran quelle che costituivano gli Istituti tecnici in quattro *sezioni* (l'amministrativo-commerciale, la chimica, l'agronomia e la fisico-matematica) o in una *combinazione* qualunque di sezioni scelte fra queste quattro; che stabilivano le durate dei corsi nelle varie sezioni (due anni per le prime tre sezioni e tre per la quarta), e che assegnavano il numero delle materie di insegnamento e la spesa occorrente per il personale di ciascuna combinazione.

Per modo che la circolare del 2 settembre 1860 veniva a concedere una libertà assai più larga di quella esplicitamente accordata dal regolamento del 19 settembre 1860, dove negli articoli 9 e 14 è previsto soltanto il caso che i Comuni e le Provincie vogliano istituire delle cattedre o delle scuole pratiche e di perfezionamento *oltre* a quelle volute dal regolamento: nel qual caso si stabilisce che tali insegnamenti saranno *per ora* riguardati come liberi e se ne addossa la spesa relativa ai Comuni e alle Provincie.

Nell'anno scolastico 1860-61 le Provincie, dove per quell'epoca era promulgata la legge Casati, si valsero qua e là delle facoltà concesse modificando leggermente i programmi delle varie sezioni; ma nel 1861-62 a Milano furono « introdotte assai gravi modificazioni, provocate dal Consiglio provinciale di quella nobile città « (2); e cioè *furon resi triennali i corsi di tutte le sezioni e, abbandonati completamente i programmi pubblicati col R. Decreto 24 no-*

---

(1) Per quanto riguarda le scuole tecniche la circolare contiene soltanto gli *specchi* degli *insegnamenti*, del *personale* e delle *spese* relative, e niun cenno vi si fa di concessioni alla libera iniziativa dei Comuni e delle Provincie.

(2) Relazione del Ministro di Agricoltura, Industria e Commercio (Pepoli) sopra gli Istituti tecnici, ecc. - Torino, Botta, 1862, pag. 16.

vembre 1860, ne furon compilati degli altri che rispondessero « al nuovo indirizzo dato alla scuola e alle condizioni di fatto nelle quali essa trovasi in conseguenza del primo ordinamento che le era stato dato e di tutti gli altri suoi precedenti » [1].

Bisogna aggiungere però che nessun'altra Provincia si valse della facoltà concessa con l'ampiezza di quella milanese; anzi in taluna di esse, per il più arretrato — o quasi nullo — sviluppo industriale, si sentiva tanto poco la necessità delle nuove scuole che dovettero esservi aperte per diretta iniziativa del Governo.

5. E qui giova porre in rilievo un'altra circostanza che chiarisce ancora meglio le diverse condizioni in cui vennero a trovarsi, fin dai loro inizi, le scuole e gli Istituti tecnici, sebbene le une e gli altri non fossero che i due gradi di uno stesso insegnamento.

Quando sul finire del 1861 fu creato il Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio, gli Istituti tecnici, insieme con le scuole delle miniere, di arti e mestieri, di nautica e di agraria, furon posti sotto la sua giurisdizione; invece le scuole tecniche rimasero sotto quella del Ministero della Pubblica Istruzione: e soltanto sedici anni dopo, a causa della temporanea soppressione del primo Ministero, con R. Decreto del 26 dicembre 1877, gli Istituti tornarono per sempre alla dipendenza del secondo.

Una prima conseguenza di questo fatto fu che, data la diversità delle condizioni iniziali e la diversità delle persone che ne reggevano le sorti supreme, i due gradi dell'insegnamento tecnologico si svolsero per qualche tempo con criterî ed indirizzi distinti; un'altra, assai dolorosa, fu che l'Istituto tecnico, rimasto solo a rappresentare il tipo di una istruzione multiforme ed utilitaria coordinata ai varî bisogni locali, in un paese che, a quei tempi, per il suo rudimentale sviluppo economico, non ne sentiva quasi affatto la necessità, non potè reggere a lungo contro le critiche che da tutte le parti gli si rivolgevano e dopo un decennio di vita agitata non raggiunse una qualche stabilità di assetto, se non dopo che ebbe in gran parte perduto il suo carattere di scuola professionale e dopo che la sezione fisico-matematica organizzata sempre meglio come scuola di cultura scientifica e moderna e spogliata di ogni funzione professionale non ne divenne la parte essenziale, o, come si diceva allora, l'*albero maestro*.

---

(1) *Ibidem.*, pag. 18.

Per chiarire quel che ora si è affermato, occorrerebbe dare un rapido schizzo di tutta la storia degli Istituti e delle scuole tecniche; ma per non andar troppo in lungo anche perchè le scuole tecniche si trovarono quasi fin dagli inizi in quelle condizioni a cui gli Istituti pervennero dopo le riforme tra il 1871 e il 1877, noi ci limiteremo soltanto alla considerazione di questi ultimi.

6. Gli Istituti tecnici non erano si può dire ancora creati, che subito cominciarono ad essere oggetto di discussioni vivaci e ad esser minacciati di riforme capitali; pure le assennate concessioni promesse e accordate a derogare qua e là dalla legge del 13 novembre 1859, se le Provincie, i Comuni e lo Stato avessero saputo opportunamente valersene, avrebbero potuto dare a poco a poco alle nuove scuole un assetto soddisfacente e una vita rigogliosa.

Ciò appunto riconosceva con fine intuito il Ministro Pepoli (di Agricoltura, Industria e Commercio), il quale, presentando nel 1862 alla Camera dei Deputati la sua relazione sopra gli Istituti tecnici e le altre scuole dipendenti dal suo Dicastero ebbe ad esprimersi con queste precise parole:

« Il sottoscritto si reca a debito di presentare alla Camera una relazione particolareggiata sopra gli Istituti tecnici, affinchè il paese prima di porre mano a subitanee riforme legislative abbia certezza della loro condizione, della loro indole e natura. Senza del che riuscirà sempre malagevole preparare quelle utili e fruttuose innovazioni che pigliano origine e norma dal retto giudizio della coscienza pubblica.

« *Uno dei gravi impedimenti al buon avviamento dell'istruzione tecnica è la rigidezza delle leggi, le quali spesso non possono o non sanno piegarsi alle svariate necessità dei traffichi, delle industrie e dell'agricoltura delle singole Provincie. Questa difficoltà non s'incontra per buona ventura nella legge presente, la quale non discendendo nei particolari può essere acconciamente temperata nelle sue applicazioni.*

« Il sottoscritto è perciò d'avviso che abbia a tornare più proficuo per l'insegnamento tecnico del paese che il Governo si valga praticamente di codesta larghezza per correggere le parti difettive, senza rimutare da cima a fondo l'ordinamento legislativo degli Istituti in cui detto insegnamento si dispensa.

« .... Il modo più efficace e sicuro per volgere a scopo proficuo gli Istituti tecnici pare sia quello di rinnovarli a mano a mano

che si fanno aperti i loro mancamenti. *Questa opera di progressivo e graduale rinnovamento può dal Ministero praticarsi di consenso colle podestà elettive delle Provincie e del Comune, il cui intervento nel governo ed indirizzo degli Istituti tecnici è altamente giovevole e conforme al discentramento amministrativo ed alle dottrine del libero insegnamento.* . Temperare, correggere, innovare a seconda dei consigli dell'esperienza suffragati dall'opinione pubblica quanto trovasi difettivo negli Istituti tecnici, è il principio che il Ministero intende attuare praticamente avanti di proporre provvedimenti legislativi .. »

7. Ma ogni buon proposito dei ministri più illuminati di favorire la libertà e la varietà degli insegnamenti tecnici non poteva che riuscire vano; poichè è chiaro che una organizzazione scolastica rigorosamente accentrata, per ragioni intrinseche ad ogni vasto ordinamento burocratico, non può piegarsi a cambiamenti piccoli ma continui, non può adattarsi con duttile facilità alle condizioni diverse dei varî luoghi, nè può infine sfuggire alla tendenza fatale verso l'uniformità che, dopo tutto, è, per chi presiede ad essa, la tendenza verso la massima facilitazione del lavoro.

Così non solo la proposta del Pepoli non prevalse, ma anche in seguito rimasero sempre allo stato di progetto (o di leggi... annullate da disposizioni transitorie che son rimaste e rimangono in vigore da ventenni) [1] tutte quelle proposte che miravano a discentrare l'organizzazione scolastica, lasciando per grandissima parte alle Provincie l'obbligo di provvedere all'istruzione; e le riforme degli Istituti tecnici, come di qualsiasi altra scuola, salvo rarissime eccezioni, furon sempre fatte in maniera uniforme e generale.

8. Il primo mutamento dell'organizzazione degli Istituti tecnici si ebbe col Decreto del 14 agosto 1864.

Con esso non si parlò più di sezioni, ma di *scuole speciali* o *scuole riunite* e queste — forse perchè si volevano prevedere tutti i tipi che nelle singole Provincie, di fronte ai loro particolari

---

[1] Si allude qui all'art. 172 (§ 4) della legge sulle Amministrazioni provinciali e comunali del 20 marzo 1865 e alla relativa disposizione transitoria (art. 236).

bisogni, erano o sarebbero stati, in un avvenire più o meno prossimo, necessari — furono portate, non comprese le quattro scuole di nautica, al numero di 26 ([1]).

Come era da da aspettarsi, dato lo scarsissimo numero dei giovani che in quei primi anni si mostravano desiderosi di inscriversi all'Istituto tecnico, (nell'anno scolastico 1868-69 gli alunni inscritti a tutti gli Istituti tecnici d'Italia — escluse le scuole di nautica — non ammontavano ancora che a 4488), di coteste 30 scuole speciali o riunite ben poche riuscirono a funzionare: nè d'altra parte fu lasciata alle altre la possibilità di arrivare ad affermarsi poichè col regolamento del 1865 il numero delle scuole speciali (che tornarono a prendere il nome di sezioni), escluse sempre quelle di nautica, fu ridotto a 8.

9. Negli anni che corsero dal 1865 al 1871 non si ebbe nessuna riforma sostanziale degli Istituti (che il regolamento del 1865 ebbe a chiamare industriali e professionali), ma il Ministero attese con cura grandissima a moltiplicare gli strumenti di controllo sul loro andamento, e nulla fu trascurato perchè le loro lacune potessero esser messe in luce e perchè venisse in tal modo facilitata l'escogitazione degli opportuni rimedi.

Di questi, taluni trovarono la loro espressione in decreti parziali, come ad esempio quello del novembre 1869 sull'insegnamento del disegno e delle lettere; altri furon rimandati a più tardi, nell'attesa che si venisser maturando gli studi intrapresi per una nuova riforma generale.

10. E questa si ebbe con l'ordinamento dell'ottobre 1871 (approvato col R. Decreto del 30 marzo 1872) che costituisce il momento più importante della storia degli Istituti.

([1]) Eccone l'elenco:

Scuola speciale di Agrimensura; di Agronomia; di Arte ceramica; di Arte tintoria; di Arte vetraria; di Commercio; di Concia e rifinizione delle pelli; di Costruzioni; di Cotonificio; di Incisione industriale: di Incisione e stampa tipografica; di Industria dello zolfo, piriti, ecc.; di Lanificio; di Lanificio e Canapificio: di Litologia; di Meccanica; di Mineralogia industriale; di Metallurgia; di Ragioneria; di Setificio; di Telegrafia; di Strumenti fisici. Scuola riunita di Agronomia e Agrimensura; di Arte vetraria e ceramica di Commercio e Amministrazione; e di Meccanica e costruzioni.

Fino a quel tempo, infatti, il carattere eminentemente professionale di queste scuole, che per Quintino Sella fu uno degli argomenti più validi nel sostenere la convenienza di porle sotto la giurisdizione del Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio era stato sempre tenuto presente; e la stessa sezione fisico-matematica se da una parte rendeva possibile l'iscrizione a una facoltà universitaria, dall'altra era indirizzata alla formazione di abili periti meccanici e costruttori.

Ma il piano di studi elaborato dai riformatori del 1871-72 si inspirò a ben altri concetti. Per esso infatti gli studi degli Istituti son da considerare « siccome un vero e proprio insegnamento secondario, il quale, porgendo conveniente istruzione agli alunni che non possono consacrare maggior numero di anni alla scuola, pur nondimeno prepara agli studi superiori »; e in secondo luogo gli Istituti son da considerare « non già siccome umili centri di scuole applicate, ma bensì quali Istituti che racchiudono in sè un periodo di preparazione consacrato all'acquisto di una *coltura generale* sufficientemente vigorosa » (1).

In conformità di ciò, la durata dei corsi che per il regolamento del 1865 era di tre anni per tutte le sezioni, col nuovo ordinamento fu elevata a quattro o cinque; e nelle sezioni, ridotte a cinque (la fisico matematica, l'agronomica, la commerciale, quella di ragioneria (2), l'industriale) per il primo biennio, destinato alla cultura letteraria e scientifica generale, tutti gli insegnamenti furon resi comuni.

La sezione fisico-matematica, poi, divenuta il centro dell'istituto, si volle ordinarla come scuola che preparasse direttamente al 1° anno di applicazione di ingegneria (saltando cioè un biennio di studi universitari) e quindi, sebbene in seguito, per una strana incongruenza, *non* si desse al diploma di licenza da questa sezione il valore di certificato d'ammissione al detto 1° anno, le fu assegnato un assai vasto programma di matematica e di scienze na-

---

(1) MORPURGO: *L'istruzione tecnica in Italia* (Roma, 1875) pag. 20.

(2) Veramente la sezione di ragioneria non era totalmente distinta da quella commerciale. Per avere il diploma in ragioneria occorreva, dopo aver ottenuto quello della sezione commerciale, un quinto anno di studi complementari.

turali. Si pensi, per es., che i classici *Elementi di Geometria proiettiva* del Cremona e il suo grazioso opuscoletto su gli *Elementi di Calcolo grafico* furono scritti appunto perchè servissero da libri di testo negli Istituti tecnici.

Infine in ogni sezione, con grave carico dei professori e degli alunni, il numero delle ore di insegnamento fu assai aumentato: tanto che in qualche anno di corso arrivava a 41 settimanali!

11. Dopo la riforma di cui ora abbiamo dato notizia, che, illudendosi di poter conciliare con la distinzione in bienni comuni e separati e con orari impossibili, in un unico tipo di scuola due cose tanto differenti quanto la cultura secondaria *disinteressata*, preparativa agli studi superiori, e la cultura tecnica e professionale, segnò il punto di partenza della degenerazione e della disorganizzazione dell'Istituto, non si ebbero più riforme generali e sistematiche, ma cominciò la serie, nei primi anni di una rapidità inquietante [1], delle riforme parziali intese o a sanarne le incongruenze, o a semplificarne i programmi e mitigarne gli orari troppo gravosi, o, in prosieguo di tempo, a facilitare sempre più agli scolari il conseguimento del diploma di licenza [2] e della dispensa dal pagamento delle tasse.

Ma per illustrare chiaramente tutte le ragioni che han contribuito ad abbassare il livello delle nostre scuole secondarie in generale dovremmo entrare in considerazioni, che, qui, dato lo

---

[1] Circolare del 4 novembre 1872 per distribuire in maniera diversa da quella indicata dall'ordinamento dell'ottobre 1871 alcune materie d'insegnamento e per ridurre l'orario settimanale delle lezioni; circolare del 9 ottobre 1873 intorno allo svolgimento dei programmi di storia naturale; del 15 novembre 1873 per istruzioni intorno a quelli di fisica e chimica; del 4 settembre e 5 novembre 1875 per riduzioni o spostamenti nelle materie d'insegnamento e negli orari della sezione fisico-matematica; R. Decreto del 1° novembre 1875 per fondere in un'unica sezione quadriennale quelle di commercio e ragioneria; R. Decreto del 5 novembre 1876 e poi circolare del 26 ottobre 1877 per modificazioni nei programmi di tutte le sezioni, ecc.

[2] La circolare n. 649 del 3 settembre 1881 (mentre era Ministro l'on. Baccelli) comincia con queste precise parole: « *Il Ministro inteso ad usare negli esami le maggiori facilitazioni agli alunni*, ecc. ».

scopo della presente relazione, sarebbero fuori posto; e del resto la questione è tanto dolorosa che, potendo farne a meno, è meglio tacerne.

II.

L'insegnamento della matematica nelle scuole e negli istituti tecnici.

1. *Notizie statistiche, norme d'iscrizione, tasse, ecc.*

Le scuole tecniche ammontano presentemente a 325, di cui 236 sono *governative* e 89 *pareggiate*; gli istituti tecnici a 77, dei quali 60 *governativi* (¹) e 17 *pareggiati*. Le prime possono essere di *tipo comune*, con *indirizzo agrario*, con *indirizzo commerciale* o con *indirizzo industriale*; i secondi risultano da una combinazione di *sezioni*, scelte fra le seguenti cinque:

I. *Sezione fisico-matematica;*
II. *Sezione di commercio e ragioneria;*
III. *Sezione di agrimensura;*
IV. *Sezione di agronomia*;
V. *Sezione industriale.*

Delle 236 scuole tecniche governative:

182 sono di tipo comune,
29 hanno indirizzo agrario,
21 sono di tipo comune con sezione commerciale,
4 sono di tipo comune con sezione industriale.

Dei 60 istituti governativi:

2	constano di	5	sezioni,
9	»	4	»
38	»	3	»
9	»	2	»
2	»	1	sola sezione.

(¹) Fra questi 60 non è compreso quello di Cosenza, che appena da quest'anno ha cominciato a costituirsi.

e in essi:

la sezione	I	comparisce	complessivamente	57	volte
»	II	»	»	59	»
»	III	»	»	46	»
»	IV	»	»	9	»
»	V	»	»	9	» [1]

Quanto alla loro popolazione scolastica non siamo in grado di dar statistiche recentissime per mancanza di dati ufficiali: possiamo soltanto comunicare che negli anni scolastici 1905-06 e 1906-07 gli alunni di tutti gli istituti (governativi o non) ammontarono, rispettivamente, a 16700 e a 17420; e quelli di tutte le scuole tecniche (governative o non) a 55597 e a 58594. Ciò dà, per l'insegnamento tecnico, un totale di 72297 alunni per l'anno 1905-06, e un totale di 76014 alunni per l'anno 1906-07; e quindi, contrariamente a quel che avveniva prima, una frequenza di molto superiore a quella delle scuole classiche, dove, nell'anno 1905-06 il numero degli inscritti salì in totale, a 48038.

La durata del corso è di 3 anni per le scuole tecniche, di 4 per gli Istituti [2]; e in questi ultimi, durante il primo anno, l'insegnamento è comune ai giovani di tutte le sezioni, cosicchè i singoli alunni non son tenuti a dichiarare a quale sezione intendono inscriversi, se non al principio del secondo anno.

Tenendo presente questo fatto, per formarsi un'idea della distribuzione degli alunni di tutti i 77 istituti nelle varie sezioni, basta dare uno sguardo al seguente prospetto, che si riferisce sempre all'anno 1906-07.

---

[1] Qui si parla solo di sezioni e di sezioni *governative;* in taluni istituti infatti (Genova, Napoli, Trapani,) alle sezioni ordinarie sono aggregate delle scuole speciali, in altri (Ancona e Terni) alle sezioni gornative sono aggregate sezioni mantenute dai Comuni.

[2] Ad eccezione del corso della sezione industriale dell'istituto di Bergamo, la cui durata è di cinque anni.

SEZIONI	Istituti governativi		Istituti pareggiati		TOTALE
	alunni	uditori	alunni	uditori	
Anno comune	4820	—	948	—	5768
Fisico-matematica . . .	1902	—	539	—	2441
Commercio e ragioneria .	4164	—	822	—	4986
Agrimensura	1080	—	346	—	1426
Agronomia	29	—	—	—	29
Industriale	215	—	—	—	215
Uditori	—	126	—	31	157
Corsi speciali	—	1816	—	582	2398
Totale . .	12210	1942	2655	613	17420

Per essere inscritti alla prima classe tecnica occorre aver superato il così detto esame di *maturità* che può essere sostenuto da chi abbia frequentato per quattro anni le scuole elementari: per poter essere inscritto alla prima classe dell' Istituto basta presentare il diploma di licenza della scuola tecnica o, in caso contrario, sostenere un apposito esame di *ammissione.*

Per quanto poi riguarda il passaggio da una classe alla successiva, o, ciò che fa lo stesso, le modalità degli esami, crediamo inutile qui entrare in particolari; poichè si tratterebbe di disposizioni comuni a tutte le scuole medie. Del resto una legge già approvata dal Senato e che a quanto sembra sarà presto approvata pure dal Parlamento, per modo da poter essere promulgata per il prossimo anno scolastico, apporta modificazioni profonde al regolamento per gli esami ora vigenti.

Chiudiamo questo breve notiziario con un prospetto delle tasse che debbono essere pagate da chiunque voglia essere ammesso a frequentare una scuola o un istituto tecnico.

	Ammissione	Immatricolazione	Iscrizione	Licenza		Diploma
				Interni	Esterni	
Scuola Tecnica . . . L.	10	—	30	20	40	5
Sopratassa per esterni "	20	—	—	—	20	—
Istituto Tecnico . . . L.	40	20	72	75	130	10
Sopratassa per esterni "	20	—	—	—	20	—

2. ***Programmi.***

I programmi per l'insegnamento della Matematica presentano differenze più o meno leggere secondo il tipo della scuola tecnica o la sezione dell'Istituto che si considera: in ogni modo, nel primo caso, il programma fondamentale è quello delle scuole a tipo comune, nel secondo, quello della sezione fisico-matematica Perciò noi cominciamo dal riprodurre questi due: dopo di che ci sarà facile indicare quali modificazioni siano da apportarvi per ricavarne gli altri.

3. ***Programma di Matematica per le scuole tecniche a tipo comune.***

Classe I. (Orario settimanale, ore 4).

1. Nozioni preliminari. Numerazione. Le quattro operazioni fondamentali sui numeri interi e regole per eseguirle. Prove delle quattro operazioni. — 2. Divisibilità di un numero per un altro. Criteri per riconoscere se un numero intero è divisibile per una potenza di dieci o per uno dei numeri 2, 4, 8, 5, 25, 3, 9, 11. Prove per 9 e per 11 delle quattro operazioni sui numeri interi. — 3 Regola delle divisioni successive per calcolare il massimo comun divisore di due numeri interi. Caso di tre o più numeri. Numeri primi fra loro. — 4. Numeri primi. Regole per formare una tavola di numeri primi, per conoscere se un numero è primo, per decomporre un numero in fattori primi, per trovare tutti i divi-

sori di un numero e per trovare i divisori comuni di due o più numeri. — 5. Composizione del massimo comun divisore di più numeri mediante i loro fattori primi. — 6 Regola per calcolare il minimo multiplo comune di due o più numeri interi e gli altri multipli comuni. — 7. Frazioni ordinarie. Regola per trovare la parte intera di un numero frazionario, per ridurre una frazione ai minimi termini, per trasformare una frazione in un' altra equivalente di un dato denominatore, per ridurre le frazioni a denominatore comune o al minimo denominatore comune. — 8. Le quattro operazioni fondamentali sulle frazioni: regole per eseguirle Potenze di una frazione. — 9. Numeri decimali. Moltiplicazione e divisione di un numero decimale per una potenza di dieci. Regole per eseguire le quattro operazioni fondamentali sui numeri decimali. — 10. Riduzione di una frazione ordinaria in decimali. Decimali finiti e periodici. Riduzione di un numero decimale, finito o periodico, in frazione ordinaria. — 11. Sistema metrico decimale. — 12. Numerosi esercizi e facili problemi.

Classe II. (Orario settimanale, ore 4).

Aritmetica -- 1. Prodotti di più numeri interi e potenze di un numero intero. Moltiplicazione e divisione di due potenze di base eguale. Estrazione della radice quadrata da un numero intero e decimale e dalle frazioni. — 2. Numeri complessi. Riduzione di un numero complesso in frazione ordinaria e decimale e viceversa. Addizione e sottrazione dei numeri complessi. Conversione di misure antiche, specialmente del luogo, in misure del sistema metrico decimale. — 3. Rapporti e proporzioni fra numeri interi e frazionari. Dati tre termini di una proporzione, trovare il quarto. Proporzionalità diretta e inversa. Regola del tre, sia semplice, sia composta, col metodo delle proporzioni e con quello della riduzione all' unità. – 4. Regola per dividere un numero qualunque in parti proporzionali a numeri dati interi e frazionari. — 5. Numerosi esercizi e problemi relativi a tutte le parti del programma.

Geometria. — 1. Nozioni preliminari, assiomi, postulati. Angoli, rette perpendicolari ed oblique; principali teoremi intorno ai triangoli. — 2. Rette parallele; loro principali proprietà. Teoremi intorno ai parallelogrammi. Poligoni equivalenti. Trasformazione di un poligono in un triangolo equivalente e di questo in un qua-

drato equivalente. Teorema di Pitagora e sue applicazioni. — 3. Principali teoremi intorno al cerchio, alle seganti e alle tangenti di esso. — 4. Intersezione e contatto delle circonferenze — 5. Angoli nel cerchio. Triangolo e quadrilatero inscritti e circoscritti. — 6. Regole pratiche per la misura delle rette, degli angoli, dei triangoli, dei quadrilateri e dei poligoni. Problemi diversi.

Classe III. (Orario settimanale, ore 3).

Geometria. — 1. Linee (*sic*) proporzionali, triangoli simili e poligoni simili. — 2. Regole pratiche per la misura della circonferenza e della superficie di un circolo in funzione del raggio; e per la misura della superficie e dei volumi dei principali solidi geometrici, premesse le necessarie definizioni e nozioni. — 3. Esercizi numerici e problemi. Problemi inversi, premessa la regola pratica per l'estrazione della radice cubica da un numero intero e dalle frazioni.

Calcolo letterale. — 1. Nozioni preliminari. Prime quattro operazioni sulle quantità intere e frazionarie (omessa la divisione dei polinomi per polinomi). — 2. Equazioni di 1° grado a un'incognita. Esercizi e facili problemi. — 3. Sistemi di più equazioni di primo grado con altrettante incognite. Diversi metodi di eliminazione [1].

4. Il programma di Matematica e l'orario settimanale delle scuole tecniche di tipo comune restano immutati per quelle con indirizzo agrario o industriale: modificazioni si hanno solo per le scuole tecniche con indirizzo commerciale. In queste il programma si riduce a quello di *aritmetica* e al solo n. 6 di quello di *geometria* delle scuole di tipo comune. Di più, l'orario settimanale consta di ore 4, 2 e 2, rispettivamente, per le classi I, II e III [2].

---

[1] Quest' ultimo numero del programma di calcolo letterale è obbligatorio solo per gli alunni che intendono passare agli istituti nautici.

Riguardo all'orario settimanale, vi è poi da osservare che per le scuole o per le sezioni femminili esso non è di ore 4, 4 e 3 per le rispettive classi I, II e III, ma sempre di ore 3.

[2] O di ore 3, 2 e 2 se si tratta di una scuola o di una sezione femminile.

5. *Programma per la sezione fisico-matematica dell'Istituto.*

Classe I. (6 ore settimanali).

Aritmetica e Algebra. — 1. Teoria delle quattro operazioni sui numeri interi. — 2. Teoremi fondamentali sulla divisibilità dei numeri interi; sui numeri primi. Massimo comun divisore e minimo comune multiplo di due o più numeri — 3. Teorica delle frazioni ordinarie. Riduzione delle frazioni ordinarie in decimali. — 4. Generalità sul calcolo letterale e sulle formule algebriche. — 5 Numeri negativi. Addizione e sottrazione algebriche. Quadrato di un polinomio. Cubo di un binomio e di un trinomio. — 6. Frazioni algebriche. Esponente nullo; esponenti negativi. — 7. Equazioni di 1° grado ad una incognita. Sistemi di equazioni di 1° grado in cui il numero delle incognite eguaglia quello delle equazioni. Problemi di 1° grado Interpretazioni delle soluzioni negative.

Geometria. — 1. Nozioni preliminari. Segmenti, angoli; rette perpendicolari, oblique. Casi semplici di uguaglianza dei triangoli, dei poligoni. Rette parallele. Proposizioni relative ai parallelogrammi. — 2. Circonferenza. Rette seganti e tangenti. Intersezioni e contatto delle circonferenze. Angoli inscritti nella circonferenza. Triangolo e quadrilatero inscritti o circoscritti alla circonferenza, Poligoni regolari. — 3. Teoremi intorno ai rettangoli e ai quadrati delle rette (*sic*) divise in parti. Parallelogrammi e triangoli equivalenti. Teorema di Pitagora. — 4 Teoria delle proporzioni fra grandezze. Teorema di Talete e conseguenze. Nozioni sulla divisione armonica delle rette (*sic*). Triangoli e poligoni simili. Trasversali nella circonferenza.

Classe II. (5 ore settimanali).

Aritmetica e Algebra. — 1. Costanti e variabili, prenozioni sui limiti. — 2. Numeri decimali periodici e loro frazioni generatrici. — 3. Nozioni sui numeri irrazionali e sulle operazioni ad essi relative. — 4. Regola per l'estrazione della radice quadrata dai numeri interi e frazionari. — 5. Calcolo dei radicali. Esponenti frazionari. — 6 Equazione generale di 2° grado ad una incognita. Discussione delle soluzioni. Relazione tra i coefficienti e le radici della equazione. Esempi di equazioni riducibili al 1°

e 2° grado. — 7. Rapporto di due grandezze. Teoria delle proporzioni fra i numeri — 8. Progressioni per differenza e per quoziente. — 9. Formule dell'interesse semplice e composto. Sconto. Annualità. Ammortamento. — 10. Logaritmi. Uso delle tavole. Applicazioni.

Geometria. — 1. Area del rettangolo, del parallelogramma, del trapezio, di un poligono regolare. Rapporto dei perimetri e delle superficie di due poligoni simili. — 2. Rapporto costante della circonferenza al suo diametro. Cenno intorno a qualche metodo per determinarlo. Rapporto costante della superficie di un circolo al quadrato del raggio. Misura della circonferenza e della superficie di un circolo. Formole per determinare la lunghezza di un arco e l'area di un settore circolare. — 3. Rette e piani perpendicolari o paralleli. Angoli diedri. Angoli poliedri. — 4. Prisma, parallelepipedo, piramide. Poliedro. — 5. Volumi del parallelepido, del prisma, della piramide, di un tronco di prisma o di piramide, di un poliedro. — 6 Piramidi e poliedri simili. Rapporto dei volumi di due poliedri simili. — 7. Cilindro e cono rotondi. Aree e volumi del cilindro, del cono, del tronco di cono. — 8. Sfera. Aree della zona ferica e della sfera. Volume del settore sferice, del segmento sferico, della sfera.

CLASSE III. (5 ore settimanali).

Algebra. — 1. Sulle disuguaglianze di 1° e 2° grado. Problemi di massimo e minimo. — 2. Interpretazioni di espressioni che si presentano sotto forma indeterminata (*sic*). — 3. Frazioni continue.

Geometria. — 1. Figure simmetriche rispetto ad un punto, ad una retta, ad un piano. — 2. Figure simili. Figure omotetiche.

Elementi di Geometria descrittiva. — 1. Metodo delle proiezioni ortogonali. Rappresentazione e problemi più ovvi relativi al punto, alla retta e al piano. — 2. Cenni sulla rappresentazione dei solidi.

Trigonometria piana. — 1. Le funzioni trigonometriche. Loro variazioni. Relazioni tra le funzioni trigonometriche di uno stesso arco. Espressioni degli archi aventi una data funzione trigonometrica. — 2. Formule trigonometriche per l'addizione e la sottrazione degli archi, Formule per la moltiplicazione e per la bisezione degli archi. Formule per la trasformazione in prodotti o

quozienti di somme o differenze di due funzioni trigonometriche. — 3. Determinazione diretta delle funzioni trigonemetriche di archi particolari. Disposizione ed uso delle tavole trigonometriche. Uso degli angoli ausiliari nelle calcolazioni trigonometriche. Risoluzione di equazioni trigonometriche. — 4. Relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettilineo. Casi ordinari di risoluzione dei triangoli rettangoli e dei triangoli obliquangoli. — 5. Diverse espressioni dell'area di un triangolo. Raggi del circolo circoscritto ad un triangolo e dei circoli tangenti ai lati del medesimo. Quadrilatero inscrittibile nel cerchio. — 6. Casi di risoluzione dei triangoli in cui i dati non siano solamente lati ed angoli. Alcune operazioni sul terreno. Problema dei quattro punti.

Classe IV. (5 ore settimanali).

Algebra. — 1. Disposizioni, permutazioni, combinazioni. — 2. Potenza intera e positiva d'un binomio. — 3. Analisi indeterminata di 1° grado.

Geometria. — 1. Sezioni del cono retto circolare e deduzione delle loro principali proprietà. — 2. Triangolo sferico. Casi semplici di uguaglianza dei triangoli sferici. — 3. Area del fuso, del triangolo e del poligono sferico. Volume dello spicchio, della piramide e del segmento sferici. — 4. Teorema di Eulero sui poliedri convessi. Poliedri regolari euclidei.

Trigonometria sferica. — 1. Relazione fra quattro elementi (lati ed angoli) di un triangolo sferico. — 2. Relazioni fra 5 e fra 6 elementi del triangolo sferico. — 3. Casi semplici di risoluzione dei triangoli sferici.

6. Le distinzioni fra le varie sezioni dell'Istituto per quanto riguarda l'insegnamento della matematica non cominciano a presentarsi che al 3° anno di corso, salvo, come ora vedremo, qualche rara eccezione: nei primi due anni l'insegnamento è comune a tutte le sezioni e vien fatto sempre secondo i programmi ora indicati.

Ma mentre dopo il primo biennio le sezioni di commercio e ragioneria e di agronomia non hanno più affatto insegnamento di matematica, agli alunni delle sezioni di agrimensura vengono svolte la trigonometria piana e la geometria descrittiva dai professori di topografia e di costruzioni secondo i seguenti programmi:

Elementi di trigonometria rettilinea. — 1. Funzioni trigonometriche. Loro variazioni. Relazioni fra le funzioni trigonometriche di uno stesso arco. Espressione degli archi aventi una stessa funzione trigonometrica. — 2. Formule trigonometriche per l'addizione e la sottrazione degli archi. Formule per la trasformazione in prodotti o quozienti di somme o differenze di due funzioni trigonometriche. Uso degli angoli ausiliari per la trasformazione di formule in altre calcolabili coi logaritmi. — 3. Determinazione diretta delle funzioni trigonometriche di archi particolari. Disposizione ed uso delle tavole trigonometriche — 4. Relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo rettilineo. Casi ordinari di risoluzione di triangoli rettangoli ed obliquangoli.

Nozioni di geometria descrittiva. — 1. Rappresentazione del punto, della retta e del piano su due piani di proiezione — 2. Problemi relativi al punto, alla retta e al piano. — 3. Superficie sferiche. cilindriche e coniche, Piano tangente. Sezioni piane. Sviluppi. Intersezioui — 4. Applicazioni elementari al taglio delle pietre e dei legnami ed alle ombre,

7. Meno facile è render conto dell'insegnamento della matematica nella sezione industriale poichè esso è fatto secondo programmi differenti da Istituto a Istituto.

In ogni modo è bene fermarsi un momento su qualche particolare, perchè avremo occasione di trarne una conferma ad alcuni apprezzamenti sulle tendenze generali dell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie.

I nove Istituti che posseggono una sezione industriale sono quelli di Bergamo (per periti industriali di meccanica, chimica, tessitura e filatura), Livorno (per periti costruttori meccanici ed elettricisti), Napoli (per periti industriali in meccanica ed elettrotecnica), Roma (per periti per le costruzioni e industrie meccaniche), Terni (per periti industriali nella meccanica e nella metallurgia), Torino (per periti industriali in meccanica e tessitura), Trapani (per periti industriali in elettrotecnica), Udine (per periti industriali in meccanica) e Venezia (per periti industriali nelle costruzioni e nella meccanica).

Ora in tutti questi Istituti, tranne quelli di Terni e di Udine, l'insegnamento della matematica per i primi due anni di corso è identico a quello delle altre sezioni; mentre in quelli di Terni e Udine, nella 2ª classe, i giovani della sezione industriale oltre le

5 ore settimanali di matematica che hanno in comune con quelli delle altre sezioni, ne hanno altre 2, durante le quali, a Terni, vengono svolte la trigonometria piana e « le costruzioni per punti e proprietà più elementari dell'elisse, dell'iperbole e della parabola », e a Udine, oltre queste teorie, vengono studiate le « formule per il calcolo approssimato delle aree e dei volumi ».

Nella 3ª classe, per ogni Istituto, eccettuati quelli di Udine e Venezia, si ha l'insegnamento della geometria descrittiva secondo il programma riportato più innanzi della sezione di agrimensura, con un orario di 3 (Bergamo, Roma, Terni) o 4 (Livorno, Napoli, Torino, Trapani) ore settimanali: mentre in quello di Udine la geometria descrittiva non è insegnata affatto e in quello di Venezia viene svolta agli alunni della sezione industriale insieme con quelli della sezione fisico-matematica.

Oltre a ciò, a Bergamo e Venezia, durante la 3ª classe, gli alunni della sezione industriale hanno l'insegnamento della matematica in comune con quelli della sezione fisico-matematica, a Napoli e a Trapani, durante le classi 3ª e 4ª, tale comunanza sussiste per il programma, ma non per l'orario settimanale (ridotto da 5 a 3 ore); a Livorno, nel 1º semestre della 3ª classe, si hanno due ore settimanali di trigonometria piana; a Roma e Terni si hanno tre o due ore settimanali di matematica complementare secondo i programmi che qui riportiamo:

A) *Alcuni principî sulle approssimazioni numeriche.* — 1. Errore nel calcolo di una somma, d'una differenza, d'un prodotto, d'un quoziente, d'una radice quadrata [1]. — 9. Nozione di funzione e di limite. Teorema relativo ad una costante compresa tra due funzioni che tendono a uno stesso limite. Limiti dei quozienti:

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}, \quad \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}, \quad \frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}.$$

10. Equazione della parabola riferita all' asse ed al vertice. Area di un segmento parabolico compreso fra la curva, l' asse e due ordinate. Area di un segmento compreso fra una curva, l' asse

[1] I numeri 2, 3, ... 8 del programma non si trascrivono perchè si riferiscono alla trigonometria piana.

e due ordinate, quando l'ordinata e l'ascissa sono legate dalla relazione:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

11. Formula di Simpson per la valutazione approssimata delle aree. — 12. Equazione dell'ellisse riferita ai due assi. Area d'un segmento compreso fra l'ellisse, uno dei suoi assi e due parallele all'altro asse. — 13, Ricerca del volume di alcuni corpi, con la scomposizione in segmenti di uguale altezza, calcolando il limite della somma dei prismi inscritti e circoscritti. — 14 Ripetizione ed esercizi sul programma del 1° biennio, e particolarmente sulla stereometria.

B) *Complementi d'algebra.* — 1. Combinazioni. — 2. Limiti. — 3. Frazioni continue. — 4. Incrementi infinitesimi delle variabili e delle funzioni. Loro rapporto e somma. Massimi e minimi. Minimi quadrati. — 5. Risoluzione delle equazioni numeriche per approssimazione.

Complementi di geometria. — 1. Cenno sulle coordinate ortogonali e polari. — 2, Equazioni delle coniche e di qualche altra curva importante.

8. *Scopo dell' insegnamento della matematica nelle scuole e negli Istituti tecnici.*

Come già abbiamo avuto occasione di fare osservare, le scuole tecniche hanno un duplice ufficio: da una parte esse costituiscono una scuola a sè di modesta cultura generale per gli alunni che intendono conseguire piccoli impieghi nelle amministrazioni private o in quella dello Stato — cioè una scuola popolare superiore avente fine in sè stessa — dall'altra esse sono frequentate da alunni che poi proseguono gli studi nell'Istituto e quindi funzionano da scuole di 1° grado preparatorie a quelle di 2°.

Una tale duplicità di ufficio, come è ben chiaro, si accorda male con l'unicità dell'insegnamento, e quindi le scuole tecniche — a cominciare dal 1862, da quando cioè Quintino Sella ebbe a dire, con ragione, che in esse « di tecnico non vi è assolutamente nulla » — hanno sempre suscitato le critiche più amare di tutti quelli che si sono occupati di questioni scolastiche.

Delle riforme intese ad attenuare inconvenienti così gravi furono tentate nel 1880 e nel 1885 stabilendo a un certo punto del corso una separazione fra le due specie di alunni, ma esse furon presto, l'una volta e l'altra, abrogate, e da una ventina di anni a questa parte gli insegnanti delle scuole tecniche si affaticano invano nella hegeliana impresa di conciliare gli opposti.

Pure non può dirsi che in tale impresa la parte più difficile sia riserbata ai professori di matematica. Poichè nell'istituto l'educazione matematica elementare vien ripresa *ab imis*, lo scopo di questo insegnamento nelle scuole tecniche per entrambe le specie di alunni si riduce a quello di presentar loro una larga messe di fatti aritmetici e geometrici, avvivati da esercitazioni continue e da applicazioni diverse; quindi se l'insegnante, in conformità delle istruzioni regolamentari, si limita a stabilire delle definizioni precise, a dare delle regole chiare e poco numerose, ad enunciare, dopo averne fatta risaltare l'utilità mediante esempi opportunamente scelti, i teoremi fondamentali e a dare di questi, quando dagli *scolari* ne sia sentito il bisogno, una *qualsiasi* giustificazione atta a renderli *persuasivi*, egli avrà pienamente soddisfatto al suo compito, in quanto che da un canto avrà dato agli alunni, che con la scuola tecnica finiscono i loro studi, un largo corredo di cognizioni utilissime, dall'altro avrà saputo suscitare in quelli che passano all'Istituto il desiderio di avere della matematica elementare una esposizione sistematica e razionale.

Meno lieta è invece la posizione del professore di matematica nell'Istituto, poichè, qui, non solo egli si trova dinanzi alunni che perseguono fini differenti, ma inoltre la distribuzione della materia nei programmi delle varie classi non è certo fatta in modo da agevolargli la risoluzione del suo difficile problema didattico.

Come è stato già detto, l'insegnamento della matematica nelle prime due classi è comune agli alunni di tutte le sezioni, e quindi vengono a trovarsi insieme giovani che dall'Istituto intendono passare all'Università e giovani che non ad altro mirano se non al conseguimento del diploma di ragioniere, di perito agrimensore o di perito industriale.

D'altra parte, poichè in talune sezioni l'addensarsi delle materie professionali nelle ultime due classi non ha permesso di dare allo studio della matematica una durata che ecceda il primo biennio, per avere anche in esse un insegnamento di questa ma-

teria — elementare, ma completo, si è dovuto concentrare nelle prime due classi un programma di matematica corrispondente esattamente a quello che, prima dell' ultima riforma dei licei, costituiva, insieme con la trigonometria, il programma di tutto il ginnasio superiore e di tutto il liceo.

Così, per es., nel primo anno di corso dell' Istituto, a giovanetti, che ordinariamente non hanno più di 14 o 15 anni, si deve svolgere un ampio programma di aritmetica razionale e di algebra, e poi tutta la geometria piana ad eccezione della teoria della misura; e nel secondo anno, dove fra gli scolari si trovano ancora aspiranti ragionieri e futuri agrimensori, la difficoltà proveniente dall'ampiezza del programma è aumentata dalla presenza delle teorie più delicate della matematica elementare (limiti, irrazionali, rettificazione della circonferenza, quadratura del cerchio e cubatura di solidi).

Ma tutto ciò non sarebbe molto grave se istruzioni ufficiali, dopo aver stabilito che l' insegnamento della matematica negli Istituti ha lo scopo di « fornire un complesso di cognizioni utili per sè stesse ed indispensabili all' apprendimento di altri studi », di « rafforzare le facoltà della mente » e « di abituare all' esattezza del linguaggio e del ragionamento », non dicessero in maniera esplicita che « il rigore scientifico deve essere osservato in ogni parte della trattazione del programma » e che non si deve anteporre « mai alla severità del ragionamento il pregio apparente di una seria facilità ».

Fortunatamente l' aver raccolto nei programmi delle prime due classi la più gran parte di quella che per tradizione si chiama matematica elementare, e, d' altra parte, il non voler invadere per nessuna maniera il campo dell' insegnamento universitario, ha costretto a formulare per le ultime due classi della sezione fisico-matematica dei programmi assai poveri di contenuto; quindi parecchi professori riserbano al secondo biennio una esposizione completa di taluni argomenti che nel primo, sebbene prescritti dai programmi, essi si accontentano di accennare.

Ma di ciò non possiamo parlare con chiarezza se non passando all' esposizione dello stato effettivo dell' insegnamento della matematica negli istituti.

9. ***Stato di fatto dell'insegnamento della matematica negli istituti tecnici.***

I professori di matematica delle scuole secondarie si distinguono, in Italia, fra tutti i loro colleghi per l'amore appassionato che portano alla scuola e alle questioni che vi si riconnettono. Hanno fondato da anni un'Associazione (*Mathesis*) che ha scopi *puramente didattici*, si riuniscono frequentemente in Congressi e pubblicano dei periodici di matematica elementare, taluni dei quali veramente notevoli; quindi chi voglia formarsi un'idea dello stato del loro insegnamento ha dinanzi a sè un largo e prezioso materiale.

Noi ne abbiamo tenuto, naturalmente, il massimo conto, mettendolo a raffronto con la nostra esperienza quasi decennale; in ogni modo, per garanzia di esattezza, non abbiamo mancato, promovendo un'inchiesta fra i colleghi, di procurarci dati di fatto miniti e precisi (1).

Così le nostre osservazioni, che già ci si erano presentate spontanee, vengono ad avere dai risultati dell'inchiesta la più efficace documentazione.

Una delle domande del questionario spedito ai colleghi chiedeva appunto se nel primo biennio essi riuscivano a svolgere, nel tempo prescritto, i programmi regolamentari.

Ebbene, eliminate le risposte dubbie, tredici colleghi hanno risposto decisamente no; sei han detto di riuscirvi, ma con tagli

---

(1) Ecco i nomi dei colleghi che con squisita cortesia vollero prendere in considerazione la nostra circolare e cui ci è caro rendere i ringraziamenti più cordiali:

Amaldi, Amodeo, Amici, Ascoli, Aussant-Carà, Balestra, Bevilacqua, Bini, Bonfantini, Borriero, Bosi, Buonerba, Caldarera, Carlini, Castelli, Catania, Cordone, Dell'Agnola, De-Sanctis, Di Dia, D'Incà-Levis, Fazzini, Fellini, Finzi, Fiore, Foà, Fulco, Giacomini, Giovannini, Leoncini, Maccaferri, Marenghi, Martinelli, Mignosi, Misani, Modigliano, Monteverde, Muzio, Neppi-Modona, Ortu-Carboni, Padoa, Pagliano, Palatini, Pannelli, Pinna, Riboni, Rimondini, Sforza, Strina, Testi, Trevisan, Vallerini, Veneroni, Viti, Zecca.

A questi bisogna aggiungere i professori di Matematica degli istituti pareggiati di Rimini e Varese.

più o meno cesarei, e dodici hanno risposto affermativamente senza alcuna dichiarazione di sorta. Ma è probabile che anche fra questi taluno sia costretto a mutilare qualche teoria o ad esporla in forma molto concisa e che rispondendo non abbia badato a circondar di riserve il proprio *sì*, poichè fra essi si trova, per es., un insegnante di un Istituto dove, per quanto mi consta da altra via, i professori han sostituito (e con molto buon senso) ai programmi governativi, dei programmi ben differenti e per l'estensione e per la distribuzione della materia; quindi credo di poter asserire senza timore d'andar molto lontano dal vero che nella maggioranza dei nostri Istituti, specialmente in quelli delle grandi città, la materia del 1° biennio non viene svolta per intero.

Le teorie più sacrificate sono, nel primo anno, quelle della similitudine e dell'equivalenza, quando non si ricorra forse più opportunamente, a qualche taglio nell'aritmetica; e nel secondo quelle degli irrazionali e della geometria solida; ma va da sè che ogni insegnante trova poi negli ultimi due anni il modo di riparare, per gli alunni della sezione fisico-matematica, alle omissioni cui è stato costretto nel primo biennio.

Per il secondo biennio la domanda analoga alla precedente non fu fatta; bensì si chiedeva quali modificazioni venivan portate ai programmi, poichè pareva che l'orario di cinque ore settimanali e l'aver a che fare con giovani aspiranti agli studi superiori di Matematica pura o applicata permettessero di dare all'insegnamento nella 3ª e 4ª classe, con qualche aggiunta opportuna, una maggiore sistematicità.

E difatti, ad eccezione di due colleghi, che han dichiarato di fare a tempo a svolgere i programmi del 1° biennio, ma non quelli del 2° o quello della sola 3ª classe, tutti gli altri aggiungono, nella 3ª e 4ª classe, alla materia del programma qualche teoria complementare.

Così taluno svolge la geometria del triangolo, qualche altro la geometrografia; vi son colleghi (ma son pochi purtroppo!) che nella 3ª classe introducono decisamente la nozione di derivata di una funzione e se ne valgono da un canto per semplificare le teorie dei massimi e minimi e le ricerche di limiti, dall'altra per dare alla loro esposizione, resa più sistematica, un'andatura più svelta e una portata più generale: parecchi poi integrano con le teorie delle trasversali nei triangoli, dei gruppi armonici, della po-

larità rispetto a un cerchio e dei sistemi lineari di cerchi o di sfere il programma di geometria della 3ª classe. Non manca infine chi cambia da anno ad anno le teorie complementari (logica matematica, equazioni di 3° e 4° grado; probabilità; determinanti; calcolo vettoriale; trasformazioni per raggi vettori reciproci; matematica attuariale; elementi di geometria analitica; poliedri regolari di specie superiore ecc.), regolandosi talvolta sui bisogni della scolaresca: e vi è pure chi dedica qualche lezione a una rapida scorsa attraverso la storia della Matematica elementare.

Alla geometria descrittiva fu dedicata una domanda apposita, appunto perchè ci risultava che di solito essa è trascurata; e difatti diciassette colleghi ci han risposto che o non l'espongono affatto o la riducono a poche notizie non accompagnate dall'esecuzione di appositi disegni.

Di fronte a questi, tralasciando i cinque che han risposto di far eseguire qualche tavola solo per eccezione, ve ne son ventuno che si comportano diversamente (un collega anzi si vale del disegno e della costruzione di modelli di cartone anche nell'insegnamento della geometria piana e solida); ma, se si tien conto che in qualche Istituto la geometria descrittiva viene insegnata insieme agli alunni della sezione fisico-matematica e a quelli dell'agrimensura, si può concludere che per gli alunni della sezione fisico-matematica, dove questa sezione ha al terzo anno un insegnamento completamente separato, la geometria descrittiva viene più spesso soppressa che svolta.

Un'altra domanda che forse a qualche collega (a giudicarne da un paio di risposte) è parsa indiscreta riguardava il numero dei compiti assegnati per casa o in iscuola e il modo di correggerli; pure questa, insieme con le altre tre relative ai libri di testo e alla loro utilizzazione [1], era rivolta ad ottenere con mezzi semplici e sicuri un'idea chiara dei nostri metodi d'insegnamento.

Chi scrive credeva, per es., anche prima dell'inchiesta, che, indipendentemente dall'aumento della popolazione scolastica e dal disastroso sistema delle classi aggiunte che alleggerisce le spese

---

[1] La statistica dei manuali adoperati negli Istituti e le altre notizie cui più sopra si allude saranno riportate nella relazione che verrà pubblicata più tardi sui nostri libri di testo.

dell'erario ma sfibra gli insegnanti ed è l'origine prima della decadenza precipitosa delle nostre scuole medie, la tendenza verso il rigore esagerato e il formalismo dovesse, qua e là, accompagnarsi con l'altra di dar poco peso alle esercitazioni pratiche e in genere ai compiti da eseguirsi a casa o nella scuola.

Un professore che esponga, per es., l'aritmetica razionale secondo le notissime pubblicazioni del Peano e dei libri di testo ad esse inspirati, o che creda, sul serio, di non poter procedere a una trattazione scientificamente corretta della geometria se non perda giorni e giorni di lezioni sui suoi primi principii, non solo si toglie da sè la possibilità di assegnare frequentemente dei compiti [1], ma rivela attitudini e preferenze intellettuali che non sono certo quelle più indicate per procedere agli esercizi e alle applicazioni.

Oltre di che, un povero ragazzo che assista, tra lo sgomento e la maraviglia, alle infinite cautele rigoristiche del suo professore, deve trovarsi così a disagio nell'armatura logica che gli vien presentata — se pure, riesce a rivestirsene — che la più semplice quistione da risolvere diventerà per lui un enigma indecifrabile.

Io ricordo che in 4ª e 5ª ginaasiale il nostro professore ci dava e noi sapevamo risolvere dei problemi di aritmetica ragionata: ma so anche, per esperienza, che il modo più sicuro per bocciare i nove decimi di una classe, cui sia stata insegnata l'aritmetica secondo i metodi formalistici in voga, è quello di proporre agli alunni la risoluzione di un esercizio siffatto.

Ora è chiaro che nessun insegnante può rassegnarsi ad andare incontro a delusioni così gravi; e allora è facile prevedere che, se non cambia metodo d'insegnamento..., sopprimerà, fin che gli è possibile i compiti scritti.

Per questa ragione e per le altre, cui, attesa l'indole di questa relazione, abbiamo accennato più brevemente, *sebbene non ce ne sfuggisse la portata ben più notevole e larga,* non ci ha fatto nessuna maraviglia di apprendere che qualche collega dà pochissimi

---

(1) A questo proposito credo doveroso dichiarare: 1° che qui non faccio delle ipotesi, ma alludo a fatti reali; 2° che i professori in discorso *non* sono quelli che tutti conoscono come apostoli del formalismo. Gli inconvenienti gravi di certe tendenze non si manifestano tanto in quelli che le promuovono, quanto in quelli che le seguono.

compiti e che vi sono Istituti in cui non se ne danno che uno o due al mese.

So bene che molti seguono ancora il buon sistema antico di darne due per settimana, uno per casa e l'altro in classe, o uno per settimana, ma in classe; so bene che varî colleghi, meritevoli senz' altro della più ampia lode, con grave carico personale, per ottenere la massima *sincerità* nei lavori in classe arrivano a dare temi distinti, ma affini, ai propri alunni o singolarmente, o distinguendoli in gruppi, e che la *grande* maggioranza non trascura questa parte dell'insegnamento che è senza alcun dubbio la più vitale; ma l'infiltrarsi anche nell'Istituto e per la Matematica — cosa che qualche anno fa sarebbe parsa un'eresia — la poca simpatia pei lavori scritti non è un fenomeno di cui sia possibile rallegrarsi.

10. *Considerazioni generali sulle tendenze dell' insegnamento matematico elementare.*

Come è ben noto e come è stato messo ampiamente in luce dal Klein in una sua opera recente, da un secolo o poco più tra l'insegnamento medio della Matematica e quello superiore si è stabilita una separazione che si è venuta facendo sempre più rigida e netta, e i meravigliosi progressi compiuti da questa scienza nel secolo decimonono non hanno avuto quasi alcun riflesso nelle scuole secondarie.

Ma per quanto riguarda l' Italia questa considerazione deve esser precisata e chiarita.

E infatti se si osserva che i maggiori matematici del secolo scorso hanno svolto la loro prodigiosa attività secondo due indirizzi diversi, in quanto che da una parte hanno atteso a moltiplicare le teorie o ad arricchirle di nuove verità, e dall'altra han badato a dar loro, mediante critiche minute e profonde, un' organizzazione logica perfetta, non può dirsi che tale attività sia rimasta in Italia totalmente inefficace.

Basta mettere a raffronto i libri di testo che si usavan nelle nostre scuole un quarant'anni fa con quelli che si adoperano oggi, perchè la superiorità di quest'ultimi, per quanto ha tratto all'esattezza ed al rigore, si renda immediatamente manifesta; e lo stesso Klein, discorrendo dell'evoluzione dell'insegnamento geometrico in Francia, in Germania, in Inghilterra e in Italia, trova nell' alto

valore scientifico dei nostri migliori libri di geometria elementare il carattere peculiare del nostro movimento didattico. Se non che, codesto nostro amore per il rigore logico, se dimostra che non siamo rimasti inerti di fronte ai progressi della critica dei fondamenti, è pure, oggi, una delle più energiche cause di quella soluzione di continuità cui si alludeva più sopra.

Dopo aver osservato, con gravissimo scandalo, che, per es., in Euclide, il numero dei postulati taciti superava di gran lunga il numero di quelli esplicitamente enunciati, noi non solo ci siamo posti a distinguer con cura meticolosa le proposizioni primitive da quelle dimostrate — facendo con ciò opera necessaria e lodevole di onestà scientifica — ma abbiamo voluto anche ridurre al minimo il numero delle prime e nel far questo spesso siamo arrivati ad esagerazioni che io non esito a qualificar per morbose. È avvenuto così che i nostri libri di testo sono diventati sempre più ampi per numero di pagine, ma sempre più poveri per quantità di contenuto: quindi la sostanza della materia trattata essendo rimasta la stessa, la separazione fra la Matematica elementare e quella superiore non è certo diminuita Nè può dirsi che l'abbiamo diminuita, quando abbiamo introdotto nel nostro insegnamento la geometria del triangolo o la geometrografia; quando si è fatto ricorso ai simboli della logistica o si è costituita in vasta teoria la discussione dei problemi di 2° grado; o quando infine certe nozioni fondamentali (coordinate cartesiane, derivate, ecc.) le abbiamo introdotte nel nostro bagaglio tradizionale non perchè vi agissero energicamente fecondandolo e trasformandolo, ma perchè aumentassero il catalogo degli argomenti slegati che costituiscono il nostro insegnamento nel secondo biennio della sezione fisico-matematica (1).

Come già ho avuto occasione di ricordare vi sono colleghi che l'han rotta francamente con la tradizione e che nel secondo biennio in discorso introducono e sfruttano sistematicamente le nozioni di funzione e di derivata, ricorrendo anche a rappresentazioni grafiche e mostrando le applicazioni immediate a questioni fisiche

---

(1) Sintomatico e curioso è a questo riguardo il pudore col quale alcuni trattatisti si guardano dal *nominare* le derivate. Poichè per alcuni in un libro elementare certe teorie non possono comparire se non a patto di un decente travestimento.

fondamentali; ma son troppo pochi [1], nè son quelli che, fino ad ora almeno, abbiano dato il tono alle nostre discussioni didattiche. Le quali, se hanno suscitato sempre l'interesse dei professori di Matematica, sono state pur sempre unilaterali e monotone.

Si percorrano gli atti di *Mathesis* dal suo inizio sino ad oggi o le annate dei nostri periodici di matematica elementare; si vedrà facilmente che a tutte le discussioni e a tutte le proposte soggiace in ogni caso la veduta che la materia da svolgere debba esser sempre quella tradizionale, salvo a sfrondarne qua e là qualche

---

[1] È probabile che una delle più potenti ragioni a non farne crescere il numero sia l'ostacolo frapposto a certe troppo libere interpretazioni dei programmi governativi dal fatto che il tema scritto di Matematica per gli esami di licenza della sezione fisico-matematica è mandato dal Ministero. Donde la necessità di orientare i propri scolari verso un determinato ordine di considerazioni e di problemi.

A questo proposito può essere utile riportare qui gli ultimi quattro temi spediti dal Ministero, di cui i primi due si riferiscono all'autunno 1910 e gli altri al luglio 1911.

I. In un circolo sono condotte due corde, fra loro perpendicolari, che si tagliano internamente ad esso. Calcolare la lunghezza delle medesime, conoscendosi la loro somma, la misura del raggio del circolo e l'area del rettangolo contenuto dalle due parti in cui ciascuna corda è divisa dall'altra.

Discussione dei risultati.

II. Calcolare le misure dei tre lati di un triangolo rettangolo, conoscendosi la sua area e quella della superficie totale del solido generato dalla rotazione del triangolo intorno all'ipotenusa.

Discussione dei risultati.

III. Due corde uscenti da un punto di una circonferenza di raggio r fanno tra loro un angolo ϕ ed hanno una somma uguale a un dato segmento a. Trovare le lunghezze delle corde e discutere la soluzione. Applicazione a uno qualunque dei casi nei quali $\phi = 30°$, $\phi = 60°$, $\phi = 90°$.

IV. Un tetraedro regolare è segato da un piano, parallelo a una delle facce, in un triangolo che si assume per base di un prisma retto inscritto nel tetraedro.

A qual distanza dal vertice opposto a quella faccia bisogna condurre il piano secante, in modo che l'area laterale del prisma sia uguale a quella di un quadrato dato?

teoria per far posto alle sempre maggiori esigenze logiche. E se tutti noi, oggi, ci guarderemmo bene, per es., dal riportare nelle nostre scuole gli Elementi d'Euclide nella loro veste primitiva, nessuno di noi ha ancora detto, almeno pubblicamente, che se il il trattatista d'oggi vuol davvero imitare Euclide, cioè scrivere un'opera che serva di propedeutica agli studi spperiori e che abbia lo stesso sostrato filosofico di quest'ultimi, non deve limitarsi ad apportare a quel classico libro dei perfezionamenti di ordine logico ma deve totalmente abbandonarne il piano.

In questo senso noi italiani, che pur possiamo vantarci di aver forse i più corretti libri di matematica elementare, siamo rimasti di gran lunga indietro alle altre nazioni, e la vivace lotta contro il formalismo, iniziata in Inghilterra dal Perry, di cui, per es., i tedeschi si sono occupati con vivo interesse, al pari di alcuni tentativi del Bourlet e del Borel, non ha suscitato fra di noi alcuna eco di simpatica adesione.

Ammiratori e spesso adoratori fanatici delle sistemazioni logiche rigide e precise, *puristi* nella più stretta eccezione della parola — di *fusionismo* noi abbiamo parlato soltanto a proposito della geometria piana e solida e senza venire a capo di nulla — noi non abbiamo mai guardato alle nostre questioni didattiche da un punto di vista elevato; un po' per difficoltà frapposte alle iniziative innovatrici da ogni vasta organizzazione burocratica, un po' per la paura delle considerazioni d'indole generale, caratteristica della seconda metà del secolo passato in ogni ordine di persone colte, il nostro discutere è stato sempre un continuo *piétiner sur place.* E non solo non ci siamo mai preoccupati di *orientare* il nostro insegnamento verso quello superiore, ma neanche abbiamo badato a coordinarlo con quello di scienze strettamente affini. In qualche Istituto è il professore di fisica che dà agli alunni la nozione di derivata, e nelle pagine precedenti il lettore avrà notato come si sia provvisto, in talune sezioni industriali, a dare agli alunni la preparazione matematica necessaria a seguir le lezioni di meccanica. Si vegga per es. come nel programma della 3ª classe della sezione industriale di Roma si eviti di parlar di integrali, sebbene le questioni cui si riferisce siano tutte delle integrazioni, e poi si rifletta se con sì... timida matematica si possa procedere a una buona esposizione della meccanica. E taccio di quegli istituti ove si crede di aver provvisto a tutto mescolando

gli alunni della sezione industriale con quelli della fisica-matematica; cioè costringendo i primi a sorbirsi, per es., l'analisi indeterminata di 1° grado, le frazioni continue e i problemi di massimo e minimo trattati con mezzi elementari, cioè con artifizi nè semplici, nè istruttivi.

Palermo, luglio 1910.

CORRISPONDENZA

A proposito dell' articolo di G. Aguglia su " I Quaternioni ecc. „ (1)

(*Lettera aperta al Direttore del* Bollettino di Matematica)

Egregio Collega,

Le saremo grati se vorrà pubblicare nel suo *Bollettino* le poche osservazioni seguenti relative all'articolo del Sig. **G. Aguglia**, *I Quaternioni quali coppie di numeri complessi.*

Nel titolo, nel testo e nella nota della Direzione, si parla semplicemente di Quaternioni, ma non si dice se questi sono o no i Quaternioni coosiderati dall'**Hamilton** Ora, data una funzione $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ di una successione di quattro numeri reali x, variabili indipendenti, i valori che assume f, variando le x nel campo dei numeri reali, formano una classe che può essere indicata col termine generico *classe di Quaternioni.* Ma dei simboli f possono formarsene infiniti e quindi si hanno infinite classi di Quaternioni.

Una sola di tali classi è quella considerata dall' **Hamilton**, ed è interessante far notare che i quaternioni studiati dal Sig. **Aguglia** *non sono i Quaternioni di* **Hamilton**. E diciamo è interessante perchè, quei lettori del *Bollettino* che sono lontani da centri scientifici e non hanno il modo di poter consultare altre opere, possono ritenere lo studio del Sig. **Aguglia** come una introduzione ai Quaternioni di **Hamilton**; il che non è assolutamente ed è facile provarlo.

---

(1) Vedi questo *Bollettino* N. 1-2-3-4 dell' Anno X.

I numeri complessi $a, b, c, d, \ldots$ considerati dal Sig. **Aguglia** sono enti algebrici che dipendono da $\sqrt{-1}$. Fissata una direzione **k** (**k** vettore unitario) si può stabilire una corrispondenza univoca e reciproca tra quei numeri complessi e una classe di Quaternioni di **Hamilton**, precisamente con i *Quaternioni di asse* **k** (Cfr. i nostri *Eléments de calcul vectoriel*, Hermann, Paris, 1910). Per far questo basta far corrispondere a $\sqrt{-1}$, che è *ente algebrico* **assoluto**, l' operatore **k** $\wedge$, nel campo dei vettori normali **a k**, che è *omografia* (in un piano) **dipendente** *da* **k**. Ora è indubitato che la coppia (a, b) di numeri complessi, o una funzione qualsiasi di essa, **non** *può essere un numero complesso*; dunque in virtù della possibile corrispondenza sopra indicata, *le coppie* (a, b) **non** *sono Quaternioni di* **Hamilton**.

Allo stesso risultato si può giungere anche in un altro modo.

Si ponga, essendo x_1, x_2, x_3, x_4 numeri reali,

$$a = x_1 + \sqrt{-1}\, x_2, \quad b = x_3 + \sqrt{-1}\, x_4;$$

allora si ha

$$(a, b) = (x_1 + \sqrt{-1}\, x_2, \ \ x_3 + \sqrt{-1}\, x_4).$$

È ben vero che (a, b) è una funzione della successione x_1, x_2, x_3, x_4; ma in tale successione le due coppie (x_1, x_3), (x_2, x_4) vi compariscono sotto condizioni ben diverse e tali che si può porre

$$(a, b) = f\,\{(x_1, x_3), (x_2, x_4)\}, \tag{1}$$

vale a dire, (a, b) è realmente *una funzione di* **due** *successioni di* **due** *numeri reali ciascuna.*

Ora questo speciale Quaternione (a, b) può essere un Quaternione di **Hamilton**? No certamente, perchè un Quaternione di **Hamilton** ha uno *scalare* y_1, che è un numero, e ha un *vettore*, entrambi *funzioni* **soltanto** *del Quaternione*; fissata la terna cartesiana di riferimento il vettore è determinato da una successione y_2, y_3, y_4, di tre numeri reali e quindi ogni Quaternione di **Hamilton** ha la forma

$$F\,\{y_1, (y_2, y_3, y_4)\} \tag{2}$$

cioè è ancora una funzione di due successioni, ma *una di queste è di* **un** *numero e l'altra è di* **tre** *numeri.* E poichè le forme (1), (2) non sono riduttibili l' una all' altra ne segue che: *i Quaternioni considerati dal* Sig. **Aguglia non** *sono i Quaternioni di* **Hamilton**.

Con questo non intendiamo dire che i Quaternioni dell' A. costituiscano enti inutili nel campo algebrico. No; intendiamo soltanto dire che essi non sono i Quaternioni di **Hamilton**. Tutt' al più le nostre osservazioni possono provare, ancora una volta, quanto sia pericoloso il *metodo*

delle coppie che è ora *venuto di moda* nonostante (e forse per questo?) i suoi gravi difetti logico-formali.

L'opera dell' **Hamilton**, magistrale e mirabile per l'assoluta precisione logico-formale-scientifica, è stata talmente svisata dai moderni quaternionisti e resa così inutile nel campo delle applicazioni, che abbiamo creduto far cosa utile ai lettori del suo *Bollettino*, sia segnalando l'esistenza dei procedimenti originali di **Hamilton** (Cfr. i nostri *Élèments*, appendice p. p. 198-212), sia avvertendoli che l'interessante studio del Sig. **Aguglia** non può in alcun modo esser preso a base per lo studio dei **veri** Quaternioni di **Hamilton**.

Distinti ringraziamenti e saluti.

C. BURALI-FORTI
R. MARCOLONGO

RASSEGNA BIBLIOGRAFICA

FEDERICO AMODEO: *Aritmetica complementare particolare e generale*, con appendici e numerosi esercizî, ad uso della 3ª classe liceale. 2ª edizione. - Napoli, L. Pierro editore, 1910. - L. 2.

I libri di testo per le nozioni di matematica complementare assegnate dai programmi alla terza liceale, o al secondo biennio d'Istituto tecnico (sezione fisico-matematica) sono così scarsi e, tranne qualche eccezione, così poco sodisfacenti, che ci si interessa volentieri di qualche nuovo libro del genere che venga pubblicato. E del massimo interesse, sono degni, è bene dirlo subito, i libri del prof. Amodeo, sia per l'abbondanza della materia sapientemente ordinata e razionalmente esposta, sia per le note storiche e i numerosi esercizi che l'accompagnano.

Questo primo di cui ci occupiamo è diviso in 5 capitoli e due Appendici.

Il 1° Capitolo: *I principî fondamentali di aritmologia*, comprende: le nozioni sulla divisibilità dedotte dalle proprietà delle congruenze (§ 1°), i teoremi sul massimo comun divisore (§ 2°), quelli sui numeri primi fra loro (§ 3°) e sul minimo multiplo comune (§ 4°), i numeri primi o semplici (§ 5°), i divisori di un numero (§ 6°).

Non a torto l'A. dice nella prefazione che questa teoria dovrebbe svolgersi interamente in quarta ginnasiale; infatti quando non si voglia

giungere fino ai teoremi di Fermat e di Wilson non presenta difficoltà tali da doverne differire tanto la trattazione.

Poche cose si possono osservare in questo primo capitolo. L'A. dice *dividente* in luogo di *divisore*, *sottraendo* e *sottrattore* invece di *diminuendo* e *sottraendo*. Il riserbare la parola *divisore* al caso della divisione esatta, e l'usare negli altri casi la parola *dividente*, sarebbe una buona norma che eviterebbe confusioni e prolissità di linguaggio. Sarebbe bene pertanto che gl'insegnanti si accordassero in proposito.

Non altrettanto lodevole ci sembra l'introdurre le parole sottraendo e sottrattore in luogo di diminuendo e sottraendo. Intanto si va contro l'uso comune. Ora dice Luigi Morandi: « Figuratevi un tribunale, composto di due giudici, ai quali il codice di procedura imponesse questa norma: — Quando i due giudici vanno d'accordo nel sentenziare, tanto meglio, ma quando ci sia disaccordo, prevarrà il parere del primo. — Non è chiaro che il secondo giudice si potrebbe mandare a casa, e risparmiare quei pochi? Ebbene il primo giudice è l'Uso; il secondo, l'Etimologia ».

Ma nel nostro caso non solo l'Uso, ma anche l'Etimologia, ci sembra, darebbe torto. Non rimarrebbe dunque in appoggio alla novità che l'analogia colle denominazioni usate nella moltiplicazione.

Non era male richiamare le definizioni di multiplo e di numero divisibile per un altro.

Il capitolo 2°, che è *magna pars* del volume, è dedicato ai numeri irrazionali e alle teorie che soltanto coll'introduzione di questi numeri possono ricevere una trattazione rigorosa a completa. Esso si divide nelle seguenti parti: § 1° Numeri irrazionali, § 2° Disuguaglianza e uguaglianza di numeri reali, § 3° Operazioni sui numeri reali, § 4° Operazioni sui radicali ad indici positivi e negativi, § 5°. Esponenti ed indici razionali, § 5° Esponenti reali, § 7° Rappresentazione della variabile numerica reale, § 8° Misura delle grandezze, § 9° Logaritmi.

I numeri irrazionali sono introdotti col concetto di partizione (Dedekind).

Premesse alcune proprietà della successione dei numeri razionali, si dimostra che un numero razionale qualunque divide questa successione in due classi godenti delle note proprietà: Ogni numero di una classe è minore di ogni numero dell'altra; Dato ε piccolo a piacere e positivo si possono trovare due numeri appartenenti rispettivamente alle due classi la cui differenza sia minore di ε. L'A. le chiama classi contigue, ma differiscono dalle classi contigue propriamente dette (Capelli), perchè queste non contengono tutti i numeri razionali (eccettuato al più uno) come quelle considerate dall'A. Si osserva poi che vi sono delle operazioni aritmetiche che dànno la possibilità di spartire l'insieme dei razionali in due classi contigue contenenti ogni numero razionale cosicchè

manca per esse un numero razionale di separazione. « Siccome queste classi contigue ed aperte hanno tutte le proprietà delle altre considerate prima eccetto che il numero di separazione, si crea un nuovo numero che si assume come elemento di separazione delle due classi, e poichè questo numero è di natura diversa dai numeri razionali si chiama numero irrazionale ».

Questa è una di quelle *definizioni creatrici* contro le quali, non a torto, sono insorti i logici; essa non dimostra cioè l'esistenza e l'unicità dell'ente definito, ma l'assume *a priori* dall'intuizione. Questo difetto, comune a tutte le definizioni per astrazione, e in particolare quindi anche alla definizione fondata sul concetto di limite superiore (Cantor-Peano), si è eliminato soltanto coll'identificare il numero irrazionale alla classe di numeri (segmento) di cui manca un limite superiore razionale (Russell-Cipolla). In questa teoria il numero irrazionale non è, in fondo, che un nome convenzionale dato a una classe di numeri godente di certe proprietà. Non si potrebbe, in modo analogo, rendere rigorosa la definizione basata sulle classi contigue, considerando un numero irrazionale, piuttosto che come elemento di separazione di due tali classi, come simbolo atto a rappresentare tutte le coppie uguali ad una data coppia di classi contigue?

Posta la definizione che abbiamo visto, l'A. osserva che « non è necessario, per rappresentare un numero irrazionale, includere nelle classi tutti i numeri che di esse fanno parte » ma « basta scegliere fra i numeri delle due classi due successioni per le quali siano soddisfatte le proprietà sopra enunciate ». In questo modo si passa dal puro concetto di partizione della successione dei numeri razionali, alle classi contigue propriamente dette.

Non ci sembra opportuno chiamare equivalenti invece che uguali i numeri determinati da varie successioni che producano la stessa partizione nel campo dei razionali, anche se si voglia chiamare equivalenti queste successioni.

La teoria dell'uguaglianza e disuguaglianza e delle operazioni fra numeri reali è svolta a un dipresso come fa il Capelli, e non ci è niente da osservare, se non forse da desiderare qualche volta una maggiore precisione di linguaggio. Per citare un esempio fra tanti, parlando dei numeri inversi si dice: « Inoltre la differenza $\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{a'-a}{aa'} < \frac{a'-a}{a^2}$, per la qual cosa se p è un numero fisso, diverso da zero, minore di a, sarà la detta differenza minore di $\frac{\varepsilon}{p^2}$ » mentre a rigore si dovrebbe dire: potrà rendersi minore di $\frac{\varepsilon}{p^2}$, dove ε è un numero positivo piccolo a piacere, scegliendo opportunamente a, a' nelle rispettive classi.

Poche osservazioni si possono fare alle altre parti del capitolo. Riguardo alla definizione di radice con indice intero negativo, invece di assumere dopo qualche considerazione giustificativa:

$$\sqrt[-m]{\alpha} = \frac{1}{\sqrt[m]{\alpha}}, \qquad (1)$$

era preferibile, ci sembra, estendere senz'altro la definizione di radice ad indice intero positivo, chiamando radice d'indice $-m$ di α un numero β tale che $\beta^{-m} = \alpha$, dopodichè è facile dimostrare la (1).

La parte che tratta delle trasformazioni dei radicali è svolta molto bene, e così sono dimostrati in modo semplice e chiaro i teoremi relativi alla variabilità della funzione esponenziale a^x illustrata da opportuni diagrammi, ma si richiederebbe maggior precisione nel dimostrare che a ogni punto della retta corrisponde un numero razionale o irrazionale. Non è infatti dimostrato ma semplicemente asserito che la differenza fra i numeri rappresentati dai punti a destra e a sinistra del dato può diventare infinitamente piccola.

Il capitolo 3° tratta dei *limiti*, *generatrici* ed *insiemi*. Il concetto di limite è stabilito in modo preciso, i teoremi sul limite della somma del prodotto ecc., sono dimostrati colla considerazione degli infinitesimi, e con questo si guadagna in brevità, non sappiamo se si perda in esattezza, in confronto alle note dimostrazioni colle quali si prova che può rendersi minore di qualsiasi quantità ε data piccola a piacere il modulo della differenza fra il limite presupposto e la variabile.

I principî fondamentali sui limiti (§ 1°) vengono applicati (§ 2°) alle equazioni di 1ª e 2° grado col coefficiente a tendente a zero. A pag. 150 è inesatto, ci sembra, dire che una delle radici tende a diventare infinitamente grande del segno di $-b$, mentre assume il segno di $-b$ o $+b$ secondochè a è positivo o negativo.

I teoremi sulle generatrici sono svolti in base ai principî sui limiti (§ 3°). Non si comprende perchè nell'enunciare la regola: « affinchè due nu meri decimali di un numero infinito di cifre decimali siano uguali devono le cifre dell'uno essere rispettivamente uguali alle cifre dell'altro nello stesso ordine », si escludono i numeri decimali periodici con periodo 9 (pag. 153).

Chiude il capitolo un cenno sugli Insiemi (§ 4°) necessario per mettere in luce certe proprietà dell'insieme dei razionali e dei numeri reali.

Qui vi è però un' affermazione sbagliata cioè: « L'insieme dei numeri razionali è perfetto e condensato in ogni suo intervallo ».

Ricordiamo che un insieme si dice *chiuso* se contiene il suo derivato, cioè tutti i punti limiti; si dice *condensato* se tutti i suoi punti sono punti limiti, cioè se fa parte del suo derivato, e *perfetto* se è nello stesso

tempo chiuso e condensato cioè identico al primo derivato. A parte la confusione fatta fra le parole perfetto e condensato, l'insieme dei razionali è bensì condensato, ma non è chiuso perchè non contiene tutti i punti limiti, di cui infiniti sono irrazionali. Esso non può essere dunque perfetto.

Perfetto e continuo è invece l'insieme dei numeri reali, inquantochè secondo Cantor un insieme si dice continuo se è nello stesso tempo connesso e perfetto.

Il Capitolo 4° si riferisce alle *proporzioni*, *medie* e *progressioni* e comprende: § 1° Rapporti e proporzioni, § 2° Medie aritmetica, geometrica ed armonica, § 3° Progressione aritmetica, § 4° geometrica ed armonica, §. 5°.

La dimostrazione a pag. 184 che la somma degli n numeri dispari consecutivi a partire dal numero $n(n-1)+1$ è n^3 si può semplificare applicando senz'altro la formula $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d$.

Può non piacere che si parli (pag. 184, 192) di serie convergenti, divergenti, e indeterminate, senza aver detto che cos'è una serie, e quando si dice convergente, divergente, indeterminata.

Il Capitolo 5° tratta delle *Grandezze proporzionali* e di *problemi diversi*, che ad esse si riferiscono, e comprende: § 1° Grandezze proporzionali, § 2° Problemi della regola del 3 semplice, § 3° Problemi della regola del 3 composta, § 4.° Problemi d'interesse e sconto semplici, § 5° Problemi d'interesse e sconto composti, § 6° Annualità, § 7° Rendite, § 8° Problemi sulla divisione in parti proporzionali (regole dî società e di miscuglio, leghe).

Il libro è chiuso da due appendici di cui la 1ª si riferisce all'*analisi indeterminata di 1° grado* e tratta della risoluzione in numeri interi di una equazione a due incognite e di m equazioni fra $m+1$ incognita; la 2ª dà alcuni esempî di risoluzione di *equazioni esponenziali* e *logaritmiche*. Mi sembra un po' oscuro il ragionamento fatto a pag. XI per dimostrare che il numero delle soluzioni intere positive o nulle dell'equazione $ax + by = k$, ove a, b, k sono interi e positivi è uguale alla parte intera del quoziente di k per ab o a questa parte aumentata di 1, mentre poteva intuitivamente osservarsi che l'intervallo $\frac{k}{ab}$ contenendo q intervalli compresi fra un intero e il successivo più una frazione d'intervallo, deve contenere, secondo la posizione degli estremi di $\frac{k}{ab}$, q o $q+1$ numeri interi.

Le poche osservazioni fatte, dopo aver letto scrupolosamente il libro non tolgono nulla al valore di questo. L'A. potrà se crede tenerne conto

in una terza edizione, che auguriamo immune da errori di stampa, perchè nell'attuale ce ne sono davvero un po' troppi.

Come il lettore ha visto, molte cose non sono richieste dal programma attuale della 3ª, ma dovendo far parte del corredo di nozioni necessario ai giovani che prescelgono volontariamente lo studio delle matematiche (prefazione), l'A. ha fatto bene a porle.

A. Natucci

Sibirani Filippo: *Elementi di Algebra* ad uso delle scuole secondarie inferiori *Seconda edizione.* — Firenze, Successori Le Monnier, 1910.

La ristampa della seconda edizione di quest'opera è nuovo segno manifesto dello schietto e meritato favore con il quale essa fu accolta da insegnanti e scolari fin dal suo primo apparire. A mio avviso, anche per esperienza personale fattane alcuni anni or sono in una scuola tecnica, il lavoro del prof. Sibirani ha su molti altri congeneri il vantaggio innegabile di una grande chiarezza, di un grande ordine, e compatibilmente con le esigenze di quelle scuole alle quali è indirizzato, di un grande rigore: nè i concetti, nè le definizioni sono mai falsati o ingiustamente limitati sotto il pretesto di facilitarli o semplificarli; ma grande copia di esempi ben scelti porge con molta naturalezza la genesi dei concetti anche meno facili, e mostra l'opportunità delle definizioni date. Si può anzi dire di più, e cioè che *nulla* di quel piccolo patrimonio matematico che si può trarre dallo studio del libro dovrà subire modificazioni negli studî avvenire del lettore, ma costituirà salda base agli ulteriori sviluppi e a quelle più difficili teorie che gli saranno insegnate nelle scuole superiori. Finalmente va rilevato che l'ampio corredo di esercizî belli, svariati e nuovi costituisce degno complemento a questi ottimi *Elementi di Algebra*, che si raccomandano come prezioso aiuto agli scolari e come utile guida agli insegnanti. — La nuova edizione, in confronto alla prima, esce ora arricchita di un notevole capitolo e di una appendice sui sistemi di equazioni, che potranno essere di particolare utilità sia agli aspiranti agli istituti nautici, sia a quei giovani più intelligenti e volonterosi che, guidati dal loro maestro, avranno saputo trarre miglior profitto dalla bella operetta che loro si porge.

Luigi Galvani

G. Frattini: *Lezioni di algebra, geometria e trigonometria*, con molti esempi, sull'intero programma del 2° biennio degli istituti tecnici (sezione fisico-mat.). Ed. G. B Paravia e C. 1911. V. I (per la terza classe) L. 4,00.

Nell'ultimo fascicolo di questo *Bollettino* fu già dato l'annunzio di questa recentissima pubblicazione di G. Frattini e ne furono pubblicati anche l'indice del I vol. e la prefazione. In questa l'A. espone le ragioni (nelle quali non può non consentire chi abbia esperienza) per le quali nel suo lavoro ha procurato « di ribadire in ciascun capitolo le « cose dei precedenti e spesso ripiegare la trattazione sul programma « del primo biennio » nel quale, per la sproporzione fra programma ed orario e per altre cause, alcuni argomenti, quando non si devono tralasciare, si possono sfiorare appena, rinunciando a quelle applicazioni e a quei problemi che danno « il pane allo spirito e la drittura al pensiero ». I due primi capitoli e l'ultimo e parte del penultimo, come l'A. avverte, si possono omettere, perchè estranei al programma del secondo biennio, senza alcun inconveniente didattico nella trattazione degli altri.

Manca invece un capitolo che esponga gli « Elementi di geometria descrittiva » che figurano nel programma ufficiale della terza classe fisico-matematica. Non so se l'A. se ne sia dimenticato del tutto o se abbia fatto posto per tale capitolo nel vol. II che è in corso di stampa [1]. In ogni caso, i colleghi, a cui sta a cuore tale argomento possono facilmente rimediare all'omissione, volontaria o no. Gli altri, non pochi credo [2] i quali (compreso lo scrivente) non si dolgono nè si preoccupano se manca il tempo per esporre quelle quattro nozioni, le quali, prive per necessità di un sufficiente sviluppo e di adeguate applicazioni, perdono ogni vitalità e ogni interesse e con ciò la loro ragion d'essere, con tranquilla coscienza assolveranno nell'A. il peccato proprio, se peccato è. — E vengo brevemente ai particolari.

Il cap. I tratta, in 9 lucidissime pagine, dei numeri irrazionali, definendoli non mediante coppie di classi convergenti di razionali, ma come serie decimali indefinite non periodiche. Provata la corrispondenza biunivoca fra i segmenti e i numeri reali cioè le serie decimali finite e indefinite, periodiche o non, l'A. tratta sinteticamente in modo piano e breve, delle quattro prime operazioni sui numeri reali positivi, con rife-

---

(1) - N. d. D. - *Diffatti ci consta che l'A. ne farà oggetto di un capitolo speciale d'Appendice all'intera opera, e che comparirà col II Volume.*

(2) Leggasi a tale proposito, negli atti della sottocommissione italiana per l'insegnamento matematico, il n. 9 (*stato di fatto dell'insegnamento della matematica negli istituti tecnici*) della bella relazione di G. Scorza su « *L'insegnamento della matematica nelle scuole e istituti tecnici* ». (Cfr. a pag. 186 *di questo numero del* **Bollettino di Matematica**).

rimento al loro significato geometrico, dal quale scaturiscono semplicissimamente le loro proprietà formali. Questo metodo, a differenza di quello analitico puro, mette a contatto diretto la teoria con le applicazioni e lascia pienamente soddisfatto l'animo del discente. Ad integrare la teoria dei numeri reali mancano la trattazione delle potenze e delle radici e la considerazione dei numeri negativi.

Nel capitolo II (approssimazioni numeriche), si espongono e si dimostrano brevemente ed elementarmente, le regole per valutare il grado di approssimazione del risultato di ciascuna delle quattro prime operazioni conoscendo i gradi d'approssimazione dei numeri su cui opera. È questo un argomento generalmente trascurato nelle nostre scuole, e del quale i programmi non parlano, forse per tema di esagerazioni da parte degli insegnanti.

I capitoli III e IV sono dedicati rispettivamente alle diseguaglianze e alla discussione dei problemi. Questa è insegnata quasi esclusivamente per via di esempii. Alle norme per la discussione date dall'A. qualche altra si potrebbe utilmente aggiungere riguardante la discussione della risoluzione algebrica dei triangoli [1].

La *goniometria* (cap. V.) e la *trigonometria* (cap. VI) sono svolte in modo semplice, con copia di utili esempî ed applicazioni, senza superfluità e senza omissioni notevoli. Il seno e il coseno vengono definiti mediante l'uso delle coordinate (cartesiane) dell'estremo dell'arco. Della secante e della cosecante non è fatto cenno. La definizione della tangente viene tratta dalla rappresentazione geometrica, e la cotangente viene definita come la tangente dell'angolo complementare.

Per la ricerca dei *massimi* e dei *minimi* (cap. VII) è illustrato con molti acconci esempi il metodo indiretto che è il più spontaneo e non richiede premesse e considerazioni speciali; ma non mancano cenni ed esempî di qualche altro metodo e delle più usate proposizioni sui massimi e minimi di semplici funzioni di più variabili.

Il cap. VIII (limiti e forme indeterminate) contiene molte applicazioni algebriche e geometriche che gettano nuova luce su alcuni argomenti del primo biennio. Non sarebbe inutile forse aggiungere qualche altro esempio sulle forme indeterminate dei tipi $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, su quelle, in specie, provenienti da frazioni coi termini polinomî interi in x, quando la x tenda ad una radice comune ai due termini o all'infinito (positivo o negativo).

Circa le *frazioni continue* (cap. IX) l'A. si limita a considerare quelle a quozienti interi positivi, ed è quanto basta per le ordinarie applicazioni.

---

[1] Veggasi l'ottimo libro di A. Bassi: « *Risoluzione dei triangoli piani*, norme ed esempi » (G. B. Paravia e C.).

Gli ultimi tre capitoli del libro sono dedicati alla geometria.

Il X (*Figure eguali e simmetriche; e figure simili*) nel quale sembra che l'A. abbia voluto concentrare tutto il programma di geometria (tolta la descrittiva), presenta qualche lacuna e qualche inesattezza. Per es. mentre *nel piano* si distinguono l'*eguaglianza* diretta ed inversa, non è fatta l'analoga distinzione per la *similitudine*, distinzione che pur sarebbe utile per le successive considerazioni sull'omotetia; viceversa *per le figure solide* si accenna alla similitudine concorde e discorde, ma non all'eguaglianza diretta ed inversa, perchè il concetto d'eguaglianza viene ristretto al caso della sovrapponibilità, come fanno del resto molti autori.

Non vi è cenno sulla simmetria rispetto ad un asse, e ad un punto.

Gli enunciati dei teoremi (pag. 187): « Nel piano (nello spazio) per rendere omotetiche due figure simili basta disporne omoteticamente due *lati* (*triangoli*) omologhi », andrebbero integrati con l'aggiunta di quelle condizioni di orientamento che l'Autore dichiara ed usa poi nella dimostrazione (angoli omologhi concordi o discordi al modo stesso dei lati omologhi). Ed in conseguenza sarebbe da modificarsi la dimostrazione del corollario « due figure omotetiche ad una terza sono omotetiche fra loro » (pag. 188).

Il contenuto della prima parte del Cap. XI, come si vede anche dall'indice, è un esempio di quel ripiegamento sul primo biennio di cui parlai in principio. Va completata la dimostrazione del teor. (pag. 192) « il luogo dei punti le cui distanze da due punti dati A e C stanno fra loro in un rapporto dato è una circonferenza ecc. », sebbene non manchi, anzi proceda immediatamente l'enunciazione del noto teorema inverso a quello della bisettrice d'un angolo d'un triangolo. La seconda parte del Cap. XI e tutto il Cap. XII hanno un contenuto interessante ed elementare quantunque estraneo al programma.

Il libro termina con un'appendice in cui è riportata una bella dimostrazione, dovuta a D. Besso, del noto teor. « Se la somma di due o più variabili positive si mantiene costante, il loro prodotto è massimo quando esse assumono valori eguali », alla quale però pare a me preferibile, per la semplicità, quella che si trova per esempio nella nota algebra del Bertrand.

L'impressione generale che lascia la lettura è quella di un libro didatticamente ottimo, nel quale le poche e non gravi mende che ho rilevato, e le lacune a cui accennai e alle quali potrebbesi aggiungere quella della rappresentazione cartesiana delle funzioni, scompaiono di fronte alle cospicue doti che si possono riassumere così:

sobrietà nel contenuto; *copia di esempi* efficacemente illustrativi ed istruttivi; in contrapposto a una *lodevole parsimonia di generalità e di regole*, a differenza di quel che si lamenta in alcuni testi, poveri d'esempî,

e ricchi di soverchie generalità, e carichi di regole, di metodi, di prospetti, soffocanti e sterili fardelli alla memoria, pesanti ceppi all'agilità mentale; *precisione* e concisa *lucidità di linguaggio*, che si mantiene piano ed elegante e scevro da vocaboli fuor dell'uso comune, a differenza di quel che si deplora in alcuni Autori che coniano con estrema facilità parole, frasi, segni per uso e consumo esclusivo del testo, incomprensibili od equivoche a chi non lo abbia famigliare.

Tali doti non potevano far difetto in un libro che porta il nome di G. Frattini di cui mi piace ricordare qui alcune parole pronunziate inaugurando il Congresso della vecchia *Mathesis* nel 1901: « Volgere i progressi della scienza a beneficio della scuola » non è facile impresa « da « che non si tratta di trapiantare nella scuola secondaria le verità delle « matematiche superiori; ma di piegare la didattica ai dettami delle « verità stesse e in modo che la gioventù studiosa non abbia da tale « opera nuovo gravame, ma, se è possibile, alleviamento e ristoro ».

ETTORE TREVISAN

LA RIUNIONE DI MILANO

La riunione della Commissione internazionale per l'insegnamento matematico, indetta a Milano pei giorni 17, 18, 19 e 20 settembre si iniziò con un reverente omaggio alla memoria dell'illustre Brioschi sul cui monumento fu deposta una bella palma di fiori e si svolse, sempre sotto la presidenza dell'illustre prof. **Klein**, secondo il programma preannunciatone, e pubblicato pure in questo *Bollettino*, nel decorso numero (pag. 95 e seg.). Vi furono rappresentati quasi tutti i principali Stati di Europa, e i delegati dei vari paesi riferirono sullo stato dei lavori delle rispettive sottocommissioni nazionali: Il Segretario generale **Fehr** riferì per tutti quegli Stati d'Europa e d'America di cui non erano presenti i rispettivi Delegati. Ne apparve che pel Congresso di Cambridge potranno appena esser terminate le relazioni singole riguardanti i varî ordini di scuole dei differenti Stati; cosicchè una vera e propria discussione più che al Congresso di Cambridge sarà riservata a quello successivo di Stocolma (1916).

Furono oggetto di speciale discussione i due temi posti all'ordine del giorno [cfr. questo *Bollettino* pag. 95 del decorso numero] per le sedute del 19 e del 20 settembre. Sull'esposizione sistematica della matematica riferì il prof. **Castelnuovo** riassumendo i varî metodi nel seguente quadro:

A) Metodo interamente logico [P. es. *Peano*, *Hilbert*, *Halsted*].

B) Fondamenti empirici, sviluppo logico:

a) con tutti gli assiomi enunciati (P. es. *i principali trattati italiani*);

b) con una parte soltanto di assiomi enunciati [*Euclide*];

c) con nessun sistema di assiomi [P. es. *Thieme, Holzmuller*].

C) Metodo empirico-deduttivo (*Borel*).

D) Metodo intuitivo sperimentale (*Perry*).

Sulla fusione delle differenti branche della matematica riferì il prof. **Bioche** e, in seguito a speciale invito fattogli dal presidente Klein. il prof. **Lazzeri** riassunse le vicende della questione della fusione della planimetria colla stereomatria in Italia. Sul 2° tema riferì il prof. **Tiemerding**. Sulle comunicazioni dei varî Delegati e su quanto avevano esposto i relatori speciali, parlò ripetutamente il presidente prof. Klein, e discussero quasi tutti i delegati dei vari Stati e gli altri membri delle Sottocommissioni nazionali.

Largo consenso trovarono le dichiarazioni degli on. Senatori **Veronese** e **D'Ovidio**, riguardo ai lavori della Commissione e all'utilità dei lavori stessi.

Il 20 settembre fu tenuta la Seduta pubblica alla quale intervennero rappresentanti del Governo e del Comune di Milano e parecchi professori italiani delle Università e delle Scuole Medie. Dopo un' allocuzione del prof. Klein e dopo i discorsi del Sen. Colombo e dei rappresentanti del Governo e del Comune di Milano, il prof. **Enriques** tenne in francese una dotta e brillante conferenza « *Sulle matematiche e la teoria della conoscenza* ».

La riunione ebbe termine con una simpatica gita sul Lago Maggiore e sul Mottarone, alla quale mancò, purtroppo, il sorriso del cielo, ma non la più schietta cordialità fra tutti i convenuti. Al Comitato ordinatore il nostro plauso per tutta l'opera sua, veramente encomiabile; ed al Comitato Centrale della Commissione internazionale, all' illustre Presidente prof. **Klein**, di cui non sappiamo se sia più ammirabile l'ingegno o l'amabilità nell'apostolato suo in pro' della Scienza e dell' insegnamento, ed all' infaticabile Segretario Generale prof. **Fehr**, degno di molta lode per l'assiduità e per l'ordine con cui attende ai lavori affidatigli, ancora una volta vada ad essi l'espressione di tutto il nostro compiacimento per l'operosità che hanno saputo suscitare fra i matematici di tutto il mondo civile, operosità veramente grande e della quale non mancherà buon frutto se continuerà ad essere illuminata dall' amore per la Scienza e disciplinata da uno spirito così elevato come quello di **Felice Klein**, operosità in virtù della quale i cultori delle discipline matematiche stanno dando un esempio magnifico ai loro colleghi di tutte le altre discipline, e di tutto il mondo!

Finito di stampare il giorno 17 novembre 1911.

ALBERTO CONTI: *Direttore Responsabile.*

- 14. Coralli Pia - 15. Marnetto Antonietta - 16. Rigatti Rosa - Crudo Durando Teonilde - 18 Doria Giov. Andrea - 19. Pistelli Guido.

Concorso pei Ginnasi. — Fino a dicembre non avranno luogo le relative prove orali. Dobbiamo anzi a questo proposito rettificare una nostra notizia relativa alla Commissione giudicatrice, di cui fa parte il prof. Bagnera in lugo del prof. Montesano.

Concorsi speciali. — È comparso sulla *Gazzetta Ufficiale* del 23 ottobre, il nuovo Regolamento per tali Concorsi ed il Bollettino Ufficiale del Ministero della P. I. del 2 novembre contiene gli avvisi dei Concorsi speciali, aperti fino al 15 dicembre, fra cui, per la matematica i seguenti:

a) per 32 cattedre nelle scuole tecniche e nei ginnasi (28 di scuole tecniche, 23 maschili o miste e 5 femminili, e 4 nei ginnasi).

b) a 3 cattedre d'istituto tecnico.

c) a 6 cattedre di Scuola Normale Femminile.

d) a 4 cattedre di Scuola Normale Maschile, con l'insegnamento altresì delle scienze fisiche e naturali.

Dal nuovo Regolamento pei Concorsi appare soppressa pei concorsi (generali o speciali) a cattedre di matematica la prova scritta, che invece è mantenuta obbligatoria (Art. 14) pei concorsi a cattedre di materie letterarie e di molte altre discipline, e sempre con effetto eliminatorio [*È forse questo un espediente per sfollare le facoltà letterarie, e popolare maggiormente quelle scientifiche?*]. La prova orale pure appare modificata e ridotta (per la matematica) ad una discussione preceduta da una correzione di lavori scritti degli alunni delle scuole a cui appartengono le cattedre messe a concorso, ciò che verrebbe a sostituirsi alla lezione che pure vien soppressa (Art. 21) pei concorsi alle cattedre di matematica o di altre discipline, ma non per tutte. — *I nostri commenti ad una prossima volta.*

Nomine dei vincitori. — *In seguito agli indugi verificatisi nel compimento dei lavori pei Concorsi predetti, ed in massima parte derivati dal ritardo inesplicabile col quale il Ministero invitò i varî candidati a sostenere le prove scritte sui temi che le Commissioni giudicatrici avevano concordato già da oltre due mesi, il Ministero stesso si trovò nella necessità di provvedere, all'apertura dell'anno scolastico, con tante supplenze alle numerose cattedre vacanti.*

Ed ora.... nel supremo interesse della Scuola (o dei supplenti*?) pare molto probabile che i vincitori dei concorsi, abbiano la soddisfazione di passare un anno intero a meditare sulla loro vittoria... mentre chi sa che la causa dei supplenti.... non guadagni sempre più terreno, fino a che una bella leggina (di quelle eccezionali... che però si ripetono a breve sca-*

denza...) faccia pei supplenti delle Scuole Medie quello che già più leggine fecero in prò dei maestri supplenti, anche se bocciati nei concorsi in via d'espletamento mentre sopraggiungevano le sullodate leggine.... Per le Scuole Normali ci consta che incominciarono già le nomine, ma pei Licei ed Istituti tecnici, gli Atti attendono ancora l'approvazione della Giunta del Consiglio Superiore.

NOMINE E DISTINZIONI VARIE

È stata conferita la *laurea ad honorem* al prof. **Federigo Enriques** dall'Università di S. Andrew, la più antica della Scozia, nell'occasione del V centenario di questa Università

***

In seguito a votazione dei Professori delle Scuole Normali del Regno, il prof. **Alberto Conti** è stato eletto membro della nuova Sezione della Giunta del Consiglio Superiore della P. I. per l'Istruzione Primaria e Popolare, istituita dalla legge 4 giugno 1911.

BIBLIOTECA DEL " BOLLETTINO DI MATEMATICA "

(*Continuazione Anno IX pag. XXIV*)

911. **G. Di Dia**. - Programma didattico per l'insegnamento della matematica nel 1° biennio del R. Istituto tecnico di Milano.
912. **R. Suppantschitsch**. - Die verschieden Arten des räumlichen Anschaungsvermögens.
913. **T. See**. - Dynamical Theory of the capture of satellites.
914. " - Origin of the lunar terrestrial system by capture.
915. **A. Andreini**. - Sul ripristinamento del vecchio orologio solare orizzontale.
916. **A. Andreini**. - L'Astronomia nei detti popolari.
917. " - Come divulgare varie nozioni di geografia matematica
918. **E. Pascal**. - Sopra alcune classi di integrafi per equazioni differenziali.
919. **G. Pedote**. - Sul concetto di prolungamento analitico.
920. **C. Ciamberlini**. - Aritmetica ad uso delle Scuole Normali.
921. **L. Grandi**. - Tre lettere aperte agli Astronomi.
922. " - Logaritmi e loro applicazioni alle regole d'interesse.
923. **E. Pascal**. - Sopra una semplice ma notevole variante nella costruzione dell'integrafo di Abdank-Abakanowicz.
924. **M. Vecchi**. - Intorno ad un teorema sulla applicazione delle medie statistiche.
925. **G. Mignosi**. - Teoria formale del Massimo Comune Divisore.

926. **S. Pincherle.** - Sugli studi per la laurea in matematica e sulla Sezione di Matematica delle Scuole di Magistero.
927. **C. Soschino.** - I numeri reali considerati come successioni di numeri decimali.
928. **G. Sandri.** - Teoria dei numeri reali.
929. **F. Castellano.** - Lezioni di Meccanica Razionale.
930. **R. Bettazzi.** - I problemi di Aritmetica Pratica (2ª edizione).
931. **P. Cattaneo.** - Su alcuni quadrati e cubi notevoli.
932. **C. Alasia.** - Alcuni teoremi sul triangolo.
933. " - Sviluppo in serie d' un numero intero.
934. " - Uno sviluppo del seno e coseno d' un arco qualunque.
935. **R. Marcolongo.** - Applicazioni delle omografie vettoriali alla teoria dell' elasticità.
936. **R. Marcolongo.** - Momenti d' inerzia ed impulso nella dinamica dei sistemi rigidi.
937. **C. Burali-Forti.** - Sur une question élémentaire de maximum.
938. **N. Serazzi.** - Teoria dei metodi per la tenuta dei conti ad interesse.
939. **T. Rietti.** Sulle operazioni distributive normali.
940. **E. Pascal.** - L' uso e le applicazioni dell' integratore meccanico per le equazioni differenziali.
941. **U. Concina.** - Il Teorema della proiezione di una poligonale e sue applicazioni alla Trigonometria.
942. **R. Giacomelli.** - Un teologo e apologeta riformatore della fisica e dell' astronomia.
943. **P. Del Pezzo.** - Pel Cinquantenario della proclamazione di Roma capitale d' Italia.
944. **C. Arzelà.** - Variazioni deboli e forti delle funzioni.
945. **U. Concina.** - Quadrati e cubi. Radici quadrate e cubiche.
946. **Burali-Forti** e **Marcolongo.** - Notations rationelles pour le système vectoriel (Réponse à M.r Wilson).
947. **Z. G. De Galdeano.** - Nueva contribocion a la Enseñanza de la matemática.
948. **R. Suppantschitsch.** - Sur une introduction première des logaritmes.
949. **C. Bourlet.** - Précis d'Algèbre.
950. " - Cours abrégé de Géometrie plane et dans l' espace.
951. " - Cours abrégé d' Aritmétique.
952. " - Leçon d' Algèbre élémentaire.
953. " - Leçon de Trigonométrie rectiligne.
954. **G. Fazzari.** - Elementi di Aritmetica per le Scuole Medie Superiori (2ª edizione).
955. **S. Ortu-Carboni.** - Raccolta di problemi d' applicazione dell' Algebra alla Geometria (2ª edizione).
956. **C. Baffi.** - Aritmetica razionale ad uso della 2ª normale.
957. **M. Del Giudice.** - Lezioni di Aritmetica razionale e algebra elementare. Vol. I (Fondamenti della dottrina del numero naturale e frazionario).
958. **S. Pincherle.** - Lezioni di Algebra elementare ad uso delle Scuole Medie Superiori.
959. **G. Frattini.** - Lezioni di Algebra e Trigonometria pel 2° biennio degli Istituti tecnici.
960. **G. Garbieri.** - Norme ai maestri per insegnare l'Aritmetica, la Geometria e la Computisteria nelle Scuole elementari.

(*continua*)

Quesiti proposti nelle discussioni ai concorrenti a cattedre di Scuole Medie

1. L' espressione $\dfrac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(z - y)^2}$ è costante per tutti i valori di x, y, z, i quali rendono $ax + by + cz = o$.

Dimostrazione algebrica o geometrica.

2. Determinare due equazioni di 2° grado tali che ciascuna sia soddisfatta dalla somma e dal prodotto delle radici dell' altra.

3. Discutere il sistema

$$x^2 - y^2 + x + y + 1 = o, \quad x - y + 1 = o.$$

Interpretare geometricamente il risultato.

4. Lo stesso pel sistema

$$x^2 - y^2 - z^2 - 2yz + x + y - z + 1 = o, \quad x + y + z = 1, \quad x - z = 2.$$

5. Trovare i valori di x pei quali diventa infinita la funzione $tg\,\dfrac{\pi x}{x+1}$. Esaminare l' insieme costituito da questi numeri.

6. Dimostrare l' identità $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 2$ quando ciascuno dei radicali cubici abbia la determinazione reale.

7. Dimostrare che si ha

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})\ldots(1+x^{2^n}) = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^{2^{n+1}-1}$$

8. Se $ABCD$ è un parallelogrammo articolato, e se O, M, N sono tre punti in linea retta rispettivamente sui lati (prolungati se occorre) BA, AD, BC, in qualunque deformazione del parallelogrammo O, M, N resteranno in linea retta, e se il punto O rimane fisso, e ad uno dei punti M o N si fa descrivere una figura, l' altro descriverà una figura omotetica (Pantografo).

9. Sia $ABCD$ un trapezio isoscele, si tirino le diagonali AC, BD, ed immaginando soppressi i lati paralleli AD, BC si supponga articolato il quadrilatero concavo $ABDC$. Se O, M, N sono tre punti sopra una retta parallela ai lati soppressi AD, BC, e giacenti rispettivamente sulle rette AB, AC, BD, in qualunque deformazione del quadrilatero concavo i tre punti O, M, N resteranno per diritto, e se il punto O rimane fisso, e ad uno dei punti M od N si fa descrivere una figura, l' altro descriverà la figura inversa colla potenza $(BD^2 - AB^2)\ \dfrac{BN \,.\, ND}{BD^2}$ (Inversore di von Hart).

10. Si ha $(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2=1+\sum_{r=1}^{n}\{(r+1)x^r+(n-r+1)x^{n+r}\}$

11. Nell'ipotesi che sia $a>\frac{1}{8}$, e che i radicali cubici abbiano le determinazioni reali, si ha

$$\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=1.$$

12. Le due equazioni $a_0x^2+2a_1x+a_2=o$, $b_0x^2+2b_1x+b_2=o$ determinino sopra una retta rispettivamente le due coppie di punti AA', BB', che si separino ed abbiano ordinatamente per punti medii α, β. Sia M uno dei punti d'incontro di due circonferenze descritte su AA', e BB' come diametri sul medesimo piano; esprimere $\cos\alpha M\beta$ per mezzo dei coefficienti a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2.

13. Se il numero b è medio geometrico fra a, c sarà $\log_b n$ medio armonico tra $\log_a n$, $\log_c n$.

14. Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione $x^3+ax^2+bx+c=o$ abbia le radici in progressione aritmetica, oppure in progressione geometrica.

15. Dato un tetraedro esistono 8 sfere tangenti ai quattro piani delle facce; esprimerne i raggi per mezzo del volume del tetraedro e delle aree delle facce: ricavare quattro dei raggi in funzione degli altri quattro.

16. Risolvere l'equazione $e^x+e^{-x}=2a$: discutere la formula risolutiva.

17. Dimostrare $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

18. Se R è la radice quadrata di un numero N a meno di un'nnità, r il resto, q la parte interna del quoziente di $2R$ per r, la radice quadrata di N è compresa fra $R+\frac{1}{q}$ ed $R+\frac{1}{q+1}$.

19. Determinare i coefficienti del resto della divisione di un polinomio in x pel prodotto $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ dove α, β, γ sono tre numeri diseguali. Esaminare il caso quando fra questi ve ne siano di eguali.

20. $x^{2n}-n^2x^{n+1}+2(n^2-1)x^n-n^2x^{n-1}+1$ è divisibile per $(x-1)^4$.

21. $x^m \operatorname{sen}\phi - r^{m-1}x \operatorname{sen} m\phi + r^m \operatorname{sen}(m-1)\phi$ è divisibile per $x^2-2rx\cos\phi+r^2$.

22. In un poligono piano convesso di n lati quale è il numero dei punti d'incontro di due diagonali, interni al poligono.

23. Dal confronto dello sviluppo di $\frac{1}{1-x-x^2}$ in serie di potenze

ricavato in due modi diversi dedurre che

$$\binom{n+1}{1}+5\binom{n+1}{3}+5^2\binom{n+1}{5}+\ldots \text{ è divisibile per } 2^n.$$

24. In quanti modi diversi un polinomio di grado $2m$, privo di radici multiple, può decomporsi in fattori di 2° grado?

25. Dimostrare le formole

$$\cos ma = \Sigma(-1)^n \frac{m(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n+1)}{1.2\ldots n} 2^{m-2n-1} \cos^{m-2n} a$$

$$\text{sen } ma = \Sigma(-1)^n \frac{(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n)}{1.2\ldots n} 2^{m-2n-1} \cos^{m-2n-1} a \text{ sen} a$$

26. Srlla circonferenza di diametro AB si taglino gli archi $BP_1 = = P_1P_2 = P_2P_3 = \ldots = P_{m-1} P_m$, posta la corda $AP_1 = x$ sarà la corda

$$AP_m = \sum_{n=o}^{E\left(\frac{m}{2}\right)} (-1)^n \frac{m}{m-n}\binom{m-n}{n} x^{m-2n}.$$

Se data AP_m si vuol ricavare x si ha per $m=45$ la equazione di *Adrianus Romanus*.

27. Risolvere l'equazione

$$x^n - nax^{n-1} - \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} - \binom{n}{3} a^3 x^{n-3} \ldots - a^n = o.$$

28. $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{2m-2}$ sia un poligono regolare di centro O, P un punto del suo piano, tale che $OP = z$, ed angolo $A_0OP = \alpha$, si ha

$$(AP_0 . PA_2 . PA_4 \ldots PA_{2m-2})^2 = z^{2m} - 2z^m \cos m\alpha + 1.$$

Se $\alpha = o$ $PA_0 . PA_2 . PA_4 \ldots PA_{2m-2} = 1 - z^m$.

29. Per via algebrice o per via geometrica verificare l'identità

$$4\{(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)\}=(2ac'+2a'c-bb')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c').$$

30. Se A e B sono primi fra loro, e se $\frac{N_1}{A}$, $\frac{N_2}{B}$, sono due frazioni irriducibili generatrici di due frazioni decimali periodiche semplici aventi rispettivamente al periodo a e b cifre, dimostrare che la frazione irriducibile $\frac{N_3}{AB}$ dà anche luogo ad una frazione decimale periodica semplice, e che il numero delle cifre del periodo di questa è il minimo mulmultiplo comune di a e b.

31. Trovare il resto della divisione per 13 di

$$3012^{93} \times 163034^{39} \times 4^{67}.$$

32. Tagliare con un piano una sfera in modo che uno dei segmenti

risulti equivalente a una sfera di raggio assegnato. Interpretare le due radici estranee che si presentano.

33. n persone sono sedute attorno ad una tavola: ognuna di esse cede a quella che le sta a destra parte di ciò che possiede, per esempio la r^{ma} persona possiede la somma ignota x_r e cede la frazione α_r della somma x_r alla $(r+1)^{ma}$, fino a che l'ultima cede $\alpha_n x_n$ alla prima. Alla fine si trovano posseditrici rispettivamente delle note somme $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Determinare le $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

34. Risolvere il sistema

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{a_1}\,,\ \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{a_2},\ldots,\ \frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a_{n-1}}\,,\ \frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{a_n}$$

e discutere la soluzione.

35. È dato un triangolo ABC, ed una retta fuori del piano del triangolo: un punto D variabile di questa si unisce a B e C, e si forma il quadrilatero gobbo $ABDC$. Si congiungono successivamente i punti medii dei lati di esso. 1° Dimostrare che ne nasce un parallelogramma; 2° Dire quando questo risulta rettangolo, e quando losanga; 3° Dire come varia l'area del parallelrgrammo al mutare di D, e quando essa risulta minima.

36. Determinare i numeri x ed y sapendo che essi soddisfano alla equazione $axy + bx + b_1y + a_1 = o$, e che i loro inversi verificano la medesima equazione.

37. Se m è un intero positivo la parte intera di $(1+\sqrt{3})^{2m+1}$ è divisibile per 2^{m+1}.

38. La successione $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$, $x_3 =\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ldots$ per $a > o$ tende verso un limite: quale esso è?

39. L'insieme rappresentato da $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{n^2+n}\right)$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$; ha 8 valori limiti: quali sono?

40. Se m, ed n sono numeri interi positivi nel triangolo, i cui lati sono $m+\frac{1}{m}$, $n+\frac{1}{n}$, $m+n-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$, l'area, e le linee trigonometriche degli angoli sono espresse da numeri razionali.

41. La somma delle 4e potenze dei numeri che misurano le tre mediane d'un triangolo è eguale ai $^9/_{16}$ della somma delle 4e potenze dei numeri che misurano i tre lati.

42. Dati tre piani ortogonali segantisi in O scegliere tre punti A, B, C su quelli rispettivamente situati in modo che il tetraedro $OABC$ risulti regolare e di lato assegnato l.

43. In ogni tetraedro la somma dei quadrati delle 4 congiungenti di ciascun vertice col punto d'incontro delle mediane della faccia opposta è eguale ai $^4/_9$ della somma dei quadrati delle 6 costole.

SOMMARIO:

programma del periodico, e che accoglierà altresì le risposte via via date alle dette domande dai lettori medesimi o dalla Direzione.

La quota d'abbonamento è di L. 6,50 per l'Italia (L. 7,50 per l'Estero).

L'abbonamento può esser preso in qualunque momento dell'anno, ma termina coll'anno stesso; e la Direzione non garantisce di poetre inviare tutti i numeri dell'annata a partire dal primo, a coloro che assumono l'abbonamento dopo il 15 febbraio.

L'ammontare della quota d'abbonamento dev'essere pagato in una sola volta e anticipatamente.

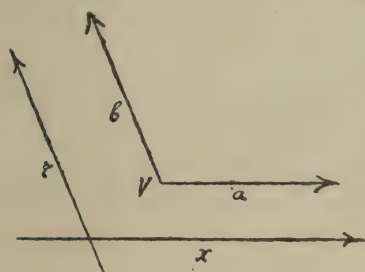
I fascicoli del " BOLLETTINO DI MATEMATICA „ portano la numerazione, d'anno in anno, da 1 a 12, ma escono di regola ogni due mesi. La Direzione si riserva il diritto di raccogliere in un sol fascicolo due o più numeri, all'intento di dare un proporzionato sviluppo a tutte le principali rubriche.

AVVERTENZA PEI NUOVI SOCI

Non è più disponibile alcuna collezione completa essendo esaurita l'annata II e l'annata VII. Sono però disponibili varie copie delle annate I, III, IV, V, VI, VIII e IX. Sono anche disponibili alcune copie dell'Annata II del *Bollettino di Matematiche e di Scienze Fisiche e Naturali*, la cui pubblicazione precedette quella del *Bollettino di Matematica*, un volume interessantissimo anche pei professori di matematica (*in specie per due monografie dei prof.* CONCINA E MARENGHI *sulle costruzioni geometriche coll' uso della sola riga*), [di oltre 300 pagine].

Il Teorema della proiezione d'una poligonale e sue applicazioni alla Trigonometria [1]

di UMBERTO CONCINA - (Alba)

1. **Angolo di due rette.** — Date due rette x ed r, complanari o sghembe, sulle quali siano fissati arbitrariamente i versi positivi (noi li indicheremo sempre con una freccia), dicesi *angolo delle due rette*, e s'indica con xr, uno qualunque degl'infiniti angoli che hanno il vertice in un punto V preso ad arbitrio e come lati due raggi a e b paralleli ad x ed r e diretti secondo i versi positivi di queste rette. Ordinariamente si considera il minimo angolo positivo ab, a cui sono congruenti tutti gli altri. In particolare, se x ed r sono parallele e aventi i versi

[1] In questo articolo sono riprodotti gli appunti di alcune mie lezioni di Trigonometria fatte nel R. Liceo di Alba nell'anno 1908 e successivi. I procedimenti seguiti sono quelli usati in Geometria Analitica (V. p. e. *G. A.* di E. D'Ovidio, cap. III e VII), ma tradotti in una forma semplice ed esposti in modo adatto per gli alunni del liceo. (*) Sperimenti di questo genere si fanno da qualche tempo per opera di valenti insegnanti ed autori (A. Martini-Zuccagni, M. De Franchis, E. Baroni) ed è, io credo, un bene per la scuola, la quale ha bisogno di animarsi di spirito moderno e di rinnovarsi nei programmi e nei metodi.

(*) (*N. d. D.*) Di buon grado accogliamo questo Articolo, ove ritroviamo, ma in una forma molto più semplice e molto più adatta ad alunni del liceo, procedimenti pure usati nei classici *Elementi* del Baltzer (trad.^i dal Cremona), forse troppo poco ricordati ed anche poco noti oggidì.

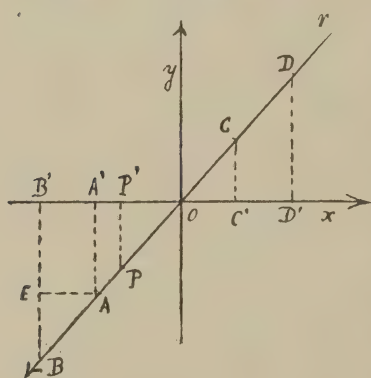
positivi concordi, l'angolo xr è nullo; se x ed r sono parallele e aventi i versi positivi discordi, l'angolo xr è piatto ($= \pi$).

Per un noto Teorema di Geometria si può osservare che l'angolo di due rette non cambia se si trasporta comunque il punto V, o se alle rette x, r si sostituiscono rette ad esse parallele e aventi i versi positivi concordi.

Dobbiamo inoltre osservare che quando si considera il *coseno* dell'angolo xr, possiamo scrivere indifferentemente $\cos xr$ o $\cos rx$, poichè, come si sa, il *coseno* di un angolo ab è uguale al *coseno* dell'angolo opposto (o esplementare) ba.

2. **Proiezione ortogonale di un segmento.** — Dimostriamo il seguente

Teorema. — *Date comunque due rette* x *ed* r, *sulle quali sono fissati ad arbitrio i versi positivi, la proiezione ortogonale* A'B' *su* x *di un segmento* AB *della* r *è uguale, in valore assoluto e segno, al prodotto di* AB *per il coseno di* xr.

Dim. — Supponiamo in primo luogo che x ed r s' incontrino in un punto O. Possiamo in questo caso considerare l'angolo xr col vertice in O. Si prenda dapprima sulla r il segmento *positivo* AB di lunghezza m, e sia $A'B'$ la sua proiezione ortogonale su x e di lunghezza m' (positiva o negativa). Costruito su r il segmento $OP = AB$, risulta dall'uguaglianza dei triangoli rettangoli OPP' ed ABE che OP', proiezione di OP su x, è uguale ad $A'B'$. Perciò, considerando il sistema cartesiano (xy) relativo all'angolo xr, si ha per definizione

$$\cos xr = \frac{OP'}{OP} = \frac{m'}{m} = \frac{A'B'}{AB}$$

e quindi

$$A'B' = AB \cos xr. \tag{1}$$

Se poi si considera sulla r il segmento *negativo* CD, la cui proiezione ortogonale su x è $C'D'$, basta osservare che il segmento

DC è positivo ed ha per proiezione ortogonale su x il segmento $D'C'$ onde, per ciò che si è dimostrato sopra, si ha

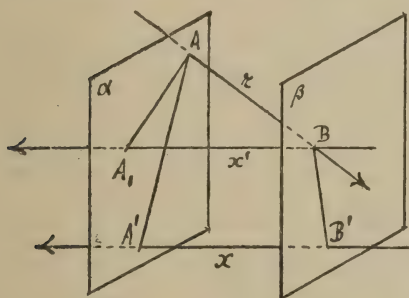
$$D'C' = DC \cos xr,$$

e perciò anche, cambiando segno ai due membri,

$$C'D' = CD \cos xr.$$

Nel caso particolare che xr sia retto, la proiezione ortogonale di ogni segmento di r su x, avendo gli estremi coincidenti, è un segmento nullo. Si ha dunque $A'B' = o$; ma essendo in tal caso $\cos xr = o$, sussiste ancora la relazione (1).

Un altro caso particolare notevole si ha quando x ed r sono parallele. Allora la proiezione $A'B'$ su x di un segmento AB della r è uguale ad AB in valore assoluto e segno o soltanto in valore assoluto, secondo che x ed r hanno i versi positivi concordi o discordi. Quindi, osservando che in questo caso si ha $xr = o$ o $xr = \pi$ e perciò $\cos xr = 1$ o $\cos xr = -1$, si vede che la (1, si verifica anche se x ed r sono parallele.

Passiamo ora a considerare il caso di due rette sghembe x ed r. Conduciamo per A e B i due piani α e β perpendicolari ad x in A' e B': le rette AA' e BB', giacenti in α e in β rispettivamente sono allora pure perpendicolari ad x. (Sicchè per ottenere la proiezione $A'B'$ di AB è indifferente condurre da A e da B o i piani α e β o le rette AA', BB' perpendicolari ad x). Condotta poi per B la retta x' parallela ad x e avente con

questa verso positivo concorde, il piano α risulta perpendicolare ad x' nel punto A_1, quindi anche AA_1 è perpendicolare ad x'; e poichè r ed x' sono complanari, si ha, per ciò che si è dimostrato sopra,

$$A_1B = AB \cos x'r,$$

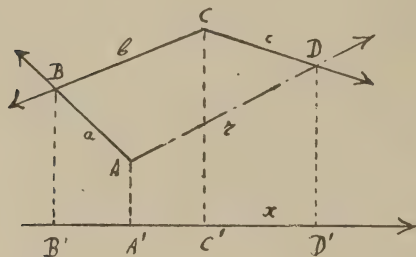
ed essendo $A'B' = A_1B$ ed $x'r = xr$, si ottiene infine

$$A'B' = AB \cos xr.$$

Il ragionamento precedente cade in difetto se xr (e quindi anche $x'r$) è retto, poichè allora i piani α e β coincidono; ma la (1)

sussiste ancora. Invero basta osservare che in tal caso $A'B'$ (e anche A_1B) è nullo e che $cos\, xr = cos \frac{1}{2}\pi = o$.

Così il Teorema resta dimostrato in tutta la sua generalità.

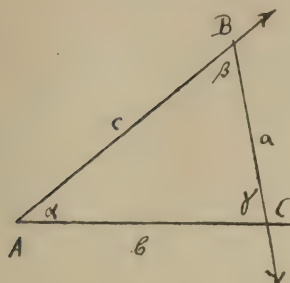
3. **Proiezione di una poligonale sopra un asse.** — Sia data una poligonale qualunque, p. e. $ABCD$, e indichiamo con a, b, c le rette dei successivi lati AB, BC e CD, con r la retta della *resultante* AD. Fissati arbitrariamente i versi positivi delle singole rette a, b, c, r, si considerino i segmenti ordinati AB, BC, CD, *lati consecutivi*, e il segmento ordinato AD, resultante della poligonale, e si proiettino ortogonalmente sopra una retta x comunque assegnata (*asse di proiezione*), sulla quale si stabilisce pure arbitrariamente il verso positivo. Allora, essendo $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $A'D'$ le proiezioni su x dei nominati segmenti, si ha, com'è noto, la relazione

$$A'D' = A'B' + B'C' + C'D',$$

la quale, in virtù del Teorema dimostrato nel num. prec., diviene

$$AD\, cos\, xr = AB\, cos\, xa + BC\, cos\, xb + CD\, cos\, xc.$$

Resta così dimostrato l'importante

Teorema. — *Data una poligonale, piana o gobba, e assegnato comunque un asse di proiezione, il prodotto della resultante pel coseno dell'angolo che essa forma con l'asse di proiezione è uguale alla somma dei prodotti dei lati* consecutivi *della poligonale pei coseni degli angoli che essi formano rispettivamente con questo asse, essendo fissati arbitrariamente i versi positivi sulle rette dei lati e della resultante e sull'asse di proiezione.*

4. **Applicazione ai triangoli rettilinei.** — Una prima importante applicazione del Teorema dimostrato nel num. prec. si ha nel seguente

Teorema delle proiezioni. — *In ogni triangolo un lato è uguale alla somma dei prodotti degli altri due lati pei coseni degli angoli interni che questi lati formano col primo.*

Dim. — Sia il triangolo ABC e indichiamo con a, b, c le lunghezze (e per semplicità anche le rette) dei lati e con α, β e γ le ampiezze degli angoli. Vogliamo dimostrare che

$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha.$$

Consideriamo a tal fine la poligonale ABC, la cui resultante è AC; e poichè i numeri c, a e b sono essenzialmente positivi, fissiamo come positivi, sulle rette c, a e b, i versi (AB), (BC) e (AC). Allora, assumendo come asse di proiezione la retta b della resultante stessa AC, si ha pel Teorema del num. prec.

$$AC \cos bb = AB \cos bc + BC \cos ba,$$

ossia, poichè $bb = o$, $bc = \alpha$, $ab = \gamma$,

$$b = c \cos \alpha + a \cos \gamma.$$

Analogamente si dimostrerebbero

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$$
$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

5. **Formule di addizione e sottrazione degli angoli.** — Essendo α e β due angoli quali si vogliano, positivi o negativi, dimostriamo che sussistono le seguenti formule fondamentali:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \tag{1}$$
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta, \tag{2}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \tag{3}$$
$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta. \tag{4}$$

Innanzi tutto, riferendoci dapprima alle formule (1) e (2), osserviamo che queste si trasformano in identità o in formule già note, quando a β (o ad α) si attribuiscano valori congruenti a o, $\frac{1}{2}\pi$, π o $\frac{3}{2}\pi$. Così p. e. se poniamo

$$\beta \equiv \frac{3}{2}\pi \equiv -\frac{1}{2}\pi,$$

abbiamo rispettivamente le identità

$$sen\,\alpha = sen\,\alpha \quad e \quad cos\,\alpha = cos\,\alpha\,;$$

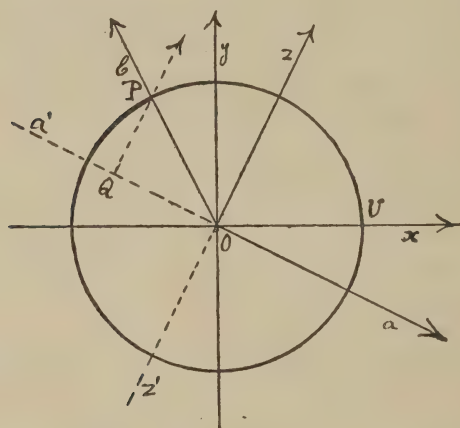
se invece facciamo

$$\beta \equiv \frac{1}{2}\pi,$$

otteniamo le note formule

$$cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right) = -\,sen\,\alpha \quad e \quad sen\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right) = cos\,\alpha.$$

Possiamo dunque escludere i casi in cui β assume i predetti valori.

Consideriamo gli angoli consecutivi $xa \equiv \alpha$ ed $ab \equiv \beta$, onde $xb \equiv xa + ab \equiv \alpha + \beta$. Si considerino poi i sistemi cartesiani (xy) ed (az), il primo relativo agli angoli xa ed xb, e il secondo relativo all'angolo ab. Per l'ipotesi fatta sull'angolo $\beta \equiv ab$ ci è lecito supporre che il raggio b non coincida con alcuno dei raggi z, z', a, a' del sistema (az). Allora, tracciato il cerchio goniometrico (di raggio $OU = 1$), anche il punto goniometrico P dell'angolo ab nel sistema (az) è fuori degli assi coordinati, e perciò, condotta la PQ perpendicolare all'asse delle ascisse a, abbiamo la poligonale OQP, la cui resultante è OP. Si noti subito che si ha

$$OP = 1,\ OQ = cos\,ab = cos\,\beta,\ QP = sen\,ab = sen\,\beta.$$

Ciò posto, assumendo come asse di proiezione x e applicando il Teorema del n. 3, abbiamo (osservando che QP è parallela a z)

$$OP\,cos\,xb = OQ\,cos\,xa + QP\,cos\,xz,$$

ossia, per ciò che si è notato sopra (ed essendo $xz \equiv xa + az$),

$$cos\,(\alpha + \beta) = cos\,\beta\,cos\,\alpha + sen\,\beta\,cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right),$$

e infine

$$cos\,(\alpha + \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta.$$

Per dedurre la (2) si potrebbe assumere come asse di proiezione della poligonale OQP l'asse y. Ma preferiamo osservare che la (2) si ottiene dalla (1) ponendovi in luogo di β l'angolo $\beta - \frac{1}{2}\pi$. Infatti si ha allora successivamente

$$\cos\left(\alpha + \beta - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\alpha\cos\left(\beta - \frac{1}{2}\pi\right) - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\left(\beta - \frac{1}{2}\pi\right),$$

$$\cos\left[\frac{1}{2}\pi - (\alpha + \beta)\right] = \cos\alpha\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \beta\right) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - \beta\right),$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta.$$

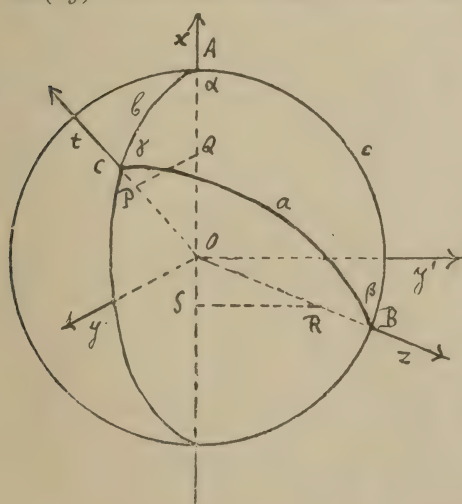
Se infine nelle formule (1) e (2) si sostituisce a β l'angolo $-\beta$, si ottengono le (3) e (4).

6. **Teorema fondamentale della Trigonometria sferica.** — Veniamo da ultimo a dimostrare il seguente

TEOREMA (di EULERO). — *Il coseno di un lato di un triangolo sferico qualunque è uguale al prodotto dei coseni degli altri lati più il prodotto dei seni di questi lati e del coseno dell' angolo opposto al primo.*

DIM. — Sia ABC un triangolo sferico, i cui lati indichiamo con a, b, c e gli angoli con α, β, γ. Proveremo p. e. che

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos\alpha.$$

Essendo (xzt) il triedro al centro corrispondente al triangolo, sia (xy) il sistema cartesiano relativo all'angolo xt, a cui corrisponde il lato b, nel piano AOC; e sia (xy') il sistema cartesiano relativo all'angolo xz, a cui corrisponde il lato c, nel piano AOB. Notiamo subito che l'angolo yy' è la sezione normale del diedro $B(OA)C$ ed è quindi uguale ad α. Supposti i lati b e c diversi da un quadrante, segniamo su t e z rispettivamente $OP = 1$ ed $OR = 1$; conduciamo quindi PQ ed RS perpendicolari alla x, e

otteniamo le poligonali OQP, OSR, che hanno rispettivamente le resultanti OP ed OR. Si ha allora

$$OQ = cos\, b \quad QP = sen\, b \quad OS = cos\, c \quad SR = sen\, c.$$

Proiettando ora OQP sulla retta z ed OSR sulla retta y, notando che l'angolo $xy = \frac{1}{2}\pi$, si ha (num. 3)

$$OP\, cos\, zt = OQ\, cos\, zx + QP\, cos\, zy,$$

$$OR\, cos\, yz = OS\, cos\, yx + SR\, cos\, yy' = SR\, cos\, yy'.$$

Onde, tenendo conto di quanto si è notato sopra,

$$cos\, a = cos\, b\, cos\, c + sen\, b\, cos\, yz, \tag{1}$$

$$cos\, yz = sen\, c\, cos\, \alpha. \tag{2}$$

Infine, eliminando $cos\, yz$ dalla (1),

$$cos\, a = cos\, b\, cos\, c + sen\, b\, sen\, c\, cos\, \alpha. \tag{3}$$

Osservazione. — Nella dimostrazione precedente abbiamo escluso che fosse $b = \frac{1}{2}\pi$ o $c = \frac{1}{2}\pi$, perchè in questi casi viene a mancare l'una o l'altra delle due poligonali OQP, OSR. Ma si può provare che anche in questi casi sussiste la (3). Consideriamo i vari casi possibili:

a) Se è soltanto $b = \frac{1}{2}\pi$, il raggio t coincide con y, quindi $yz = tz = a$, e perciò la (2), che sussiste ancora, ci dà

$$cos\, a = sen\, c\, cos\, \alpha,$$

alla quale si riduce appunto la (3) per $b = \frac{1}{2}\pi$.

b) Se è soltanto $c = \frac{1}{2}\pi$, il raggio z coincide con y', quindi $yz = yy' = \alpha$, e perciò la (1), che sussiste ancora, ci dà

$$cos\, a = sen\, b\, cos\, \alpha,$$

alla quale si riduce appunto la (3) per $c = \frac{1}{2}\pi$.

c) Se $b = c = \frac{1}{2}\pi$, si ha $a = tz = yy' = \alpha$ e la (3) si riduce all'identità

$$cos\, a = cos\, \alpha.$$

Analogamente si dimostrerebbero

$$cos\, b = cos\, a\, cos\, c + sen\, a\, sen\, c\, cos\, \beta$$

$$cos\, c = cos\, a\, cos\, b + sen\, a\, sen\, b\, cos\, \gamma.$$

Atti della Sottocommissione Italiana della Commissione internazionale per l'insegnamento Matematico

Sull'insegnamento matematico nelle Scuole infantili ed elementari

RELAZIONE del prof. ALBERTO CONTI
della R. Scuola Normale Margherita di Savoia in Roma

PARTE I

Stato attuale dell'organizzazione e dei metodi d'insegnamento della matematica, per quanto riguarda le Scuole infantili ed elementari, in Italia.

Capitolo I. — I diversi tipi di scuole infantili ed elementari.

§ 1. — *Scuole infantili.* — Sotto denominazioni varie, esistono, in Italia, migliaia di scuole infantili, ma solo la minima parte — meno di cento — quelle cioè annesse alle scuole normali femminili dello Stato, hanno una vera e propria organizzazione, di cui fra breve parleremo, mentre tutte le altre, sparse ovunque, nelle città grandi e nelle città piccole, sono quasi abbandonate a se stesse. Il più recente Regolamento generale per l'Istruzione elementare approvato con R. Decreto 6 febbraio 1908 n. 150, stabilisce (Art. 337) che

« I municipi, gli enti morali, le associazioni e i privati possono aprire istituti di educazione per l'infanzia, per i sordo « muti, per i ciechi e per i deficienti in locali riconosciuti salubri « e convenienti.

« Le persone preposte a questi istituti devono possedere i « titoli legali comprovanti la loro idoneità all'ufficio.

« *Speciali istruzioni ministeriali determineranno i limiti, i* « *programmi e i metodi per i detti istituti* »

Il quale art. 337, del Regolamento in vigore, non è che la *fedele ripetizione* dell'art. 226 del Regolamento anteriore, emanato fin dal 1895, e le *speciali istruzioni* promesse fino dal 1895, non sono state mai date, a tutt'oggi; è inoltre pur vero, per quanto sia doloroso il constatarlo, che le maestre fornite del diploma di maestra giardiniera, sono poco disposte a prestar servizio negli asili d'infanzia, a cagione della scarsità degli stipendi corrisposti alle Maestre d'Asilo, onde, stante anche l'indeterminatezza delle disposizioni regolamentari, « i R. Provveditori agli Studi sono co- « stretti a permettere che vengano preposte agli istituti infantili « anche persone munite della sola patente di maestra elementare » (1) e anche — aggiungiamo noi con fondamento di verità — anche persone che hanno appena la licenza elementare.

Sopra 7392 maestre giardiniere soltanto 2873 sono fornite del titolo prescritto (2).

Speciale menzione meritano le scuole infantili annesse alle scuole normali femminili, governative o pareggiate.

Secondo l'art. 1 della Legge 12 luglio 1896 sul riordinamento delle scuole normali e complementari. « A ciascuna delle scuole « normali femminili è unito un giardino d'infanzia »; ed una delle condizioni indispensabili perchè una scuola normale femminile non governativa possa essere pareggiata alle regie. è che le sia annesso anche il giardino d'infanzia (Art. 15 Legge cit. 12 luglio 1896 e Art. 117 del Regolamento 3 dicembre 1896).

§ 2. — ***Scuole elementari.*** — In conformità della Legge 8 luglio 1904 e del vigente Regolamento generale per l'istruzione elementare, approvato con R. Decreto 6 febbraio 1908, la scuola elementare completa comprende *un corso di 6 classi* delle quali le prime tre costituiscono il cosidetto corso inferiore e le altre, 4ª, 5ª, 6ª, il cosidetto corso superiore; ma quegli alunni che vogliono proseguire gli studi nelle scuole secondarie (Art. 8 Legge

---

(1) Tullio Fontana: *Manuale di legislazione scolastica.* Ditta G. B. Paravia, 1905.

(2) Cfr. Relazione del dott. C. Corradini Direttore generale dell'Istruzione primaria e popolare, pubblicata per cura del Ministero della Pubblica Istruzione, nel 1911.

1904), *compiuta la quarta classe elementare*, possono sostenere un esame speciale (detto *di maturità*) superando il quale, conseguono un diploma (*diploma di maturità*) che, senz'altro, dà loro diritto d'ammissione alle dette scuole medie. — Non vi è esame di ammissione per la prima classe di qualsiasi scuola secondaria, e per l'ammissione a qualsiasi altra classe superiore alla prima, occorre, per tutti i nati dopo il 1894, la presentazione del diploma di maturità di cui sopra, pel cui conseguimento, a sensi del predetto art. 8, sono ritenuti sufficienti gli studi delle prime quattro classi elementari.

Non abbiamo detto « necessari » attesochè si può essere ammessi a sostenere l'esame di maturità predetto, anche senza aver frequentate le prime quattro classi elementari.

La stessa Legge del 1904, mentre ha prolungato l'obbligo dell'istruzione in ragione del numero di classi esistenti nel Comune, ha consentito che oltre al tipo normale di sei classi possa esistere un tipo, *transitorio*, di scuola elementare a corso incompleto, di *tre*, di *quattro* e di *cinque* classi.

Esistono poi *scuole serali* o *festive di complemento* e *scuole serali* o *festive per adulti analfabeti*. (Art. 12, 13, 14 e 15 della cit. legge 8 luglio 1904).

Inoltre la legge recentissima 4 giugno 1911 ha provveduto all'istituzione e al riordinamento di speciali scuole elementari obbligatorie pei militari del R. Esercito e della R. Marina e pei reclusi delle carceri e degli stabilimenti penitenziarî.

L'amministrazione delle scuole elementari, un tempo affidata quasi interamente ai Comuni, è passata, adesso, in massima parte, alle cure dello Stato, in virtù delle disposizioni della Legge 4 giugno 1911, secondo la quale (Art. 14) « I Comuni *capoluogo di provincia* e i comuni *capoluogo di circondario* provvedono, a norma della legge e dei regolamenti, all'amministrazione delle scuole elementari. *Per tutti gli altri comuni della provincia*, l'amministrazione delle scuole elementari è affidata al *Consiglio scolastico*, un organo di nuova formazione, alla cui costituzione la citata legge ha provveduto, in maniera che la scuola elementare sia oggetto di speciale cura da parte dello Stato e, per esso, dei rappresentanti dello Stato medesimo nel Consiglio predetto.

Riguardo all'età degli alunni delle scuole elementari, sono in vigore precise disposizioni del citato Regol. 6 febbraio 1908 se

condo le quali (Art. 99) « nessuno può essere iscritto per la prima « volta nelle scuole elementari inferiori se non abbia compiuto « o non compia, entro il dicembre dell'anno in corso, i sei anni « di età; nessun alunno che abbia oltrepassato i 12 anni può ri- « manere nel corso inferiore, nè può frequentare il corso supe- « riore chi abbia oltrepassato gli anni 15, salvo che per giustifi- « cati motivi abbia ritardato, oltre i limiti legali, l'inizio del corso « elementare e purchè non si tratti di scuole miste o di scuole « maschili rette da maestre ».

La separazione degli alunni per sesso ha luogo quando il numero dei fanciulli e delle fanciulle sia tale da obbligare a duplicare i corsi (Art. 5 della legge 8 luglio 1904); quando il numero degli alunni sia minore di 50 anche il corso elementare superiore può essere promiscuo.

Quanto al personale insegnante, di regola le scuole elementari maschili inferiori sono affidate a maestri o a maestre, e le scuole elementari femminili (inferiori e superiori), e così quelle miste sono affidate a maestre (Art. 71 del Regol. gen. 6 febb. 1908).

Capitolo II. — **Scopo dell'insegnamento della matematica; parti di essa insegnate nelle scuole infantili ed elementari, e metodi d'insegnamento.**

§ 1. *Scuole infantili.* — Per le scuole infantili di cui si è parlato nel § 1 del precedente capitolo, già abbiamo lamentato che le *speciali istruzioni ufficiali*, promesse sino dal 1895 e nuovamente promesse nel 1908, non siano mai venute; onde, sia per quanto si riferisce allo scopo dell'insegnamento della matematica, sia per quanto riguarda i particolari concetti matematici istillati nelle tenere menti dei bambini frequentanti i giardini d'infanzia, non esiste un piano di studî ufficiale a cui possiamo riferirci. Ciascuna maestra giardiniera stabilisce da se medesima, d'accordo col Direttore della Scuola normale quando si tratti di Giardino annesso a tale scuola, un « programma didattico » nel quale, fra gli argomenti su cui intratterrà i bimbi, indica pure quelli di natura matematica. Ma pur mancando precise istruzioni governative [1], v'è di buono che in molti giardini d'infanzia — certo in

---

[1] A meno che non vogliansi considerare come tali, quelle relative ai Programmi pel cosidetto Corso froebeliano, istituito, nelle Scuole Normali, per la preparazione delle aspiranti al diploma di Maestra giardiniera [cfr. Programmi 19 ottobre 1897].

quelli annessi alle Scuole normali — dominano i criterî caratteristici del Fröebel, ai quali, quindi, vengono ispirati i programmi didattici delle singole maestre giardiniere. Ora i *doni* del Fröebel si prestano benissimo per porre i primi concetti di forme poliedriche, di solidi di rotazione, di figure piane e di figure lineari, d'uguaglianza, equivalenza e somiglianza tra figure geometriche, come anche i concetti di numero intero, di numero frazionario, di misura e quelli di somma, differenza, prodotto e quoto, ossia in una parola tutti i più importanti concetti della matematica elementare; ciò che può e suole farsi senza lettura nè scrittura alcuna, con la semplice osservazione diretta, col giuoco e col sussidio pure del disegno (1). Sono sorpassati i tempi nei quali, sulla base di un vecchio Regolamento, approvato nel Regno di Sardegna e Piemonte con R. Decr. 21 agosto 1853 (2), l'insegnamento negli asili d'infanzia doveva versare sulla nomenclatura, sulla « numerazione mentale, sull'uso del sillabario, sul leggere con intelligenza e sui primi rudimenti del Catechismo e della Storia « sacra ».

§ 2. *Scuole elementari.* — Lo scopo dell'insegnamento dell'aritmetica nella Scuola elementare ha subito necessariamente delle trasformazioni, insieme col diverso ordinamento, che leggi e regolamenti vennero dando a tale scuola, dalla costituzione del Regno d'Italia sino ai nostri giorni (cfr. *Allegati* A, B, C, D). Devesi inoltre riconoscere che, sia nelle norme date per precisare lo scopo di questo insegnamento, sia in quelle date per determinarne il programma per le singole classi, appaiono evidenti i frutti del progresso generale che si è venuto verificando nei metodi d'insegnamento, e degli stessi studî critici sui fondamenti della matematica.

---

(1) Cfr. F. J. Jacobs: *Manuale pratico dei giardini d'infanzia di Federico Fröebel.* — Prima edizione italiana. — Milano 1871. Stabilimento Civelli. Ce ne ha reso persuasi, nel fatto, la consultazione di alcuni particolari programmi didattici, davvero pregevoli, fra i quali ci piace segnalare quelli delle Maestre giardiniere Dina Maffioli della R. Scuola Normale G. Milli di Roma e Carolina Riva della R. Scuola Normale A. Morandi-Manzolini di Bologna.

(2) Codice della P. I. 1870, Saluzzo, pag. 694.

Rinviando senz'altro alla lettura degli Allegati predetti, per quanto si riferisce ai Programmi del 15 settembre 1860 (Mamiani), e a quelli del 10 ottobre 1867 (Coppino), ci intratterremo un momento sui programmi successivamente emanati dai Ministri Boselli (nel 1888) e Baccelli (nel 1894), per poi venire senz'altro ai programmi attualmente in vigore, secondo il R. Decreto 29 gennaio 1905 (Ministro della P. I. l'on. V. E. Orlando), i quali, pur differendo dai programmi del 1888 e del 1894 in ragione del diverso ordinamento dato alla Scuola elementare dalla Legge Orlando dell' 8 luglio 1904, hanno conservato, nell'insieme, lo spirito caratteristico dei programmi del 1888, con quei miglioramenti ulteriori loro dati nei programmi del 1894.

Intorno ai programmi approvati con R. Dec. 25 settembre 1888, il compianto ANTON MARIA BUSTELLI, che con molto acume e con grande amore si occupò di questioni pedagogiche ed in particolare dell'insegnamento dell'aritmetica e della geometria nelle scuole primarie, tenne un corso speciale di Conferenze che poi comparvero riunite in un interessante volume [1], ove troviamo espressamente detto che questi programmi « segnano, « nel tutto insieme, a giudizio pressochè universale, un vero pro« gresso. Spira in essi un alito nuovo di vita pedagogica con l'af« fermazione del principio del metodo intuitivo sperimentale, e « con la tendenza spiccata alla trasformazione della scuola ele« mentare in vera e propria scuola popolare ».

Nella prima Conferenza, il Bustelli s'intrattiene « sull'asso« ciazione intima e costante nella quale è opportuno si trovino, « a cura del maestro, l'aritmetica e la geometria » e dimostra come i Programmi in questione, pure non contenendo per le prime tre classi alcun esplicito accenno alla geometria, abbiano però nel *concetto intuitivo delle frazioni ordinarie* (per la 2ª classe) e nei *Pesi e misure metriche di maggiore uso nella vita* (per la 3ª classe), due veri richiami ad un primo grado d'insegnamento geometrico, « due germogli di un programmino geometrico che « l'abile maestro saprà opportunamente svolgere in connessione

---

[1] A. MARIA BUSTELLI: *L'insegnamento dell'Aritmetica e della Geometria secondo i nuovi programmi ufficiali per le Scuole primarie e popolari.* — Città di Castello, Tip. Lapi, 1889.

« organica col corrispondente programma aritmetico pel corso « inferiore ». — « L'insegnamento aritmetico-geometrico assume « poi, nel corso superiore, a senso del programma, una forma più « sistematica; sperimentale sempre, ma con affermazioni più « esplicite, con nozioni meno incompiute e meglio organizzate, « insomma con dei primi germi di istituzione scientifica »; e nella stessa Conferenza il Bustelli sostiene ed illustra ampiamente l'opportunità di procedere nel Corso elementare superiore, per ogni nuova forma geometrica, secondo tre fasi: 1ª *presentazione* dell'oggetto o della figura (in disegno, in carta ritagliata, in sistemi di asticciole, in legno, ecc. secondo i casi) e rinvenimento e riconoscimento sperimentale delle principali proprietà sue caratteristiche; 2ª *descrizione*, ossia da prima disfacimento (simulato) e riproduzione della figura coi mezzi dianzi indicati e poi dimostrazione sperimentale della riducibilità di ciascuna delle proprietà sue caratteristiche a ciascuna delle altre; 3ª *definizione* della figura.

Ma infine coi loro pregï caratteristici suaccennati, i programmi del 1888 avevano il difetto d'una estensione eccessiva, specialmente nel corso superiore, allora costituito da due classi soltanto, la 4ª e la 5ª, pel quale prescrivevano tutto il calcolo con frazioni ordinarie e decimali, lo studio delle proporzioni, i conti d'interesse e di società e pur la spiegazione ragionata delle quattro operazioni sui numeri interi; cosicchè vennero opportunamente i programmi del 1894, preceduti dalla Relazione del Ministro del tempo, Guido Baccelli, ove fra l'altro si legge: « Ho sfrondato il programma di « aritmetica di tutte quelle parti che sembrano e sono usurpa- « zione del compito riserbato alle scuole mezzane, e l'ho rivolta « più direttamente alla pratica cioè all'acquisto dell'abilità pre- « ziosa di applicare il calcolo, anche senza aiuto di operazioni « scritte, ai casi della vita domestica e delle piccole aziende indu- « striali e commerciali », Le istruzioni officiali relative a tali programmi possono considerarsi compendiate tutte nella seguente conclusione, che contiene un principio fondamentale, a nostro parere giustissimo: « Aritmetica, geometria, sistema metrico deb- « bono formare un complesso di cognizioni e di attitudini così « disposte, che, oltre all'effetto di abituare a precisione assoluta « di linguaggio, porgano subito alle famiglie, alle officine, ai traf-

« fici, ai campi, una contribuzione indispensabile di ordine e di « precisione ».

Le istruzioni stesse presentano, anche più largamente di quelle relative ai programmi dell'88, l'affermazione del principio del metodo intuitivo sperimentale; ci piace poi di segnalare come in questi programmi, per la prima volta si affermi completamente per l'aritmetica il metodo ciclico con lo studio di tutte e quattro le operazioni fondamentali fino dalla I classe, nello spazio numerico da 1 a 20, estendentesi poi successivamente nello spazio da 1 a 1000 (II classe) ed oltre il 1000 (III, IV e V). Notevole è poi l'importanza data da questi programmi alle esercitazioni numeriche mentali, rispetto alle quali i programmi dell'88 si erano limitati alle operazioni sui numeri di una cifra. Nelle stesse istruzioni speciali è posta in luce questa importanza maggîore data al calcolo che suol dirsi mentale e che beninteso non va confuso col calcolo scritto trasportato, per così dire *in aria* (1).

Indubbiamente dunque i programmi del 1894 ebbero tutti i pregi di quelli dell'88 e maggiori ancora, senza averne i difetti.

E venne la legge Orlando dell'8 luglio 1904 e con essa quel nuovo ordinamento della scuola elementare e popolare su cui ci siamo intrattenuti nel Cap. I, con due disposizioni nuove sopratutto:

a) abolizione dell'esame d'ammissione alla 1ª classe delle scuole medie inferiori, e istituzione d'un esame, di *maturità*, da sostenersi dagli alunni della 4ª elementare o dai provenienti da scuola privata per passare senz'altro alla scuola media;

b) istituzione di una 6ª classe elementare e costituzione di un corso popolare formato dalle classi 5ª e 6ª, avente prevalentemente fine a sè stesso ma non escludente in modo assoluto la continuazione, anche per questa via, agli studi della scuola media.

Il compilatore dei programmi per la scuola elementare così riordinata trovò un'ottima base nei programmi del 1894, che, non esitiamo a dirlo, avrebbero potuto rimanere immutati per le prime quattro classi anche col nuovo ordinamento, salvo al più l'aggiunta delle unità di misura di volume, capacità, peso e valore.

---

(1) Cfr. il pregevole libro di CORRADO CIAMBERLINI: *Sull'insegnamento dell'aritmetica pratica e della geometria nelle scuole primarie.* - 2ª edizione. Bologna, Casa Zanichelli 1902.

A prescindere da talune inesattezze che già furono ripetutamente rilevate, [1] ritroviamo nei programmi vigenti delle prime quattro classi elementari, tutti quei pregî che abbiamo segnalato pei programmi dell'88 e del 94; e per le classi 5ª e 6ª appare evidente il proposito del compilatore dei programmi di non elevarsi ad argomenti di più speciale pertinenza della scuola media, ma piuttosto — ciò che a noi sembra lodevole — di approfondire vieppiù gli argomenti d'aritmetica e geometria studiati nelle prime quattro classi, con una più stretta connessione in queste due ultime classi, costituenti più propriamente il corso popolare, colla vita economica, domestica, industriale, commerciale.

Dopo di che riproduciamo senz'altro il testo ufficiale dei programmi vigenti e delle istruzioni ad essi allegate, molto più estese di quelle che accompagnarono tutti i precedenti programmi, tali veramente da offrire, da sè medesimi, un'idea chiara e completa dello scopo che il legislatore ha desiderato assegnare all'insegnamento dell'aritmetica e della geometria nelle scuole primarie e popolari, e dei criterî che il legislatore stesso ha desiderato suggerire agli insegnanti per lo svolgimento delle varie parti del programma nelle singole classi:

Programmi vigenti per l'insegnamento dell'aritmetica nelle scuole elementari.

I programmi in vigore per l'insegnamento dell'aritmetica e geometria nelle scuole elementari, furono promulgati con R. Decreto 29 gennaio 1905 e inseriti nel *Bollettino Ufficiale del Ministero della P. I.* del 2 marzo 1905.

Programmi per un corso completo di 6 classi.

Classe I. — Numerazione parlata e scritta sino a 100. Esercizi pratici orali e scritti sulle quattro operazioni sino a 20.

Classe II. — Numerazione parlata e scritta sino al mille inclusivo ed ai multipli di mille sino a diecimila. Esercizi orali sulle quattro ope-

(1) Cfr. G. Frattini: *La Scuola educatrice*, 1905. - A. Conti: *Aritmetica razionale*, 3ª edizione e seguenti, 1906-1912 (Bologna, Casa Zanichelli).

razioni sino a 100 e scritti sino ai multipli di mille e sino a diecimila. (Nella moltiplicazione e nella divisione il moltiplicatore ed il divisore debbono essere rispettivamente di una sola cifra). Soluzione di facili problemi pratici. Concetto intuitivo della frazione ordinaria. Cognizioni pratiche elementari delle unità di misura (lunghezza, capacità e peso) di uso più comune.

Classe III. — Numerazione parlata e scritta oltre 10000. Calcolo mentale sulle quattro operazioni (entro il 100, tranne che si tratti di moltiplicare o dividere per 10 o multipli di 10). Esercizî scritti sulle quattro operazioni dei numeri interi e decimali. (Nella moltiplicazione uno dei fattori e nella divisione il divisore non devono avere più di tre cifre; l'altro fattore e il dividendo non devono averne più di sette). Scrittura delle frazioni ordinarie e loro riduzione in decimali. Esercizî pratici sulle misure metriche (lunghezza, capacità, peso e valore). Soluzione di facili problemi.

— Nozione intuitiva e disegno a mano libera delle principali figure geometriche piane.

Classe IV. — Calcolo mentale. Esercizî scritti sulle quattro operazioni con numeri interi e decimali e sulla riduzione di frazioni ordinarie in decimali. (Nelle moltiplicazioni i prodotti non dovranno oltrepassare le nove cifre e uno dei fattori non dovrà averne più di tre. Nelle divisioni il dividendo non dovrà superare le nove cifre, nè il divisore dovrà averne più di tre. Lettura e scrittura dei numeri romani. Esercizî pratici sul sistema metrico decimale (lunghezza, superficie, volume, capacità, peso e valore). Soluzione di facili problemi.

— Nozioni e disegno a mano libera delle figure geometriche piane, e regole pratiche per misurarle. Nomenclatura e disegno a mano libera de' principali solidi geometrici.

Classe V. — Calcolo mentale. Esercizî e facili problemi sulle quattro operazioni con interi e decimali, con dirette applicazioni al sistema metrico, alle misure agrarie e di uso in commercio. Calcolo pratico di frazioni ordinarie. Nozioni pratiche di rapporti e proporzioni semplici (interesse, sconto, aggio, tara, senseria).

Disegno a mano libera e costruzione dei solidi geometrici; regole pratiche per misurarne la superficie e il volume.

Classe VI. — Esercizî di aritmetica e di geometria, con richiamo delle regole apprese nella quinta classe. Soluzione a memoria di facili problemi. Regola del tre semplice e composta, col metodo della riduzione all'unità. Computi commerciali. Ragguaglio del sistema monetario italiano coi sistemi dei più importanti Stati esteri e applicazioni commerciali.

Programmi per le scuole serali o festive di complemento.

Esercicî spediti sulle operazioni aritmetiche, con frequenti applicazioni alla economia domestica, a computi commerciali e relativi al lavoro. Nozioni ed esercizî pratici sulle misure metriche, e loro ragguaglio colle altre misure di uso comune nel luogo.

Programmi per le scuole serali o festive per adulti analfabeti.

Se il corso è di un solo anno, il programma sarà il seguente:

Numerazione parlata e scritta. Esercizî sulle quattro operazioni dei numeri interi e decimali ed applicazioni alle unità di misura. Calcoli semplicissimi di percentuali.

Se il corso è biennale, il programma del secondo anno sarà il seguente:

Esercizî e problemi pratici attinenti all'economia domestica, alle misurazioni metriche, ai computi commerciali, alla tenuta dei conti.

Istruzioni allegate al testo ufficiale dei programmi.

Lo studio dell'aritmetica nelle scuole elementari va prima dal sensibile all'astratto, poi dall'astratto al concreto.

I primi rudimenti di calcolo, non vanno mai disgiunti da dati sensibili. La rappresentazione di due fanciulli, quattro mele, cinque dita, precede naturalmente la nozione dei numeri astratti due, quattro, cinque. Gli esercizî di numerazione e di calcolo si eseguano dunque da principio su oggetti che il fanciullo tiene in mano o vede, facendo contare oggetti di scuola, come i banchi, i posti, i libri, pagine di libri, compiti, ecc. Specialmente negli esercizî di numerazione si deve sempre aver cura di ampliare la rappresentazione concreta che l'alunno può farsi di un numero grande, il quale altrimenti molto spesso resta per lui una pura nozione verbale.

L'utilità di questi esercizî sarà segnalata in modo particolare a proposito delle nozioni di storia e di geografia.

In generale poi, quando il maestro si accorga che il fanciullo duri fatica a darsi ragione di un numero o dei risultati di una operazione numerica, converrà sempre ritornare ai dati del senso e della esperienza.

Ciò che sin dai primi passi si raccomanda al maestro si è, che, nella rappresentazione di più unità concrete, le singole unità siano non soltanto omogenee, ma anche almeno approssimativamente uguali: due pezzi di carta di uguale forma e dimensione, due palline uguali, due mele, due arance e così via; e ciò perchè l'intuizione si accosti di più al concetto matematico di unità, mentre ripugna anche al semplice

istinto logico l'assumere sotto lo stesso concetto di unità, per esempio, un grande foglio e un pezzettino di carta, una grossa pietra e un ciottolino, la lavagna della classe e la lavagnetta che il fanciullo può avere in mano.

I primi esercizî debbono essere soltanto mentali e orali. I programmi dànno la più grande importanza al calcolo mentale, di cui quello scritto dev'essere soltanto un ausilio nei casi più complicati. Se è condannevole l'abuso degli esercizi scritti, ancor più da riprovarsi è l'applicare subito i fanciulli alle operazioni scritte sui numeri, le quali diventano spesso una pura meccanica di segni grafici. Il maestro tenga bene presente, che si può essere assolutamente analfabeti, eppure fare speditamente le operazioni numeriche più complicate, come avviene a quelle persone ignoranti, che pure debbono fare ogni giorno dei conti: la massaia che calcola il frutto delle uova, la donna di servizio che fa il doppio conto della spesa, il piccolo rivenditore che traffica svariati generi di cose di vario prezzo e così via. Le operazioni numeriche possono infatti compiersi, come si è notato, senza bisogno di saper leggere e scrivere, e può dirsi che la scuola, se abitua in tutti i casi al sussidio grafico, sopprime o indebolisce attitudini spontanee di agilità e prontezza intellettuali, le quali essa dovrebbe invece sviluppare. La nozione precede naturalmente il segno grafico, così per le parole come pel numero e l'esercizio scritto non deve essere, specialmente da principio, che un' applicazione e riproduzione dell' esercizio orale. Nè questo si dica solo della numerazione e delle quattro operazioni fondamentali, ma persino dei problemi di cui nei gradi superiori l'alunno deve poter dare, entro limiti ragionevoli, e quindi pratici, pronta e sicura soluzione.

Secondo le linee del programma, la materia dell' aritmetica ha per base, in tutte le sei classi, il contare e l'eseguire le quattro fondamentali operazioni, sia a voce che per iscritto, e, come termine, l' applicazione del calcolo a problemi occorrenti nella pratica professionale. Il limite varia secondo i gradi.

Nella prima classe i fanciulli dovranno saper contare sino a 100 ed essere addestrati ad impiegare il periodo numerico dall'1 al 20, eseguendo, per mezzo di opportuni esercizî che non escano dalla cerchia di questo periodo, le quattro operazioni. Si forma così la base di concetti numerici di ordine più alto.

Nella prima e nella seconda classe si evitino i termini tecnici che entrano nelle operazioni (poste, fattori, quozienti, ecc.), curando però di far comprendere il rapporto fra le varie operazioni. Così si dirà che la sottrazione è un' addizione inversa, la moltiplicazione un' addizione di numeri uguali ripetuta tante volte, e così via.

Essendo nella prima classe limitatissima la quantità degli esercizî che possono farsi entro il periodo numerico dall'1 al 20, il maestro

dovrà ottenere che gli allievi acquistino una pronta sicurezza nel dare i risultati di queste facili operazioni: contare per due, per quattro e per cinque fino a 20, sommare e sottrarre fino a questo limite; moltiplicare (e cioè raddoppiare un numero non superiore a 10, triplicare un numero non superiore a 6, quadruplicare un numero non più alto del 5) e dividere (cioè trovare la metà, il terzo, il quarto, il quinto di un numero non più alto del 20, purchè il quoziente sia un numero intero).

Quando il maestro si accorga che un esercizio di aritmetica ha stancato, lo sospenda, poichè la mente dei fanciulli non deve essere affaticata soverchiamente nel calcolo; ogni esercizio non deve oltrepassare la mezz' ora.

E perchè l' attenzione della scolaresca non si rallenti, è bene che il maestro esponga ogni operazione senza preamboli, con sobrietà e chiarezza, abituando i fanciulli alla riflessione ed esigendo che essi a ogni quesito orale o scritto rispondano con brevi, ma compiute proposizioni.

Così una mezz' ora di aritmetica sarà anche una mezz' ora d' insegnamento di lingua.

Nella seconda classe il nuovo programma prescrive la numerazione e le quattro operazioni sino al mille ed ai multipli di mille non oltre 10 mila. Ciò non deve parer troppo. Invero si consideri che il nostro sistema numerico, per la sua simmetria anche verbale, se si eccettui il periodo che va da 10 a 100; non è che una ripetizione delle prime nove cifre come unità di ordine successivo. Il fanciullo il quale sa dire che due più due fan quattro, può anche dire che due-cento più due-cento fan quattro-cento, che due-mila più due-mila fan quattro-mila. E potrebbe anche soggiungere che due-milioni più due-milioni fanno quattro-milioni, se questo calcolo non si reputasse eccessivo per l' intuizione di lui.

Una razionale connessione della materia insegnata nelle prime due classi, porterà a ottenere, con opportuni mezzi d' intuizione, che i fanciulli, alla fine del secondo anno, abbiano acquistato sicurezza spedita nelle operazioni racchiuse nel periodo dall' 1 al 100 e conoscenza completa della tavola pitagorica.

Fare apprendere questa tavola ai fanciulli come arido, meccanico esercizio di memoria è metodo arcaico, che li sottopone ad una vera tortura intellettuale.

Il maestro faccia contare per due, per tre, faccia calcolare dei prodotti come altrettante somme, agli esercizi di moltiplicazione faccia seguire quelli inversi di divisione, e via; così otterrà in breve tempo con opportune applicazioni, oltre alla conoscenza chiara della cosa, anche la speditezza che si conseguiva una volta, coll' apprendere a memoria le tavole per la moltiplicazione e la divisione. Per aver meglio presente l' idea della cosa sarebbe opportuno sostituire, nelle prime classi almeno,

la dizione *due volte tre*, a quella curiosa *due via tre*, o a quell' altra, non chiara per i fanciulli, *due per tre.*

Il concetto intuitivo della frazione, che si dà in seconda (la metà, il quarto, l' ottavo, il terzo, il sesto, la metà della metà, la metà del quarto, ecc.) dividendo un foglio di carta in tante parti eguali o presentando un oggetto, per esempio un' arancia, diviso in 2, 4, 8, 3 e 6 parti, è cognizione puramente empirica. Neppure l' insegnamento della scrittura delle frazioni ordinarie, della loro riduzione in decimali, come si prescrive nel programma di terza e quarta, e gli elementi del calcolo delle frazioni, che si dànno in quinta e sesta, debbono uscire fuori del limite imposto dall' indole della scuola elementare popolare. Il numeratore della frazione dev' essere un numero concreto, che prende il nome dal denominatore. Le operazioni, in cui la frazione è considerata come quoziente astratto, non sono materia per le scuole elementari. Sa per altro il maestro che l' uso delle frazioni ordinarie dopo l' introduzione del sistema metrico, si è di molto limitato.

Non all' improvviso, nella terza classe, il maestro deve trattare delle misure metriche più comuni; ma dovranno nella seconda già essere state mostrate agli alunni le misure, comprese nel limite del periodo numerico ad essi già famigliare; ed essi verranno abituati a misurare a occhio, con la maggiore approssimazione, lunghezze, capacità e pesi di uso comune nella vita pratica.

Nè è mai troppo presto far vedere ai fanciulli e abituarli a distinguere e ad usare pesi, misure e monete. Sin dalla seconda classe si dia loro la nozione pratica di metro, litro, chilogrammo, grammo, centimetro, lira, soldo, centesimo, le quali misure debbono quasi tutte già essere parte immancabile, per un' antica disposizione, della suppellettile scolastica.

Alla fine del terzo anno l' alunno deve essere capace di eseguire rapidamente le operazioni fondamentali dell' aritmetica. L' esercizio di numerazione non ha ormai più alcun limite; tuttavia il maestro abbia generalmente cura che i numeri dati negli esercizî ed anche nei problemi rispondano, per quanto è possibile, al vero della vita: così per esempio l' indicazione d' un prezzo lontano dal reale ingenera un' informazione errata: e questo è un male. Per i calcoli su grandi numeri il maestro può servirsi, per esempio, dei dati statistici della popolazione dei vari stati; così otterrà doppio vantaggio. Qualunque insegnamento deve essere insomma nutrito di verità: l' ipotesi astratta è forma da usarsi nello studio superiore della matematica, e non nella scuola popolare.

Non bisogna mai perdere di vista il fine che l' insegnamento della aritmetica ha in questo primo grado dell' istruzione. Non sì tosto il fanciullo si sia elevato alla nozione astratta dei numeri e si muova con sufficiente libertà nei loro rapporti e nelle relative operazioni (il limite

di 9 cifre segnato agli esercizî formali è più che largo), bisogna subito ricondurlo fra le cose, in mezzo ai rapporti concreti della realtà, e fargli constatare come quello strumento universale di misura, di cui la sua mente omai dispone, possa avere infinite applicazioni pratiche. È qui che diventa massimo il valore formale dell' insegnamento aritmetico. L' abilità del maestro consisterà nel rendere queste applicazioni proporzionate, utili, e sopratutto convincenti.

Il campo più libero per queste applicazioni è quello dei problemi. Questo esercizio comincia nella seconda classe, per la quale il programma prescrive: soluzione di facili problemi pratici. Il maestro accorto fa risolvere dei problemi, senza neppure adoperarne il nome. Nel primo grado di questo esercizio è bene che la condizione sia una sola e sempre chiaramente intelligibile, e di natura pratica, desunta dalla vita reale, anzi, meglio, dalla esperienza del fanciullo. Il problema può di grado in grado divenire più complesso per numero di condizioni e di quesiti, ma questo numero dev' essere sempre tale che il fanciullo possa comprenderlo, rappresentandosi in modo vivo e concreto il caso che il problema suppone. Per aiutare questa rappresentazione, è buon metodo quello di indicare come soggetto del problema l' alunno stesso, ponendo il caso in forma d' interrogazione condizionale a lui diretta. Ciò ha un valore psicologico e corrisponde al fine pratico che questo esercizio deve avere: preparare l' alunno a risolvere i problemi che egli, e non altri, incontrerà nella vita quotidiana.

Per questo stesso motivo, non debbono mai i problemi rivestire forma enigmatica e richiedere uno sforzo mentale per essere compresi; nè poi imporre una successione complicata di operazioni troppo lunghe; il limite è anche qui segnato dai bisogni della vita reale. È buon metodo quello di far dire a voce e per iscritto le ragioni che guidano il fanciullo nel trovare la soluzione, purchè il così detto *ragionamento* non si riduca ad un formulario vacuo o, come spesso avviene, ad una tautologia. Il maestro si assicurerà sempre con opportune domande che i fanciulli abbiano ben compreso. Nè è da escludersi che egli, assegnando un problema, indichi, massime nei primi esercizî di un dato genere, la via per risolverlo. Utilissimo è poi il metodo di condurre gli alunni delle ultime classi a proporsi dei casi di calcolo sotto forma di problemi, facendo risultare questi da argomenti trattati nella scuola. Con ciò si avrà la riprova che essi hanno ben capito.

Un altro campo non piccolo di applicazioni pratiche di calcolo aritmetico che può dare anche molta materia di problemi, è quello delle misure metriche. Il maestro noti per i nessi tra le varie parti del programma, che nella terza classe cominciano contemporaneamente le operazioni coi numeri decimali e gli esercizî pratici sulle misure metriche. La conoscenza esatta dell' uso pratico di queste misure è graduata

fra la terza e la quarta classe, e impiegata poi largamente nella quinta e sesta, in relazione con l'indirizzo professionale che l'istruzione assume in queste due ultime classi. Consideri il maestro come tutta la ricchezza, qualunque prodotto del lavoro umano, sia agricolo o manifatturiero, qualunque valore, sia bene mobile o immobile, viene misurato secondo una qualche unità del sistema metrico decimale, e da ciò tragga il convincimento della capitale importanza che ha per l'attività economica del futuro lavoratore la spedita e sicura abilità nei relativi calcoli.

Nelle due ultime classi, come si è varie volte accennato, le applicazioni del calcolo aritmetico diventano ancora più speciali. Connessi con l'informazione sulla vita economica nelle varie forme, qui cominciano i computi sul denaro (interesse, sconto, aggio, senseria, ecc.), il quale è il termine medio equivalente di tutta la ricchezza; quelli relativi alle misure agrarie e di uso in commercio (ciò che richiede una certa diversità da luogo a luogo) e, in una parola, i computi commerciali. Il carattere essenzialmente pratico di questi computi d'uso indispensabile per chiunque sia chiamato a valutare utilità economiche, garantisce dal pericolo di vacue astrazioni. Raccomandabile è però che queste esercitazioni non degenerino in arido formalismo, colle solite definizioni, ma siano fatte empiricamente e sostenute dall'interesse che può destare la dimostrazione viva e tangibile di rapporti economici esattamente calcolati.

Non trascurerà certo il maestro di mettere in relazione questi insegnamenti con quelli professionali e di computisteria. La esemplificazione diventerà così più ricca di nessi, si avvicinerà di più alla realtà, e riuscirà di maggiore interesse per gli alunni.

I calcoli sulle frazioni ordinarie debbono essere, come si è già accennato, pratici. Il denominatore (?) deve essere sempre qualche cosa di concreto, un campo da sezionare, un capitale da dividere, un guadagno da distribuire, e così via.

I casi più frequenti, che hanno un interesse pratico, sono quelli di addizione e sottrazione di frazioni ordinarie. A questi casi si limiterà prudentemente il maestro.

Prima di chiudere queste istruzioni relative all'aritmetica, giova anche avvertire, che alla quarta classe si è creduto di assegnare la lettura e scrittura dei numeri romani, tenuto presente che in quello stesso anno s'insegnano aneddoti di storia romana, e che, in generale, non deve essere un mistero per gli alunni delle scuole elementari il decifrare numeri nelle lettere romane, delle qnali si fa anche oggi non poco uso.

§ 3. — *Materiale didattico. - Libri di testo.* — Per lo svolgimento del programma secondo il metodo di cui abbiamo parlato

nei due precedenti paragrafi, gli Insegnanti si valgono tutti di un materiale didattico, che, indispensabile per un giardino d'infanzia, è altresì necessario per la scuola elementare. — Onde nei giardini d'infanzia v'è larga copia di scatole coi doni fröebeliani, e di altre scatole con triangoli e con quadrati di legno, di steccoline, di palline e di tanti altri sussidi didattici, utilissimi pei varî giuochi, per quell'iniziazione alle matematiche che, se abilmente condotta, darà frutti notevolissimi per l'avvenire. All'acquisto di questo materiale didattico pei giardini d'infanzia annessi alle Scuole normali, provvedono, di comune accordo, la Maestra del giardino e il Direttore della scuola, coi fondi derivanti dalle tasse pagate dalle famiglie dei bimbi iscritti.

Per le scuole elementari, stando al Regolamento vigente, che però sarà per essere modificato certamente, in conseguenza della legge 4 giugno 1911 che già avemmo occasione di ricordare, i Comuni debbono provvedere a loro spese, oltre il locale e gli stampati, il materiale didattico (art. 112) secondo le indicazioni di un allegato speciale del regolamento stesso, dal quale rileviamo che:

Per il corso inferiore (1ª, 2ª, 3ª) è obbligatorio il materiale seguente:

Collezione dei pesi e delle misure metriche effettive di uso più comune (per le classi 2ª e 3ª).

Cubo in cartone o in legno scomponibile in otto cubi.

Per il corso superiore (4ª, 5ª, 6ª):

Collezione completa dei pesi e delle misure del sistema metrico.

Modelli in cartone o in legno del cubo (divisibile in otto cubi), del cilindro, del cono, della piramide, della sfera.

Questo è il materiale didattico d'obbligo, a cui però gli Insegnanti più volonterosi, traendo profitto dagli ammaestramenti a loro dati dai Professori delle scuole normali e dalla lettura dei pregevoli libri di metodo già citati, del Bustelli e del Ciamberlini, come dell'altro volume, pure interessante, del Frizzo: « *L'insegnamento della Matematica nelle scuole primarie e popolari* (F.lli Drucker. - Padova 1898) », aggiungono molti altri modelli, specialmente per l'insegnamento delle nozioni di geometria e per la giustificazione sperimentale delle regole relative alla misura delle principali figure piane e solide.

Quanto ai libri di testo, non se ne fa uso, naturalmente, nei Giardini d'infanzia; nella scuola elementare si suole adottare, per l'aritmetica e per la geometria, un libro di testo per ciascuna classe, scegliendo in un elenco che vien compilato, d'anno in anno, per ciascuna Provincia, da Commissioni apposite, dette appunto Commissioni provinciali, dove anche i Maestri hanno una rappresentanza. Gli elenchi dei libri di testo approvati da tali Commissioni vengono pubblicati sul Bollettino ufficiale del Ministero della P. I.; sono centinaia e centinaia di libri che compaiono in questi elenchi, ma sarebbe da dimostrarsi se, e fino a qual punto, la scelta sia stata fatta in modo da garantire che l'adozione di tali libri possa riuscire di giovamento alla Scuola; come anche è da dimostrarsi che gli Insegnanti elementari, alla loro volta, facciano la loro scelta con tutta quell'attenzione, con tutte quelle cautele che sarebbero necessarie per non porre in mano agli alunni dei libri inadatti o peggio ancora, pieni di errori, come non di rado si è dovuto constatare e lamentare.

Nel disegno di legge presentato dal Ministro della P. I. on. Daneo (11 febbraio 1910) per l'istruzione elementare e popolare, era stata proposta la costituzione di una Commissione centrale per l'esame e l'approvazione dei libri di testo per le scuole elementari. Questa funzione era stata poi deferita nel progetto Credaro agli Ispettori centrali, insieme con varie altre disposizioni riguardo ai libri di testo, che però non troviamo nel testo definitivo, ove è contenuta soltanto la disposizione dell'art. 77, che cioè sui ricorsi relativi ai libri di testo, darà parere la nuova Sezione per l'istruzione primaria e popolare istituita nella Giunta del C. S. della P. I. Probabilmente il Ministro si sarà riservato di provvedere, per regolamento, a tale materia.

I libri di testo d'aritmetica e di geometria contengono sempre delle serie di esercizi proposti, di cui si valgono gli Insegnanti, senza bisogno di ricorrere ad altre speciali raccolte, delle quali, in ogni caso, non si richiede agli alunni di fornirsi.

Capitolo III. — **Gli esami.**

Nelle scuole infantili non esistono esami di sorta.

Nelle scuole elementari, secondo le vigenti disposizioni legislative, (Art. 139 del Regolamento-legge 13 ottobre 1904) si dànno i seguenti esami:

a) di ammissione o promozione alle classi 2ª, 3ª, 5ª e 6ª;

b) di compimento del corso elementare inferiore e per l'ammissione alla 4ª classe;

c) di maturità, a norma dell' art. 8 della legge 8 luglio 1904;

d) di licenza, a norma dell'art. 10 della legge stessa.

Nessuno può essere ammesso a frequentare, neppure temporaneamente, una classe se non ha conseguito il relativo titolo d'ammissione.

Per le due prime classi elementari, la prova d'esame d'aritmetica è soltanto orale; per tutti gli altri esami, la prova è scritta e orale con le seguenti determinazioni per l'esame scritto:

per gli esami di compimento (dalla 3ª), *di maturità* (dalla 4ª) *e di ammissione o promozione alla classe quinta*, la prova scritta deve consistere nella risoluzione di un problema d'aritmetica con non più di due domande, ciascuna delle quali non richieda più di due operazioni;

per l'ammissione o promozione alla 6ª classe e per l'esame di licenza: risoluzione di un problema d'aritmetica o geometria con non più di due domande, ciascuna delle quali richieda al massimo tre operazioni.

Sempre secondo il vigente regolamento sugli esami (art 136) gli alunni delle scuole elementari sono dispensati da quelle prove degli esami di promozione (dalla 1ª alla 2ª, dalla 2ª alla 3ª, dalla 4ª alla 5ª, dalla 5ª alla 6ª) per le quali abbiano meritato nello scrutinio finale non meno di 6 punti per il profitto, purchè abbiano meritato non meno di 7 punti nella condotta.

Gli alunni non dispensati da alcune o da tutte le prove degli esami di promozione devono sostenerne gli esami nella 2ª sessione (autunnale). Per gli esami di compimento, di maturità e di licenza pei quali non è ammesso alcun esonero, nè parziale nè totale dalle prove d'esame, le sessioni d'esame sono due, la prima (estiva) nel luglio e l'altra (autunnale) nell'ottobre.

Per conseguire l'approvazione negli esami è necessario il 6 in ciascuna prova d'esame, anche quando si tratti delle due prove, scritta e orale, d'aritmetica o geometria.

Il giudizio sulle prove d'esame è dato da Commissioni giudicatrici costituite secondo precise disposizioni regolamentari (Art.

151 del Reg. 13 ottobre 1904): ne fa sempre parte il maestro della classe a cui appartengono gli alunni esaminati, e per l'esame di maturità ne fanno parte pure due professori di scuola media, uno di materie letterarie e l'altro di materie scientifiche.

Per ogni specie d'esame scritto, la scelta dei temi è fatta su una serie di essi, proposti dal maestro della classe.

PARTE II.

Le idee moderne relative all'organizzazione, al metodo, e ai programmi per le Scuole infantili ed elementari.

---

§ 1. — *Scuole infantili.* — Il Rappresentante del Ministro della P. I. al Convegno tenuto nell'aprile di quest'anno « per il Metodo negli Asili d'Italia » così si esprimeva nel suo discorso inaugurale: « Le istituzioni scolastiche nell'ultimo periodo storico del-
« l'educazione e nel breve periodo della nostra vita nazionale,
« non so bene per quali cause, sono nate e si sono costituite a
« ritroso; dall'università si discese alla scuola secondaria, alla
« elementare infine all'Asilo: in una felice ripresa, pare che oggi
« si voglia risalire dalle sottili e deboli radici su per il tronco e
« per i rami alle alte vette della cultura e della educazione; pare
« si voglia riattare e ricostruire, con più saggio consiglio, il grande
« edificio dalle fondamenta a' suoi sommi fastigi. In vero nuova
« e viva è stata ai giorni nostri l'agitazione intorno agli asili,
« e non inutile perchè tutti ormai sono persuasi che è giunto il
« momento fattivo in cui occorre convergere energie fresche ed
« abbondanti all'ordinamento ed all'assetto amministrativo del-
« l'Asilo, che occorre allettare e raccogliere intorno ad esso edu-
« catrici conscie della nobiltà della missione loro, animate da
« santo affetto per l'infanzia, forti d'una sana e soda cultura,
« ed il Ministro si accinge, effettuando uno dei suoi sogni più
« belli, a ricostituire l'asilo sulle sue basi naturali ».

Dal Ministro stesso infatti si sono avute già importanti dichiarazioni a tale riguardo; nel suo discorso, già ricordato, del 14 dicembre 1910, il Ministro ha annunziato che coll'aiuto di una Commissione competente, sta preparando uno speciale disegno di

legge nel quale sarà determinato l'ordinamento pedagogico ed amministrativo dei giardini e degli asili d'infanzia. Nell'Italia meridionale principalmente, dove se ne sente maggiore il bisogno, si fonderanno degli istituti speciali per preparare le maestre giardiniere, sull'esempio di quelli di Zurigo, di Jena, di Parigi e di altre città che grandi cure volsero all'educazione dei bambini. Il Ministro attuale condivide l'opinione ormai universale della necessità che i bambini siano educati senza che la loro mente sia compressa e la loro testa sciupata, « poichè a una testa sciu-« pata, dice il nostro Gabelli, nessuno, oltre una certa età, rimedia più ».

Nel momento in cui scriviamo questa Relazione (luglio del 1911), nulla si conosce ancora di sicuro rispetto al disegno di legge, che sarà presentato al Parlamento; ma ci auguriamo che alla ripresa dei lavori parlamentari esso sia senz'altro presentato, nel qual caso saremo in tempo a riferirne al Congresso di Cambridge.

Intanto si comprende facilmente che, mentre il Ministero sta elaborando il predetto disegno di legge, nel Paese, fra i competenti particolarmente, si discute, oltre che della parte amministrativa, del Metodo, anzi sopratutto di questo, ed è discutendosi del Metodo che si rivelano le più disparate opinioni, su cui pure brevemente ci intratterremo, attesochè l'adozione di un Metodo piuttosto che d'un altro per i Giardini e gli Asili ha certamente particolari effetti per l'iniziazione allo studio delle matematiche.

Dicemmo nella prima parte di questa Relazione (§ 1 del Cap. II), che nei Giardini d'infanzia, in quelli specialmente annessi alle Scuole normali, domina ancora il Metodo del Fröebel, e potremmo aggiungere e documentare che i resultati di questo Metodo sono eccellenti, perchè più d'una statistica sta a dirci che dei bambini iniziati con questo Metodo da Insegnanti provette prendono poi e conservano i primissimi posti nelle scuole elementari, medie e superiori. Ciononostante si spiega benissimo, anche per un certo orgoglio nazionale, la tendenza che ha incominciato a manifestarsi anche in Italia per la formazione di un nuovo Metodo di educazione infantile, schiettamente italiano.

Nel citato Convegno di quest'anno per il *Metodo* negli Asili d'Italia, si è discusso sopratutto intorno a tre Metodi: in difesa del metodo Fröebeliano, ha parlato a lungo, con grande compe-

tenza e con grande calore di fede e d'entusiasmo, la sig.na Carolina Riva di Bologna, una delle più distinte Maestre giardiniere d'Italia, [1] dimostrando che per la maggior parte i giuochi di Fröebel sono opportuni, pur di ottemperarli all'indole speciale dei nostri bambini, bastando dare ad alcuni di essi orizzonti più vasti e semplificarne altri per renderli più varî e dilettevoli; chè così inteso il sistema dà eccellenti risultati, mentre può apparire artificioso se si pretende modellare i nostri bimbi sullo stampo di quelli tedeschi. Rileva pertanto la stessa Relatrice che *un primo errore da evitarsi è quello appunto di eccedere nell'insegnamento geometrico, del quale è bene siano compresi praticamente i principî elementari, ma nulla più; è sufficiente che i bambini imparino a distinguere le forme giocando, ma l'analisi minuta di esse, gli intricati confronti sono inutili e noiosi; posto il seme in terreno adatto a suo tempo germoglierà.*

La egregia Relatrice così concludeva « il metodo fröebeliano « risponde a un ideale di bellezza e armonia variabile e noi « dobbiamo difenderlo; e quei benemeriti che con affetto sincero « e con studî geniali dedicano all'infanzia la parte migliore del « cuore e dell'intelligenza, rechino ad esso il contributo della « loro scienza pratica e pedagogica per correggerne i lievi difetti « e dargli, fin dove è possibile, una impronta nazionale,.... Intanto « però sia lunge da noi il pensiero di stabilire oggi che l'un « sistema o l'altro dei due che si schierano in campo per rag- « giungere la vittoria, e che pochissimi conoscono a fondo, si « possa sostituire al fröebeliano nella educazione dei nostri bam- « bini.,... Sarebbe una decisione assai grave che non può « emanare da questo Convegno ove siamo troppo in pochi (*oltre « 150 Maestre d'Asilo erano però presenti*) per decidere della « bontà assoluta di un metodo nuovo la cui applicazione dev'essere « il frutto di accurati studî e dell'esperienza individuale e collet- « tiva di illuminati cultori dell'educazione infantile ».

Ed il Convegno accolse il voto della Relatrice, discutendo, ma non venendo a decisioni di sorta, intorno ai due nuovi Metodi; l'uno, il metodo delle sorelle Agazzi proposto a modello per gli Asili rurali, e che si rivela d'origine fröebeliano ma ha come

---

[1] *La Voce delle Maestre d'Asilo* — Anno VII, num. 23.

caratteristica la soppressione o quasi dell'individualità, e una grande metodicità degli esercizî; e l'altro cosiddetto *scientifico, sperimentale*, dall'ideatrice dottoressa Montessori, un misto di aportiano e di fröebeliano, con reminiscenze romane, con una libertà assoluta e incondizionata concessa al bambino, con una grande artificiosità e complessità di mezzi per ottenere fini semplicissimi, e con un insegnamento precoce della lettura, scrittura e aritmetica, comprendendo lo svolgimento dei programmi attuali di 1ª e di 2ª elementare a bimbi di 4 e 5 anni.

§ 2. — *Scuole elementari* — Quanto alle scuole elementari, è così recente la legge organica del 4 giugno 1911, che non è il caso di parlare di riforme allo studio, per quanto concerne l'organizzazione di queste scuole. La legge rammentata è un notevole passo in avanti verso la statizzazione completa della scuola elementare, la quale poi viene ad assumere, in modo sempre più sensibile il carattere di scuola popolare. Del quale carattere fondamentale della scuola elementare dovranno ben tener conto coloro che si occuperanno di ulteriori modificazioni ai programmi, e sopratutto i Maestri.

Del programma d'aritmetica e di geometria delle scuole elementari è da ritenersi che quello vigente, su cui ci siamo a lungo intrattenuti nella prima parte di questa Relazione (Cap. III, § 2), corrisponda, in buona parte, alle vedute pedagogiche dei competenti, i quali pertanto si accordano nel manifestare il voto perchè, semmai vi si apportino *ulteriori semplificazioni*. Pare attestarlo anche l'esito di due *referendum* che credemmo opportuno indire fra i Maestri delle scuole elementari (¹) e fra i Professori di matematica delle Scuole Normali (²) per conoscerne le osservazioni e proposte loro intorno agli attuali programmi d'aritmetica delle scuole elementari (³).

E questo è pure il nostro parere, pur riconoscendo che l'isti-

---

(¹) *Bollettino di Matematiche e di Scienze Fisiche e Naturali* - Anno XI (1910) pag. 17 (n. 1-2).

(²) *Bollettino di Matematica* — Anno VIII (1909) n. 9-10.

(³) Particolari ringraziamenti a questo proposito rivolgiamo alle Maestre sig.ne Cacciari e Giustacchini, al Maestro Paolini, alle professoresse Bisson-Minio e Gattoni-Jannelli e ai prof.ⁱ Mercogliano e Tenca.

tuzione dell'esame di maturità e i conseguenti effetti legali di questo esame abbiano indotto il legislatore a porre nei programmi del 1905, per le prime quattro classi specialmente, delle nozioni che i programmi del 1888 e del 1894 avevano riserbato alle classi successive; noi crediamo che, poichè l'esame di maturità deve essere sopratutto un saggio della *potenzialità* dei candidati a proseguire negli studî della scuola media, si potrebbe benissimo alleggerire ancora, i programmi delle prime quattro classi, e non ne deriverebbe che un vantaggio per l'approfondimento maggiore che allora sarebbe possibile per quegli argomenti che sono i più essenziali per chi debba proseguire nella scuola media: un concetto ben chiaro dello scopo delle singole operazioni fondamentali; un'esecuzione franca, sicura, di tutte le operazioni fondamentali coi numeri interi e coi numeri decimali; un concetto chiaro delle principali forme geometriche, lineari, piane e solide; ed un'abitudine costante, a tradurre nel comune linguaggio e per iscritto, con ordine e con precisione, i ragionamenti fatti per risolvere le questioni più elementari d'aritmetica,

Il prof. MERCOGLIANO DOMENICO (*Napoli*) si limita ad esclamare: *Migliori maestri*! ed allora nella scuola elementare si educherà una mente, senza riempire — se pure — un sacco! Ed il Collega Mercogliano ha pienamente ragione; il grido che parte dalla sua anima, risponde a ciò che è nella mente e nell'animo nostro e della grande massa dei Colleghi e degli educatori, d'ogni ordine e grado. Per le scuole elementari, più che una questione di programmi abbiamo da risolvere la questione della preparazione dei Maestri ad esse prepostivi: è ciò che svolgiamo nell'altra nostra Relazione « Sulle scuole normali ».

Quanto agli esami, ci limitiamo a dar notizia di un Disegno di legge dell'attuale Ministro della P. I., e che attende ancora l'approvazione definitiva del Parlamento: esso mira ad elevare il voto richiesto dalle vigenti disposizioni per l'esonero dalle prove d'esame, che pertanto per le scuole elementari, rimarrebbero quelle stesse attuali secondo ciò che abbiamo riferito nel Cap. III di questa nostra Relazione; maggiori disposizioni contiene per le scuole medie, come in parte accenniamo nell'altra Relazione « Sulle scuole normali » (Cap. III della 1ª Parte).

ALLEGATI

al § 2 del Capitolo II della Relazione sull'istruzione primaria e popolare

---

Allegato A)

ORDINAMENTO DELLA SCUOLA ELEMENTARE, secondo la Legge 13 novembre 1859 e secondo il Regolamento Mamiani 15 settembre 1860.

Programmi annessi al Regolamento stesso — **Istruzioni** relative (in data 26 novembre 1860).

Dal Regolamento per l'istruzione elementare approvato con R. D. 15 settembre 1860. (Ministro della P. I. TERENZIO MAMIANI).

ART. 1 — Per la trattazione delle materie proprie dell'istruzione elementare, si seguiranno i programmi annessi al presente regolamento.

Dov'è il corso compiuto di 4 classi sono fissati i Programmi *A*, *B*, *C*, *D*. Dove la prima classe è divisa in due sezioni il programma *A* si compirà in due anni. Dove non è che una scuola elementare retta da un solo Maestro gli allievi saranno divisi in tre schiere e si insegneranno le materie contenute nei programmi *E* ed *F*.

Nei luoghi dove sono stabilite la prima e la seconda classe con due maestri, e vi manchi la terza, il maestro della seconda dividerà la propria classe in due schiere: all'una insegnerà le materie contenute nel prosgramma *B*; all'altra, formata di alunni che hanno già sostenuto l'esame di quella classe insegnerà la grammatica e l'aritmetica a norma del programma *F*.

Programmi annessi per l'Aritmetica.

A. *1ª Classe.* — Sezione inferiore.

Numerazione, addizione e sottrazione mentale fino a 20; conoscenza e formazione delle cifre arabiche.

— *1ª classe.* — Sezione superiore.

Esercizî di calcolo mentale nelle quattro prime operazioni; esercizî in iscritto intorno alla numerazione, addizione e sottrazione sino a 100.

B. *2ª Classe.*

Continuazione degli esercizî di calcolo mentale, numerazione, addizione, sottrazione e moltiplicazione dei numeri interi e decimali; divisione dei numeri interi nei quali il divisore non ecceda due cifre; nomenclatura delle misure effettive secondo il sistema metrico.

C. *3ª Classe.*

Ripetizione delle operazioni insegnate nella seconda classe; insegnamento compiuto della divisione dei numeri intieri e decimali; conversione delle frazioni ordinarie in decimali; nozioni geometriche necessarie per l'apprendimento del sistema metrico decimale, e breve esposizione del medesimo.

D. *4ª Classe.*

Ripetizione delle nozioni insegnate nelle classi precedenti; cenno sulle proporzioni; loro proprietà fondamentali; regola del 3 semplice; modo di tenere i libri dell'azienda domestica.

Ripetizione del sistema metrico e delle nozioni geometriche relative al medesimo; misura delle aree; disegno delle principali figure geometriche.

Per la Scuola elementare unica divisa in 3 sezioni

E. (1ª e 2ª sezione).

Numerazione, addizioni e sottrazioni orali e scritte sino a 100.

F. (3ª sezione).

Le quattro prime operazioni sui numeri interi e decimali; breve esposizione del sistema metrico decimale.

(Nessuna disposizione regolamentare circa ai *libri di testo*).

. . . .

Art. 4. — La divisione della prima classe in due sezioni non è obbligatoria salvo quando il numero degli alunni sia maggiore di 70 ovvero la scuola sia unica e ne abbia più di cento.

Art. 5. — Nessuno può essere ascritto alle scuole elementari inferiori se non ha compiuto 6 anni o se ha oltrepassato 12 anni. Nelle scuole rurali possono essere ricevuti anche allievi di più di 12 anni ma non di più di 15.

Alle scuole elementari superiori possono sempre essere ammessi fanciulli di più di 12 anni ma non di più di 16.

. . . .

Art. 40 — Oltre gli esami verbali avranno luogo in ogni classe i seguenti esami per iscritto:

Per la promozione alla sezione superiore della 1ª classe. Esercizî di addizione e di sottrazione da 1 a 20.

Per la promozione alla 2ª classe: Esercizî di addizione e di sottrazione da 1 a 100.

Per la promozione alla 3ª classe: Soluzione di uno o due problemi di aritmetica coll'uso delle operazioni insegnate nella 2ª

Per la promozione alla 4ª classe: Soluzione di uno o due problemi di aritmetica coll'uso delle operazioni insegnate nella 3ª.

Per l'esame finale: Soluzione di uno o due problemi di aritmetica e sistema metrico coll'uso delle operazioni insegnate nella 4ª classe.

Istruzioni ai maestri sul modo di svolgere i programmi approvati col R. Dec. 15 settembre 1860

(Date da Torino il 26 novembre 1860 dall'Ispettore generale Fava)

Per la 1ª classe — Sezione inferiore.

Non fa mestieri lungo discorso per additare quale sia il metodo da tenere circa le cognizioni di aritmetica che s'insegnano in questa sezione.

Il calcolo a mente dovrà farsi sui numeri concreti coll'aiuto anche del così detto *pallottoliere* o d'altro arnese meccanico. La numerazione s'insegnerà a voce dall'uno al 10, dal 10 al 20; e gli alunni saranno per gradi avvezzati a far *addizioni* e *sottrazioni* mentali col mezzo di facili quesiti acconci in qualche modo a tener desta la loro curiosità. In questa sezione parimente il maestro dovrà insegnare la lettura dei numeri almeno fino al 20 facendoli rettamente e chiaramente pronunziare.

Per la Sezione superiore della 1ª classe.

Gli esercizî di calcolo mentale verranno estesi fino al numero 100, il che non sarà difficile quando gli alunni siansi fatto un concetto chiaro del progressivo aumento delle decine dal 20 al 30, al 40 e così di seguito. Si verranno inoltre proponendo quesiti relativi a cose note e sensibili i quali si faranno dapprima risolvere sul pallottoliere, indi sulla lavagna e sui quaderni. Ottenuta la risposta, l'insegnante si studierà di mostrare quale fosse il naturale procedimento seguito dalla mente per arrivare alla soluzione del quesito, e dai procedimenti di parecchie soluzioni parziali di quesiti della stessa natura mostrerà come venga dedotta la regola generale senza però entrare in ragionamenti troppo analitici e superiori all'età della scolaresca.

Per la 2ª classe.

Si cominceranno le lezioni d'aritmetica dalla ripetizione degli esercizî di calcolo mentale e dell'*addizione* e *sottrazione* per iscritto. Questo fatto, il maestro verrà alla numerazione dei decimali, e quando gli alunni l'abbiano bene appresa, si farà a propor loro problemi di *addizione* e *sottrazione* coi numeri decimali passando poi alla *moltiplicazione* e *divisione.* Anche nella qualità dei problemi, potrà egli dar prova del suo zelo educativo, procurando che questi si aggirino non su quantità astratte o su dati immaginari, ma sovra oggetti che sono d'uso comune nella vita e tali da mettere in luce o i benefizî del lavoro o le norme di una

saggia economia o i pregi della beneficenza od altri cosifatti argomenti. Ed avvertirà che le cifre degli interi non oltrepassino il milione, e quelle dei decimali i millesimi, affine di non causar nella mente dei fanciulli confusione, la quale sarebbe generata dall' espressione di quantità onde sono incapaci di farsi preciso concetto.

Parimente la divisione si effettuerà in questa classe soltanto sovra numeri interi e con un divisore che non ecceda due cifre. Nel dare poi le definizioni e le regole delle operazioni, il maestro vorrà esser preciso e chiaro ed avverare con ripetute interrogazioni se venne ben compreso dagli scolari, affinchè questi, posti in grado di risolvere i quesiti non per semplice azione meccanica e per atto di memoria ma per riflessione, rendan ragione di ciò che fanno e sappiano applicare le regole imparate a qualsiasi specie di casi.

Nei luoghi dove l' istruzione finisce colla seconda classe, il maestro chiuderà l' insegnamento dell' aritmetica collo spiegare quelle facili e prime nozioni geometriche che sono di tutta necessità per apprendere il sistema metrico decimale, all' esposizione pratica del quale consacrerà pure un conveniente numero di lezioni. Là dove gli allievi si preparano alla promozione della terza classe, l' insegnamento del sistema metrico può restringersi alla semplice nomenclatura delle misure effettive, cioè del metro, del litro, del gramma e delle monete legali, coi loro multipli e sottomultipli.

Per la 3ª classe.

Il programma d' aritmetica prescritto per questa classe non ha bisogno di veruna dichiarazione, e soltanto basterà che il maestro si faccia una giusta idea di ciò che intendesi per nozioni geometriche preparative allo studio del sistema metrico, affine di non eccedere i limiti del suo insegnamento con pericolo di non essere inteso. Si restringerà egli pertanto a dire che cosa sia volume, superficie, linea, punto; ad indicare le principali specie di linee, di angoli e di poligoni; e a dare la nomenclatura del circolo, senza pretendere di mostrare matematicamente alcuno dei teoremi che li riguardano.

A queste nozioni il maestro aggiungerà una breve esposizione del sistema metrico, insegnando i nomi delle nuove misure, spiegando bene che cosa s' intenda per metro, come da questo derivino tutte le altre misure, e qual sia il valore di ciascheduna.

Per la 4ª classe.

Alle nozioni di aritmetica già acquistate dagli allievi nella terza classe si aggiungerà un cenno sulle proporzioni, affinchè coll' aiuto delle regole del tre essi possano sciogliere molti problemi che occorrono frequentissimi nelle contingenze della vita. La tenuta dei libri relativi alla economia può restringersi ai conti che riguardano l' entrata e l' uscita giornaliera, mensuale ed annua in una famiglia. Quest' esercizio può anche

servire ad applicare alle cose domestiche i nomi appresi negli anni precedenti.

Le figure di cui i giovanetti dovranno imparare a misurare le aree e tracciare il disegno, sono i triangoli, i quadrilateri ed il circolo. Ricordino i maestri di quarta e quelli delle classi anteriori che le materie più importanti dell'insegnamento elementare sono il catechismo e la storia sacra, la grammatica e la composizione italiana, l'aritmetica e il sistema metrico decimale. A queste pertanto volgano principalmente le loro cure, e conservino la maggior parte del tempo di cui possono disporre nella scuola. Le altre vogliono piuttosto considerarsi come argomento di utili letture e di esercizi mnemonici, e come preparazione a più gravi studi cui i giovanetti applicheranno nelle classi superiori.

(Istruzione particolare per le Scuole femminili) ....nell'aritmetica, ad esempî affatto estranei alle occupazioni femminili si preferiranno quelli che si riferiscono a casi di domestica economia, a spese, a lavori consueti ed attinenti a cose famigliari. Per ciò stesso non converrà dilungarsi molto nelle nozioni di geometria, ma star contenuti a definizioni chiare e di facile apprendimento ed alle più semplici applicazioni dei principî della scienza ad oggetti noti, e sovratutto al disegno.

Allegato B)

ISTRUZIONI E PROGRAMMI per l'insegnamento dell'Aritmetica nelle Scuole elementari, approvati con R. Decreto 10 ottobre 1867. (Ministro della P. I. Coppino).

(Abroganti i programmi del 1860 ma fermo restando ancora il Regolamento generale 15 settembre 1860).

Istruzioni

L'aritmetica nelle scuole elementari vuol essere insegnata in modo tutto pratico. Il maestro si astenga dal dare dimostrazioni, che in quella tenera età non sarebbero intese. Si limiti ad imprimer bene nella menti degli scolari le definizioni e le regole delle quattro operazioni, e a far sì che le eseguiscano speditamente e senza esitazione.

Quando il maestro propone problemi concreti, le quistioni proposte siano semplicissime, acciocchè gli scolari possano comprendere la dipendenza che vi è fra le domande del problema e le operazioni occorrenti per rispondervi. Per insegnare quel poco che le Indicazioni richiedono sulle frazioni ordinarie, il maestro cominci dallo spiegare precisamente

il significato delle frazioni $^1/_2$; $^1/_3$; $^1/_4$; $^1/_5$ ecc., e faccia costruire in seguito delle tavole di multipli di quelle frazioni.

Da queste tavole scaturirà naturalmente il concetto di frazione pura, apparente, impura o mista; quello di numero composto; e la regola per convertire la frazione impura in numero composto e reciprocamente.

Nell'insegnare la regola del 3 il maestro miri principalmente a somministrare a' suoi allievi il criterio sicuro per distinguere i casi, in cui quella regola è applicabile.

Programmi

I Anno

Esercizi di addizione e sottrazione mentale. — Lettura e scrittura delle cifre arabiche.

II Anno

Lettura e scrittura dei numeri a più cifre. — Addizione con numeri interi. — Moltiplicazione con numeri interi.

III Anno

Divisione dei numeri interi. — Le quattro prime operazioni con numeri decimali. — Definizione e disegno a mano libera delle figure geometriche più importanti. — Sistema metrico decimale. — Risoluzione di problemi semplici con numeri concreti.

IV Anno

Significato di una frazione. — Frazione pura, apparente, impura o mista. — Trasformazione di una frazione in altra equivalente. — Spezzamento di una frazione impura nelle sue parti, intera e frazionaria pura. — Riduzione d'un numero composto ad una sola frazione. — Conversione d'una frazione in numero decimale. — Regola del tre col metodo di riduzione all'unità. — Applicazioni [1].

Prove d'esami secondo il Reg. del 1860. (cioè scritte e orali per tutte le classi).

---

[1] Con Circolare Ministeriale 8 novembre 1869 venne reso obbligatorio nella 4ª classe l'insegnamento delle 4 operazioni colle frazioni ordinarie (estendendosi a queste l'esame d'ammissione alla 1ª tecnica secondo l'art. 119 del Regolamento 19 settembre 1860).

Allegato C)

ORDINAMENTO DELLA SCUOLA ELEMENTARE, secondo il Regolamento 15 febbraio 1888.

Istruzioni e Programmi del 25 settembre 1888 (Ministro della P. I. Paolo Boselli).

(Abroganti i programmi del 1867).

Regolamento unico per l' istruzione elementare approvato con R. D. 16 febbraio 1888.

(Visto il Titolo V della legge 13 novembre 1859 e le leggi **15 luglio 1877**; *7 luglio 1877; 1 marzo 1885; visti i regolamenti annessi 15 settembre 1860; 19 settembre 1877; 16 dicembre 1878 ed 11 settembre 1885).*

ART. 1. — L'istruzione elementare è di due gradi: inferiore e superiore . . . .

. . . .

ART. 12. — . . . . Il corso inferiore comprende tre classi: 1ª, 2ª, 3ª.
. . . . (Scuole uniche) (Scuole miste). . . . .

ART. 22. — Il corso elementare di grado superiore si compie in 2 anni e in due distinte classi. (L'art. 23 eccezionalmente autorizza la riunione della 4ª e 5ª).

. . . .

ART. 30. — La direzione immediata delle Scuole elementari appartiene al Municipî, i quali la esercitano a norma delle leggi e dei regolamenti e sempre subordinatamente alla vigilanza della potestà scolastica governativa.

. . . .

ART. 39. — L'insegnamento quotidiano *durerà*, compresa la ginnastica e il canto, cinque ore ma sarà diviso in due lezioni, l'una antimeridiana e l'altra pomeridiana, coll'intervallo di due ore almeno nell'inverno e con maggiore intervallo nelle altre stagioni.

. . . .

(Seguono i *Programmi* approvati con R. Decreto 25 settembre 1888,).

Programmi per la Scuola elementare approvati con R. Decreto 25 settembre 1888

(Dalle *Istruzioni generali*)

« Se il metodo deve generare un' abitudine intellettuale e un modo di pensare, nel qual caso soltanto può essere veramente proficuo, è forza che esso entri in tutto ciò che ha attinenza col mondo reale. Quindi

l'occasione deve essere offerta non solo dalla lingua......... ma dalla geografia.......... dall'***aritmetica*** *che gioverà di dedurre dai conti più semplici dell'azienda domestica*........... ".

Istruzioni speciali

Aritmetica e **geometria** — Se c'è insegnamento che richieda chiarezza e precisione è proprio questo, in quanto le cognizioni, qui più che mai, ove non siano nette e sicure, anzichè un aiuto diventano un impedimento e una causa di errore. In ogni cosa, ma in questa anche più, *meglio è senza paragone insegnare poco e bene, che molto e male.* Diligentissima cura il maestro dovrà quindi mettere nel farsi capire e nell'accertarsi di essere capito. Nell'insegnare la numerazione partirà da oggetti, e nell'insegnare le frazioni dalla partizione di cose intere fatte sotto gli occhi degli alunni. Nelle operazioni poi prenderà le mosse sempre da casi particolari, da piccoli quesiti tolti dall'azienda domestica e dalla vita, lasciando che l'idea generale si formi a poco a poco da sè nella mente degli scolari, o almeno non somministrandola loro, se non quando è già preparata nella loro testa. Così dicasi anche della geometria. Deve precedere il disegno della figura. Poi come si misuri il quadrato si vede a occhio una volta che lo si divida in parti eguali con delle linee equidistanti perpendicolari ai lati. Tirata la diagonale il quadrato resta diviso in due parti eguali donde la regola per la misurazione del triangolo. In conclusione esempi pratici che conducano direttamente al fine. *Dopo avere imparato a fare, verrà il dire come si faccia.*

Istruzioni speciali per la Scuola unica — .... L'alunno apprenda a eseguire le quattro operazioni anche colle frazioni decimali e a impratichirsi del sistema metrico, segnatamente in quanto è in pratica negli usi della vita.

Programmi pel corso elementare inferiore

Classe 1ª — Scrittura delle cifre — Numerazione — Addizione e sottrazioni mentali fino a 10, scritte fino a 100.

Classe 2ª — Le prime quattro operazioni — Esercizi di calcolo mentale sulle cifre da 1 a 9 e in iscritto fino a 1000. — Concetto intuitivo e scrittura delle frazioni ordinarie.

Classe 3ª — Eserecizî sulle prime quattro operazioni con interpretazioni di quesiti che non richiedano se non una operazione. — Le quattro operazioni con numeri decimali insegnate praticamente. — Metodo pratico per trasformare le frazioni ordinarie in decimali — Pesi e misure metriche di maggiore uso nella vita, con qualche riguardo ai pesi e alle misure che si adoperassero ancora nel comune.

Programmi pel corso superiore

Classe 4ª — Ripetizione delle quattro operazioni con numeri decimali ed esercizi con quesiti, che richiedano al più due operazioni. — Sistema

metrico decimale. — Misure metriche di lunghezza, di superficie, di volume, di capacità, di peso ed esercizî relativi.

Disegno a mano libera delle figure geometriche e definizione delle più importanti e regole pratiche di misurazione del quadrato e del rettangolo.

Classe 5ª — Spiegazione ragionata delle quattro operazioni sui numeri interi. — Concetto generale della frazione ordinaria. — Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore e delle frazioni miste in improrie. — Semplificazione delle frazioni. — Le quattro operazioni colle frazioni ordinarie. — Trasformazione di una frazione ordinaria in decimale. — Esercizi alternati sulle quattro operazioni, tanto colle frazioni ordinarie, quanto colle decimali. — Ripetizioni sul sistema metrico. — Rapporti e proporzioni. — Regola del tre semplice col metodo di riduzione all' unità. — Applicazione ai conti di interesse e di società.

Regole pratiche di misurazione del quadrilatero, del triangolo, del trapezio. — Trovare l' area di un poligono regolare. — Regola pratica per la misurazione del circolo. — Definizione della perpendicolare a un piano e di linee e piani paralleli. — Disegno a mano libera e definizione dei solidi (cubo, prisma, piramide, cilindro, cono, sfera).

Programma per la Scuola unica

Per le sezioni 1ª e 2ª come per le classi 1ª e 2ª del Corso elementare inferiore.

Per la 3ª Sezione — Facili esercizi sulle prime quattro operazioni con interi e decimali. — Nozioni pratiche sul sistema metrico, evitando di parlare dei multipli e dei summultipli, che non si usano comunemente nella vita, e possibilmente esercitando gli alunni a pesare e a misurare coll' aiuto del campionario dei pesi e delle misure. — Concetto per via di esempi della frazione ordinaria e modo di scriverla e di trasformarla in decimale.

Prove d' esami — Scritta e orale per il corso elementare inferiore e per l' esame di *proscioglimento* ecc. (dalla 3ª). « Soluzione di un problema d' aritmetica e sistema metrico (art. 95) ». Però secondo l' art. 84 del Regolamento del 1888 si sommavano i punti di tutti gli esami scritti e orali dichiarando idoneo l' alunno che conseguisse almeno $^6/_{10}$ di media, purchè avesse avuta la sufficienza nel saggio scritto d' *italiano*.

Per la licenza dalla 5ª solo l' esame orale.

(Gli esami orali — secondo l' art. 100 — versavano sopra tutte le materie del corso superiore, comprendendo anche un saggio di lettura, e duravano *al più 20 minuti* in complesso).

Allegato D)

ISTRUZIONI E PROGRAMMI per le Scuole Elementari approvati con R. Decreto 29 novembre 1894 (Ministro della P. I. Guido Baccelli).

(Abroganti i programmi del R. Dec. 25 settembre 1888).

Dalla Relazione:

Ho sfrondato il programma di aritmetica di tutte quelle parti che sembrano e sono usurpazione del compito riserbato alle scuole mezzane, e l'ho rivolta più direttamente alla pratica, cioè all'acquisto dell'abilità preziosa di applicare il calcolo, anche senza aiuto di operazioni scritte, ai casi della vita domestica e delle piccole aziende industriali e commerciali.

Istruzioni speciali:

Se nella scuola elementare tutte le cognizioni sono impartite con tale metodo, che possano produrre vantaggio pratico e immediato, l'insegnamento dell'aritmetica deve giungere al fine stesso in modo ancor più diretto e positivo.

Ogni diligenza si adoperi per ottenere che ciascun alunno divenga pronto e sicuro nel calcolo, sia a voce, sia per iscritto, e sollecitamente lo applichi ai casi vari dell'economia domestica e delle piccole aziende industriali e commerciali. Gioverà a tale oggetto valersi, anche in questa occorrenza, del metodo intuitivo, e muovere da cose concrete per insegnare la numerazione e da esempi familiari per fare intendere lo scopo e gli usi delle quattro operazioni fondamentali. Per restringere l'osservazione ad un caso particolare tornerebbe assai difficile dare un'idea generale della frazione ordinaria e di quella decimale, quando il maestro non avesse fatto precedere l'esperimento della partizione di cose intere eseguita sotto gli occhi dei fanciulli e da questi ripetuta.

I nuovi programmi esigono che in ogni classe vi sia, riguardo ai numeri, un'istruzione per sè stessa completa affinchè gli alunni, abbandonando la scuola in qualunque dei suoi stadi, portino con sè un piccolo ma non dimezzato corredo di nozioni utili.

Oltre a ciò, essi danno importanza maggiore al calcolo che suol dirsi mentale. Ed a ragione, perchè spiace vedere fanciulli che alla lavagna o sul quaderno sanno risolvere problemi ingegnosamente complicati, e poi non riescono a trarsi d'impaccio quando siano chiamati a fare un calcolo semplice dinanzi a necessità reali della vita e senza

aiuto di matita o di penna. L'abuso dei sussidi grafici fa sì che la mente ne divenga schiava e sia lenta e impedita nell'operare da sola. Non mancano all'incontro contadini ed operai illetterati, che, appunto per difetto di siffatti aiuti, hanno dovuto fare grande sforzo mentale per calcoli relativi alle loro faccende, ed hanno perciò acquistato singolare abilità a far di conto, come essi dicono con la testa. Conviene adunque che gli insegnanti procurino di contemperare in giusta misura l'esercizio del calcolo mentale con le operazioni per iscritto, ma sempre cercando applicazione ai fatti della vita.

Riprovevole è il costume di suggerire, nel calcolo mentale, espedienti e mezzi meccanici, i quali, anzichè aiutare, sopprimono la riflessione e il ragionamento. Il lavoro dell'intelletto deve essere indipendente e sicuro, vale a dire procedere secondo le ragioni della composizione e della decomposizione dei numeri.

L'essersi abolita, negli esami, la prova scritta di aritmetica non vuol significare che debbono essere trascurati i problemi da risolvere per iscritto a scuola e a casa. Ma siano quesiti semplici e sempre diretti a far prova d'ingegno e di abilità, non di sottigliezza nell'indovinare come si sciolga una questione intricata. Fu pertanto legittimamente respinto dalle scuole elementari il sistema di far servire l'aritmetica a curiosità scientifiche od a combinazioni di storia e di cronologia, avendo l'esperienza dimostrato che con siffatti indovinelli non si giova al calcolo e non si ottiene di far apprendere cose troppo lontane dall'uso pratico delle nozioni aritmetiche.

Anche per il sistema metrico decimale e per la geometria, che tanto spesso vanno associati alle operazioni sui numeri, è indispensabile l'aiuto del metodo intuitivo. Ogni scuola dovrebbe dunque avere la serie completa delle unità di misura effettive, non disegnate sui cartelloni, ma di materia e di forma quali sono prescritte dalla legge. L'osservazione dei modelli, renderebbe assai facile il conoscere e il ritenere come sono fatte e in che modo si devono adoperare. Altrettanto utile sarebbe una raccolta di solidi geometrici in legno, o in cartone, abbastanza grandi per essere bene esaminati durante la lezione, anche dagli alunni che sono più lontani dal maestro.

Non è possibile dare a fanciulli, per via di definizioni e di figure segnate sulla lavagna, una giusta idea di *linea*, *superficie*, *volume* se non si presenta loro un cubo, una sfera, un cilindro, ecc..... perchè osservino gli spigoli, le facce, la grandezza di ciascun corpo e ne traggano la conoscenza de' primi elementi di geometria. L'osservazione sarà poi rinfrancata dal disegno, e questo acuirà l'ingegno e renderà abile la mano acciò possano riprodurre con mezzi diversi le figure ed i corpi che furono attentamente esaminati. Nell'insegnamento geometrico si ha più che in altri la riprova di questa verità; alla sensazione ed alla percezione

si associa l'idea dell'oggetto; il segno rappresentativo dell'idea, cioè la parola, vien dopo per determinarla e renderla manifesta.

Aritmetica, geometria, sistema metrico debbono formare un complesso di cognizioni e di attitudini così disposte, che, oltre all'effetto di abituare a precisione assoluta di linguaggio, porgano subito alle famiglie, alle officine, ai traffici, ai campi una contribuzione indispensabile di ordine e di precisione.

(Corso inferiore)

Classe I. — Numerazione parlata e scritta sino a 100. Esercizî orali sulle quattro operazioni sino a 20.

Esame — Prova orale.

Classe II. — Numerazione parlata e scritta fino a 1000. — Esercizî orali sulle quattro operazioni fino a 100 e scritti sino al 1000, applicati alla soluzione di facili problemi. (Uno dei fattori della moltiplicazione e il divisore nella divisione debbono avere una sola cifra). Concetto intuitivo della frazione ordinaria.

Esame — Prova orale.

Classe III. — Numerazione parlata e scritta oltre il 1000. Progressivi esercizî orali sulle quattro operazioni. — Esercizî scritti sulle quattro operazioni dei numeri interi e decimali con relative applicazioni. (Il divisore non deve avere oltre le tre cifre). — Scrittura delle frazioni ordinarie, e metodo pratico per ridurle in decimali.

Conoscenza pratica dei pesi e delle misure metriche di uso più comune.

Disegno a mano libera e definizione delle linee e degli angoli.

Esame — Prova orale.

(Corso superiore)

Classe IV. — Esercizî di calcolo mentale. Ripetizione delle quattro operazioni sui numeri interi e decimali con relative applicazioni.

Misure metriche di lunghezza e di superficie.

Disegno a mano libera e definizione delle figure geometriche piane; regole pratiche per misurarle.

Esame — Prova orale.

Classe V. — Esercizî di calcolo mentale. — Rapporti e proporzioni; esempi di proporzionalità. — Regola del tre semplice col metodo della riduzione all'unità, e applicazioni diverse.

Misure metriche di volume, di capacità, di peso e di valore.

Disegno a mano libera e definizione dei solidi: cubo, prisma, cilindro, piramide, cono, sfera; regole pratiche per misurarli. — Numerazione romana.

Esame — Prova orale.

Atti della Sottocommissione Italiana della Commissione internazionale per l'insegnamento matematico

Sull'insegnamento matematico nelle Scuole Normali

RELAZIONE del prof. ALBERTO CONTI
della R. Scuola Normale Margherita di Savoia in Roma

PARTE I.

Stato attuale dell'organizzazione e dei metodi d'insegnamento della matematica, per quanto riguarda le Scuole Normali, in Italia.

CAPITOLO I. — **Organizzazione attuale con accenno all'organizzazione precedente della Scuola Normale.**

L'organizzazione delle scuole normali, in Italia, iniziatavi ai primi del secolo XIX, prima ancora che l'Italia si costituisse a Nazione (cfr *Allegato* **A**) fu sottoposta a varî mutamenti, dalla costituzione del Regno in poi, ma in gran parte, questi mutamenti non furono di natura organica, tanto vero che si provvide alla loro effettuazione con semplici Decreti reali, sulla base delle disposizioni generali della Legge Casati (13 novembre 1859) il cui titolo V, art. 357 e seguenti (*Allegato* **B**) aveva provveduto alla istituzione di scuole normali, maschili e femminili, di 3 anni ciascuna, con le materie d'insegnamento dalla legge stessa indicate, e con una condizione restrittiva (art. 364) circa all'età minima (16 anni pei maschi, 15 per le femmine) degli aspiranti al 1° corso delle scuole normali. Una disposizione della legge Casati (art. 359) sanciva inoltre che l'insegnamento nelle scuole normali venisse ripartito in modo che dopo due anni di corso, gli allievi potessero essere abilitati all'esame pel conseguimento di un diploma d'insegnamento (detto *patente inferiore*) col quale avevano facoltà d'insegnare nel corso inferiore delle scuole elementari, e dopo tre anni, all'esame per

la cosidetta *patente superiore*, che abilitava ad insegnare nel corso superiore delle scuole elementari.

I Regolamenti, che vennero succedendosi dal 1859 fino al 1896 (Reg. Mamiani 24 giugno 1860; Reg. Baccelli 21 giugno 1883; Reg. Boselli 14 settembre 1889) ebbero l'intento di provvedere a migliorare sempre più la preparazione dei maestri e a favorire la frequenza delle scuole normali, come anche il conseguimento dell'una o dell'altra patente, da parte pure dei cosidetti *privatisti*, provenienti cioè da scuola privata o paterna.

Fino a che, con una nuova legge organica (del 12 luglio 1896, Ministro della P. I. l'on. Gianturco) fu dato alle scuole normali un ordinamento fondamentalmente diverso, e con l'intento manifesto di elevare notevolmente la cultura degli educatori del popolo. Secondo tale ordinamento, che tuttora vige, e a cui, pei particolari, provvide anche il Regolamento Codronchi in data 3 dicembre 1896, il corso degli studî dura tre anni, tanto nelle scuole normali maschili quanto nelle scuole normali femminili, ma gli studi non sono ordinati in modo da abilitare al conseguimento successivo di due patenti, una inferiore e una superiore, come era stato disposto dalla Legge Casati e confermato dai regolamenti precedentemente rammentati: vi è cioè *un solo titolo d'idoneità all'insegnamento* ed è *la licenza dal terzo corso normale*, conseguita colle norme del regolamento speciale per gli esami, successivamente promulgato, con forza di Legge, il 13 ottobre 1904, e lievemente modificato, finora, dalla Legge Rava del giugno 1907.

A ciascuna delle scuole normali femminili sono uniti una scuola detta « Scuola complementare », un « giardino d'infanzia » e l'intero corso elementare per le esercitazioni di tirocinio; a ciascuna delle scuole normali maschili è unito un corso completo elementare.

Alla prima classe della scuola normale (maschile o femminile) sono ammessi senz'altro, e senza uno speciale limite d'età, contrariamente a quanto era stato disposto dalla Legge Casati, coloro che siano forniti della licenza della scuola tecnica; il certificato di promozione alla 4ª ginnasiale, non dà, esso solo, diritto d'ammissione alla 1ª normale, occorrendo superare anche un esame d'integrazione. La licenza dalla scuola complementare femminile è titolo d'ammissione alla 1ª normale. L'età media delle alunne della 1ª normale femminile è dai 13 ai 15 anni; e un po' superiore per gli alunni della 1ª maschile.

Le scuole normali in Italia sono poco più di cento: 32 maschili e 82 femminili. Le scuole maschili sono collocate quasi tutte in luoghi piccoli, mentre ne sono prive la capitale stessa, e altre città importanti, come Genova, Venezia, Bologna, Torino. Una legge recente, del 1909, ha ammesso che quando siano soddisfatte certe condizioni, possano essere aperte ad ambo i sessi le scuole normali già esistenti, e, per effetto di questa legge, già varie scuole normali furono dichiarate promiscue, donde non derivò alcun inconveniente, mentre ne venne, come effetto certamente giovevole, la possibilità a varî giovani di conseguire, essi pure, il diploma di maestro, frequentando le scuole normali femminili del luogo di loro abituale domicilio, e similmente per le signorine domiciliate in luoghi, ove esisteva la sola scuola normale maschile.

Il personale insegnante è interamente maschile per le scuole normali maschili, ed è promiscuo per le scuole complementari femminili e per le scuole normali femminili.

Per la matematica è da notarsi in modo speciale, che, secondo le disposizioni della ricordata legge 12 luglio 1896, non modificate dalla Legge 8 aprile 1906 n. 142, nella scuola normale maschile, la Cattedra di matematica è riunita con quella di scienze fisiche e naturali, diguisachè un solo professore insegna in tutti e tre i corsi della scuola normale maschile, la matematica e le scienze fisiche e naturali secondo il programma medesimo prescritto, per queste discipline, per la scuola femminile. Nella scuola normale femminile sono invece separate le cattedre predette, e il titolare della Cattedra di matematica è tenuto, per legge, a insegnare questa materia oltre che nelle classi normali, in tutte e tre le classi della scuola complementare [1].

Capitolo II — **Scopo dell'insegnamento della matematica, e parti di essa insegnate nelle scuole normali.**

§ 1. — *Uno sguardo ai programmi governativi succedutisi anteriormente a quelli vigenti.* — Ci è parso interessante, per lo

---

[1] Lo stesso professore è incaricato di tenere 40 Conferenze annue nelle Scuole Normali, che siano sedi del cosidetto « Corso froebeliano » per le Maestre aspiranti al diploma di « Maestra giardiniera ».

scopo di questa relazione, rintracciare ed esaminare tutti i programmi ufficiali successivamente promulgati per le scuole normali, a decorrere dai primordi del nuovo Regno.

Tutti questi diversi programmi hanno risentito, pregiudizialmente, dell'ordinamento che gli studî dovevano avere nelle scuole normali in base alla legge Casati, e su cui abbiamo riferito nel capitolo precedente. Gli anni di studio dovevano esser tre, ma già alla fine del 2° anno la scuola normale doveva poter concedere una prima abilitazione (patente inferiore); e così tutti i compilatori dei programmi succedutisi dal 1858 al 1897, si studiarono di fare in maniera che alla fine del secondo anno, ossia in due anni soltanto, venisse svolto tutto ciò che vi fosse di più essenziale per la cultura matematica di un maestro elementare. Ciò giustifica come in tutti i programmi in questione, si sia avuta specialmente cura di far terminare nel 2° anno lo studio teoretico della geometria, oppure di ridurre al minimo la parte di questo studio riservata al 3° corso. È da tenersi presente anche che, fino al 1890, rimase un limite d'età minimo (di 16 anni pei maschi, di 15 per le femmine) per l'ammissione alla 1ª normale; il quale limite d'età, portando nella scuola normale dei giovani e delle giovanette veramente maturi, giustifica come nonostante che per l'ammissione alla scuola normale si dovesse superare un esame elementarissimo, sul semplice programma delle scuole elementari, il legislatore stabilì che senz'altro al 1° corso normale si iniziasse e si svolgesse lo studio della matematica, in forma rigorosamente razionale. Così avemmo il programma Cadorna, approvato con R. D. 21 novembre 1858 (*Allegato* **C**) che fu in vigore fino al 1861 e lievemente modificato, all'intento di conseguire una certa semplificazione, dal programma De Sanctis del 9 novembre 1861 (*Allegato* **D**).

Il programma Cadorna fu un programma molto analitico, evidentemente compilato da persona assai competente, e particolarmente interessante per le istruzioni da cui fu accompagnato, le quali però non appaiono sempre in stretto accordo col programma; anzi nelle istruzioni stesse non mancano passi in contraddizione quasi fra loro: ciò che accade di frequente pei regolamenti e programmi alla cui compilazione non attende mai una persona sola, onde avviene che all'ultimo momento, vi si apportano dei mutamenti parziali da persone diverse da quella o da quelle che concordarono già un testo completo, armonico in tutte

le sue parti. Così in queste istruzioni leggiamo, per la Geometria, che « questo insegnamento non è diretto alla speculazione mate- « matica, ma a dare quelle nozioni geometriche, che bastano a « risolvere i problemi più usuali e possono divenire popolari »; e più sotto vi leggiamo: « Insista — il professore — sulle pro- « prietà delle proporzioni necessarie alla intelligenza della teoria « delle linee proporzionali e dei poligoni simili, chè nessun mo- « dello più perfetto d'ordine logico e di raziocinio serrato potrà « dare ai suoi alunni ». Donde l'obbligo di trattare la teoria delle proporzioni fra grandezze, ossia uno degli argomenti meno elementari certamente e meno pratici, e che non pare destinato, nemmeno ora, a divenire molto popolare!.....

Il programma Cadorna stabiliva una distinzione tra le scuole maschili e le scuole femminili, assegnando a queste uno studio molto più limitato, specialmente di geometria.

Il programma De Sanctis, del 1861, apportò qualche semplificazione ai programmi del 1858; ma lo stesso Ministro, a distanza di pochi anni, emanò nuovi programmi, che portano la data del 10 ottobre 1867 (*Allegato* **E**), redatti in una forma molto più sintetica dei precedenti, e, nel fatto, assai più semplici pel contenuto e per le istruzioni date sul metodo da seguirsi per svolgerli, I compilatori dei programmi precedenti avevano creduto di potersi elevare molto di più, in considerazione, forse, dell'età degli alunni, ma non avevano tenuto conto del fatto che questi alunni erano, in massima parte, degli sperduti, degli spostati, i quali terminata a 10 o 12 anni la scuola elementare, avevano passato quattro o cinque anni in un corso di studî, classico o tecnico, che poi avevano abbandonato per la cattiva prova fattavi, quando non si fosse trattato di disgrazie domestiche o d'altre circostanze speciali che avessero troncato questi studî o che avessero impedito a questi giovani d'attendere a qualsivoglia studio dalla scuola elementare in poi: d'altra parte l'esame d'ammissione alla Scuola Normale era ben semplice, come abbiamo veduto; un esame da 4ª elementare, e il bisogno dei Maestri era sentito vivissimo nei primi tempi della vita nazionale, sicchè una volta trovati dei giovani di buona volontà disposti alla carriera magistrale, bisognava far di tutto per farne dei Maestri!...

Secondo questi programmi del 1867, che furono in vigore per più d'un decennio, era richiesta per l'aritmetica una esposizione

ragionata, mentre per la geometria era detto espressamente di non pretendere che il metodo adoperato per impartire tali nozioni (di geometria) avesse rigore scientifico; e a tale proposito si veniva illustrando un metodo, detto dai programmi stessi *grafico-intuitivo*, per consigliare agli insegnanti di valersene largamente per le loro lezioni di geometria piana. Per la geometria solida i programmi non comprendevano alcun sviluppo teorico. Nel 1º anno ponevano solo lo studio dell'aritmetica e nel 2º soltanto quello della geometria con alcune nozioni di contabilità: al 3º corso erano riserbate delle parti complementari dell'aritmetica razionale e degli esercizî di geometria: l'orario annesso a tali programmi era di 10 ore settimanali (3 pel 1º corso, 5 pel 2º e 2 pel 3º).

Lo stesso Ministro De Sanctis promulgava nuovi programmi nel 1880 (*Allegato* **F**), nei quali, per la prima volta, si trova nominata una scuola di preparazione (detta allora di preparamento) alla Scuola Normale femminile, una scuola affidata ad un personale insegnante femminile con l'incarico « di ripetere l'insegna- « mento dato nella scuola elementare, di riprenderlo a parte a « parte... d'ingegnarsi con metodi intuitivi per fare entrare nella « mente delle alunne idee chiare ed esatte e di correggere i di- « fetti dell'istruzione precedente... ». Questi programmi tracciano appena delle linee generali, confidando il legislatore nella libertà e nella iniziativa dei professori, ai quali soltanto raccomanda di entrare in classe « ben preparati, con un disegno già stabilito nella « mente, affinchè l'attenzione degli alunni sia fermata da una « lezione interessante, la quale sia nel medesimo tempo un ritorno « su quello che si è veduto ed un passo in avanti su quello che « resta a vedere ». Anche in questi programmi si ha, a grandi linee, l'aritmetica nel 1º corso, compresovi pure lo studio delle progressioni e dei logaritmi che non figurava nei programmi predenti, e la geometria nel 2º corso, senza istruzioni nè raccomandazioni di sorta, questa volta, sul metodo a cui attenersi.

Ma questi programmi del 1880 non hanno la fortuna d'una stabilità pari a quella goduta dai programmi del 1867; si entra adesso in un periodo riformatorio ad oltranza: in poco più di un decennio si succedono ben cinque nuovi Decreti reali di programmi per le scuole normali, i programmi Baccelli del 1º novembre 1883, quelli Boselli del 17 settembre 1890 e subito dopo i programmi Villari del 29 ottobre 1891 e poi quelli Martini

del 18 settembre 1892 e infine quelli Baccelli del 1895 (*Allegati* **G, H, I, K, L**).

I programmi Baccelli del 1883 traggono origine dall'istituzione di scuole normali inferiori, di due anni soltanto, distinte dalle altre di tre anni, che presero il nome di scuole normali superiori, abilitanti all'insegnamento nel corso inferiore elementare le une, e nel corso superiore le altre. Ma intanto questi programmi rimaneggiano pure la materia della scuola preparatoria alla normale e pongono senz'altro l'*aritmetica razionale* al *primo corso* di questa scuola preparatoria, mentre poi, per citare un punto tipico d'incongruenza, ritardano fino alla 1ª normale il Calcolo sui cosidetti numeri complessi (cfr. *Allegato* **G**),

Nel 1890 il Ministro Boselli porta a tre il numero delle classi della scuola preparatoria, toglie ogni limite d'età per l'ammissione alla scuola normale, ed emana nuovi programmi ove si migliorano sì i programmi del 1883 ma si cade ancora nel difetto di anticipare troppo lo studio dell'aritmetica razionale facendolo incominciare nella 3ª classe del corso preparatorio (cfr. *Allegato* **H**). Questa probabilmente è la ragione principale per la quale, ad un anno solo di distanza abbiamo i nuovi programmi Villari per la scuola preparatoria (cfr. *Allegato* **I**) che pongono al 3° anno di questa scuola lo studio dei cosidetti numeri complessi, cioè i calcoli relativi ai sistemi metrici non decimali, togliendone qualsiasi inizio d'aritmetica razionale; e vengono poi, e questa volta per logica conseguenza, i programmi Martini del 1892 (*Allegato* **K**) per coordinare gli studî del corso normale con quelli del corso preparatorio, secondo il nuovo assetto loro dato dai programmi del 1891.

Ed abbiamo ancora un Decreto di promulgazione di nuovi programmi in data 24 novembre 1895, Ministro della P. I l'onorevole Baccelli, ma, ad onor del vero, dichiariamo subito che non furono introdotte in questi nuovi programmi (cfr. *Allegato* **L**) delle variazioni sensibili, nè circa la distribuzione della materia nelle classi, nè circa l'estensione di essa per ciascun anno di studio; vi furono dati invece nelle istruzioni « alcuni schiarimenti « sul modo d'interpretare i programmi insieme con poche avver- « tenze da osservare affinchè l'insegnamento anzichè perdersi « in varî sforzi per arrivare troppo in alto, sia di continuo rivolto « alle necessità della vita e da questo tragga spesso i mezzi per « le dimostrazioni stesse ».

§ 2. — *I programmi di matematica vigenti per le Scuole Normali e per la Scuola Complementare.* — Con la legge Gianturco del 12 luglio 1896, si aprì un'êra nuova per le scuole normali; che un riordinamento organico di queste fosse ormai maturo, e che fossero per derivarne vantaggi evidenti sopratutto per la possibilità che ne sarebbe venuta di distribuire molto meglio la materia, può desumersi dalla stessa Relazione con cui il Ministro Baccelli accompagnava i suoi programmi del 24 novembre 1895, a pochi mesi dunque di distanza dalla Legge Gianturco e vi si legge infatti: « la legge del 13 novembre 1859 stabilisce che i « primi due anni del corso debbano bastare tanto a chi vuol con« seguire la patente elementare di grado inferiore (giudicata da « tutti poco decorosa ai maestri che possiedono quel solo titolo e « scarsa guarentigia di lavoro educativo alla scuola) quanto agli « alunni che intendono compiere tutto il corso degli studi. Onde « inevitabile mancanza di proporzione nei programmi speciali di « ciascuna classe, conseguenza diretta dell' obbligo fatto dal legi« slatore di condensare nelle prime due la quantità massima di « ammaestramenti utili a chi intende esercitare l'ufficio di educa« tore, e di sospingere professori ed allievi ad una preparazione « affrettata ».

Venne dunque provvida la legge del '96 e cadde così quella pregiudiziale a cui come dicemmo avevano dovuto sottostare tutti i precedenti programmi; di più con questa legge, il corso preparatorio unito alla scuola normale femminile, dallo stato « d'ingegnoso espediente » in cui si era trovato fin dalle sue origini « per colmare senza notevole aggravio della finanza una grande lacuna », assunse una determinata personalità giuridica, che permise per varie materie, e fra le altre per la matematica, di creare una Cattedra per l'insegnamento di questa disciplina, da parte d'uno stesso docente, in tutte le classi della scuola complementare e della scuola normale.

Più facile allora si presentò il compito dell' estensore dei programmi, e questi vennero emanati con R. D 19 ottobre 1897 sotto il Ministro della P. I. on Codronchi, ma sia stato per la fretta o per altro motivo, certo è che subito non apparve molto felice il testo di questi programmi e che l'esperienza sopratutto ne rilevò varî difetti che non mancarono di segnalare i Professori nelle loro relazioni annuali, in pubblicazioni apposite, e in riunioni

importanti come nei Congressi promossi dall'Associazione *Mathesis* [cfr. Atti del Congresso di Livorno del 1901 e Atti del Congresso di Padova del 1909]: ciononostante questi programmi del 1897 non furono più mutati e tuttora vigono, e tuttora se ne sente tutto il disagio.

Riproduciamo adesso il testo preciso del programma in questione, e analizziamolo rapidamente:

Programma vigente di matematica per la Scuola Complementare femminile e per la Scuola Normale (maschile e femminile).

Approvato con R. Dec. 19 ottobre 1897
(Ministro della P. I. Codronchi).

Per la Scuola Complementare femminile.

Istruzioni — S'insegnerà l'aritmetica associando il metodo induttivo col deduttivo, servendosi di quello in aiuto di questo.

Le alunne acquistino idee nette, precise, e la conoscenza piena e sicura della natura e dell'uso delle operazioni aritmetiche; si addestrino al calcolo mentale e alle risoluzioni di problemi svariati, scelti tra quelli che non richiedono troppo lunghe operazioni di calcolo, e che hanno attinenza con le necessità della vita.

Nell'insegnamento delle nozioni pratiche di geometria, il professore, farà uso del compasso, del rapportatore e del metro, per dimostrare sperimentalmente la proprietà delle figure piane; di lavori di cartone, di legno o di filo di ferro, per meglio far conoscere le figure di solidi disegnate sulla lavagna. È inutile raccomandare che la *Geometria* sia accompagnata continuamente dal disegno geometrico; si raccomanda bensì che i professori di queste due discipline seguano lo stesso metodo e diano le stesse definizioni. L'insegnamento delle nozioni di computisteria, impartito praticamente, deve mettere le alunne in grado di tenere con ordine i conti di una modesta azienda domestica.

Classe I. (ore 3 settimanali)

Aritmetica — Quantità, numeri — Le quattro operazioni sui numeri interi — Potenza di un numero. — Caratteri di divisibilità dei numeri. — Numeri primi. — Scomposizione di un numero in fattori primi e ricerca di tutti i divisori di un numero. — Ricerca del M. C. D. e del M. C. M. comune a più numeri, mediante la scomposizione dei numeri

in fattori primi. — Frazione ordinaria e sue proprietà. — Riduzione delle frazioni ai minimi termini ed allo stesso denominatore. — Le quattro operazioni fondamentali sulle frazioni. — Potenza di una frazione.

Geometria — (Nozioni pratiche) — Regola per la misura dei segmenti e degli angoli. — Rette perpendicolari. — Rette parallele. — Triangoli. — Relazioni tra i lati, gli angoli, i lati e gli angoli di un triangolo. — Angoli interni ed esterni di un poligono.

Classe II. (ore 3 settimanali)

Aritmetica. — Numeri decimali. — Moltiplicazione e divisione di un numero decimale per una potenza del 10. — Le prime quattro operazioni sui numeri decimali. — Riduzione di una frazione ordinaria in decimale, e viceversa. — Sistema metrico decimale. — Regola pratica per l'estrazione della radice quadrata e cubica da un numero intero o decimale.

Computisteria — Fattura — Ricevuta — Quietanza — Cambiale — Vaglia cambiario e postale. — Banche e casse di risparmio. — Sistema monetario dello Stato.

Geometria — Nozioni sull'equivalenza ed eguaglianza delle figure piane. — Regole pratiche per la misura del triangolo, quadrilatero, poligono e del cerchio.

Classe III. (ore 4 settimanali)

Aritmetica — Numeri complessi — Riduzione dei numeri complessi in frazioni ordinarie e decimali applicata alle misure non decimali ancora in uso. — Rapporti e proporzioni con numeri interi. — Proporzionalità diretta e inversa. — Regola del tre semplice e composta col metodo delle proporzioni e con quello della riduzione all'unità. — Divisione di un numero in parti proporzionali a numeri dati.

Computisteria — Interesse semplice. — Rendita dello Stato. — Azioni ed obbligazioni. — Sconto commerciale. — Libri per i conti nell'azienda domestica.

Geometria — Definizioni, sviluppi e costruzioni dei poliedri. — Regole pratiche per la misura della superficie e del volume del prisma, della piramide, del cilindro, del cono e della sfera.

Per la Scuola Normale (maschile e femminile)

Il professore insegni, con metodo che abbia rigore scientifico, quella parte dell'aritmetica razionale, che riguarda il numero intero e frazionario. Si proponga di porgere agli alunni chiara ed ordinata istruzione. di svolgere e disciplinare le loro facoltà mentali, di abituarli all'esattezza del linguaggio aritmetico e dell'uso dei segni, al rigore del ragionamento, di addestrarli a risolvere problemi, il soggetto dei quali sarà

tolto dalla vita pratica, dalla fisica, dalla geografia e da altre discipline che si studiano nella scuola. Nell'insegnamento degli elementi di calcolo algebrico, badi di non oltrepassare la capacità degli allievi e il fine proprio della Scuola Normale. Li esponga brevemente, con metodo induttivo e procuri di mettere in grado il futuro maestro di analizzare e risolvere con facilità, rapidità e sicurezza svariate questioni di aritmetica.

Insegni la geometria col metodo induttivo nella seconda e nella terza classe; col deduttivo nella prima. Le nozioni sull'eguaglianza, equivalenza e somiglianza delle figure solide, sieno poche, semplici, rigorose. Non dimentichi mai che egli insegna a chi dovrà poi insegnare nella scuola elementare. Esponga di mano in mano che gli capita l'opportunità, i metodi, i mezzi, gli espedienti, che il buon maestro elementare mette in pratica per rendere efficace l'insegnamento dell'aritmetica e delle nozioni di geometria. Alla fine dell'anno, riassuma in apposite lezioni le norme didattiche, che avrà date.

Le poche nozioni di computisteria richiedono un'esposizione del tutto pratica.

Classe I.

(ore 2 settimanali nella Scuola maschile)
(" 3 " " " femminile)

Elementi di calcolo algebrico — (Nozioni preliminari) — Prime quattro operazioni sulle quantità intere. — Equazioni di primo grado ad una incognita. — Estrazione della radice quadrata e cubica con una data approssimazione.

Geometria — Definizioni e prime nozioni di geometria piana — Angoli, triangoli e quadrilateri. — Poligoni regolari e irregolari. — Circolo. — Principali teoremi relativi all'eguaglianza dei poligoni. — Misura delle rette, degli angoli, dei poligoni e dei cerchi. — Equivalenza di figure piane e principali teoremi che vi si riferiscono.

Classe II. (ore 2 settimanali)

Aritmetica — Grandezza. — Numero. — Numerazione. — Analisi delle quattro operazioni. — Norme per l'insegnamento della numerazione e delle quattro operazioni nelle Scuole elementari. — Rapporti e proporzioni.

Geometria — Linee proporzionali e poligoni simili. — Norme per l'insegnamento delle nozioni di geometria piana nelle Scuole elementari.

Computisteria — Inventario. — Bilancio preventivo. — Conto consuntivo.

Classe III. (ore 2 settimanali)

Aritmetica — Grandezze direttamente ed inversamente proporzionali. — Regola del tre semplice e composta. — Soluzione dei problemi relativi

col metodo delle proporzioni e con quello della riduzione all'unità. — Norme per l'insegnamento della regola del tre semplice nelle scuole elementari.

Geometria — Rette e piani e loro rapporti di posizione nello spazio. — Angolo diedro e solido. — Poliedri. — Prisma e cilindro. — Piramide e cono. — Sfera. — Nozioni fondamentali sulla eguaglianza, equivalenza e somiglianza delle figure solide. — Norme per l'insegnamento delle nozioni di geometria solida e del sistema metrico decimale nelle Scuole elementari.

Computisteria — Giornale. — Mastro. — Conto corrente.

§ 3. — ***Osservazioni al programma vigente.*** — L'analisi che già fu fatta di questo programma in una nostra relazione presentata, nel 1901, al II Congresso, promosso dall'antica Associazione « Mathesis » (1), ed in un'altra, più recente, della professoressa Ersilia Bisson-Minio, che fu sottoposta al Congresso tenuto a Padova, nel 1909, per iniziativa della nuova « Mathesis » (2), hanno dimostrato fondamentalmente:

a) l'insufficienza dell'orario assegnato, per l'insegnamento della matematica, nel corso normale;

b) la sproporzione fra il programma della 1ª complementare e quello della 2ª;

c) l'inopportuna assegnazione alla 1ª normale degli « elementi di calcolo algebrico »;

d) la sproporzione del programma della 1ª e di quello della 2ª normale in confronto con quello della 3ª;

e) la presenza erronea nel programma della 1ª normale, di argomenti la cui trattazione logica, con metodo deduttivo, non può farsi se non sulla base di argomenti che il programma pone nella 2ª classe;

f) l'impossibilità di svolgere il programma di computisteria del corso normale;

---

(1) A. Conti: *L'insegnamento della matematica elementare nelle scuole complementari e normali. — Atti del II Congresso degli Insegnanti di matematica delle scuole secondarie.* (Livorno 1901). Tipografia di R. Giusti.

(2) E. Bisson-Minio: *Riforme e ritocchi dei programmi scolastici. — Atti del II Congresso della « Mathesis ».* Società Italiana di matematica. Padova 1909.

g) l'impossibilità di conciliare l'esigenza dello svolgimento del programma teoretico, con l'altra di attendere a speciali esercitazioni d'applicazione, ed eziandio con l'esigenza non meno essenziale di raccogliere, in una forma organica, delle norme per l'insegnamento dell'aritmetica, della geometria e del sistema metrico decimale nelle scuole elementari.

Nonostante queste insufficienze nelle quali possiamo dire che si accordi la grande maggioranza dei competenti, appare abbastanza chiaramente, dallo stesso programma e dalle istruzioni che lo accompagnano, quale debba essere, secondo il pensiero del legislatore, lo scopo dell'insegnamento della matematica nelle scuole di cui ci occupiamo: *scopo prevalentemente pratico per la scuola complementare; ed invece scopo di educazione al raziocinio e, ad un tempo, scopo professionale per la scuola normale;* difatti nelle istruzioni ricordate noi leggiamo:

Per la scuola complementare: « Le alunne acqustino idee « nette, precise, e la conoscenza piena e sicura della natura e « dell'uso delle operazioni aritmetiche, si addestrino al calcolo « mentale e alla risoluzione di problemi svariati..... »

e *per la scuola normale:* « Il professore si proponga di por- « gere agli alunni chiara e ordinata istruzione, di svolgere e « disciplinare le loro facoltà mentali, di abituarli al rigore del « ragionamento..... e più innanzi: « Non dimentichi mai che egli « insegna a chi dovrà poi insegnare nella scuola elementare ».

Questo adunque lo scopo, assai esattamente definito, ma per conseguire il quale bisognerebbe che gli insegnanti non dovessero dibattersi, nel corso normale specialmente, nelle angustie dell'orario e della durata del corso; perchè, senza pensare ad aumentare il programma, pel conseguimento dei due scopi assegnati all'insegnamento della matematica, come del resto per tutte le altre discipline, occorrerebbe che il corso degli studi fosse aumentato di un anno almeno. Nei programmi vigenti il legislatore ha voluto dare anche qualche istruzione intorno al metodo: non si tratta di istruzioni così particolareggiate come quelle che accompagnarono i programmi del 58, del 61 e del 67 su cui già ci intrattenemmo (§ 1), ma non si è nemmeno dinanzi a semplici linee generali come pei programmi del 1880 sui quali pure già ci indugiammo (§ 1). Son brevi tocchi coi quali però si delineano assai nettamente, i metodi raccomandati. Per la scuola complementare si

dichiara che si « insegnerà l'aritmetica associando il metodo in-
« duttivo col deduttivo, servendosi di quello in aiuto di questo...;
« e per l'insegnamento delle *nozioni pratiche* di geometria il pro-
« fessore farà uso del compasso, del rapportatore e del metro per
« dimostrare *sperimentalmente* le proprietà delle figure piane;
« di lavori di cartone ecc. per meglio far conoscere le figure di
« solidi..... » Per la scuola normale si raccomanda « d'insegnare
« con metodo che abbia rigore scientifico quella parte dell'aritme-
« tica razionale che riguarda il numero intero e il numero fra-
« zionario »; e per la geometria si vuole che sia insegnata col
« metodo induttivo nella seconda e nella terza classe, col dedut-
« tivo nella prima »

Nel Cap. IV, precipuamente dedicato ai metodi d'insegnamento seguiti, avremo occasione di riprendere questa parte delle istruzioni officiali annesse al programma vigente, su cui pel momento non ci intratteniamo ulteriormente, per attenerci allo schema del piano generale dei lavori indicato dal Comitato Centrale della Commissione internazionale.

CAPITOLO III. — **Gli esami.**

Nella scuola complementare femminile gli esami di licenza, promozione ed ammissione (alla 2ª e alla 3ª classe) comprendono una prova scritta di matematica e una prova orale nelle forme e nei limiti indicati dall'art. 43 del Regolamento sugli esami 13 ottobre 1904. Sono però dispensate dalle prove d'esame le alunne che nello scrutinio finale meritano almeno $^6/_{10}$ nel profitto e $^7/_{10}$ nella condotta, se si tratti di promozione, e non meno di $^8/_{10}$ nel profitto e nella condotta se si tratti di licenza.

Nella scuola normale gli esami di promozione alla 2ª e alla 3ª classe e di licenza (non esistono esami d'ammissione) comprendono una prova scritta di matematica e una prova orale, nelle stesse forme suindicate. E ancora, stando al regolamento in vigore di cui però pare sia imminente una modificazione, sono dispensate dalle prove d'esame, di promozione o di licenza, gli alunni e le alunne che nello scrutinio finale abbiano meritato almeno la predetta votazione di 6 nel profitto e 7 nella condotta, per la promozione, e di 8 per la licenza.

È ammesso il compenso fra le due prove d'esame di mate-

matica ma per l'approvazione è necessaria la classificazione minima di cinque in ciascuna prova e la media non inferiore a 6 tra i due voti. Di regola si fa precedere la prova scritta, e chi consegue in questa meno di cinque punti (su 10) non è ammesso alla prova orale. Chi consegue meno di cinque punti in una delle due prove o meno di 6 nella media deve ripetere tutte e due le prove nella seguente sessione d'esami.

Per le prove scritte degli esami d'ammissione e di promozione della scuola complementare e della scuola normale, il tema assegnato viene scelto dalla sottocommissione esaminatrice (insegnante della materia, insegnante di materia affine e capo d' istituto) fra quelli proposti dal professore della materia; per la licenza dalla scuola complementare, il tema è estratto a sorte alla presenza delle esaminande, fra tre temi scelti dalla sottocomissione predetta da una serie di temi proposti dal professore della materia. Per la licenza dalla scuola normale il Ministero ha facoltà di inviare esso il tema per la prova scritta (Art. 39 del Reg. 13 ottobre 1904), ma da quando fu introdotto nuovamente l'obbligo di questa prova scritta (col Reg. citato del 1904) il Ministero non si è valso di questa facoltà per la matematica ed ha lasciato alle sottocommissioni esaminatrici di provvedere esse medesime all'assegnazione del tema [1] con le stesse modalità indicate dal Regolamento per la licenza dalla scuola complementare. Per lo svolgimento del tema scritto sono assegnati ai candidati all'esame di licenza dalla scuola normale, cinque ore e per tutti gli altri esami quattro ore.

Capitolo IV. — **I metodi d' insegnamento**

§ 1. — ***Metodi indicati dalle istruzioni governative e metodi particolari degli insegnanti.*** — Nel riferire intorno al vigente programma governativo per l' insegnamento della matematica nella

[1] Può essere interessante a questo proposito consultare « *Il Bollettino di Matematiche e di Scienze Fisiche e Naturali* da noi fondato nel 1899 a Bologna e condotto sotto la nostra direzione fino al corrente anno 1911, pubblicato ora a Lodi per cura del prof. Luigi Tenca : in questo periodico vengono pubblicati, da qualche anno, gli enunciati dei temi proposti ai candidati agli esami di licenza nelle varie scuole normali d'Italia.

scuola complementare e nella scuola normale, rilevammo anche (Cap. II § 3) come le istruzioni stesse, che accompagnano detto programma contengano pure delle indicazioni assai determinate sul metodo da seguirsi, indicazioni che quì brevemente riassumiamo: « l' aritmetica si insegnerà nella scuola complementare *associando il metodo induttivo col deduttivo*, e nella scuola normale *con metodo che abbia rigore scientifico*; e per la geometria se ne daranno *sperimentalmente* le nozioni pratiche nella scuola complementare, mentre nella scuola normale verrà insegnata col metodo deduttivo nella 1ª classe e col metodo induttivo nella 2ª e 3ª classe ».

Ora, noi francamente riteniamo che non sempre a proposito si adoperino questi vocaboli « induttivo » e « deduttivo », e che meglio si provvederebbe alle norme colle quali si suole accompagnare i programmi ufficiali, se, senza accennare nemmeno a tante distinzioni formali, si dicesse che la matematica, in ogni ordine e grado di scuole ha da essere insegnata con metodo che abbia rigore scientifico, stando beninteso, di volta in volta, in quella misura che è suggerita dal fine speciale della scuola in cui si insegna, e che è consentita dall' età media della scolaresca, dal substrato di cognizioni matematiche da essa posseduto, dall' interessamento che la scolaresca stessa manifesti per quanto si viene ad essa insegnando, e ricorrendo pure, sempre che ne appaia l'utilità, vuoi per spianare la via ai meno intelligenti, vuoi per avvicinare di più l' insegnamento alla realtà oggettiva, vuoi, nella scuola normale sopratutto, per indicare per tempo ai futuri maestri le vie da battere per penetrare più presto nelle tenere menti infantili, ricorrendo pure adunque, nella scuola complementare più di frequente ma eziandio nella scuola normale, a quelle *esperienze* mercè le quali, — sia che ci si limiti ad esse, sia che le si facciano precedere o seguire alla relativa dimostrazione logica — si possono fissare nella mente dell' allievo i principali *fatti geometrici* o *aritmetici*, la cui conoscenza e il cui ricordo sono essenziali, tanto per l'educazione del raziocinio, quanto pel fine professionale.

In questa nostra opinione si accordano i Colleghi in grande maggioranza, come ci è resultato in varie occasioni, nelle quali li interpellammo o ne discutemmo con essi; ed altrettanto abbiamo rilevato dai programmi didattici particolari favoritici, nel loro testo integrale, o in riassunto, dagli egregi Colleghi BISSON-MINIO,

Buzzi, Cimarelli, Gattoni Jannelli, Giudici, Mercogliano. Pizzarello, Rubini, Tenca, varî dei quali ci dimostrano e taluni anche esplicitamente ci dichiarano, di attenersi a criterî analoghi a quelli contenuti nel nostro programma didattico, che comparve, fin dal 1904, sul nostro *Bollettino di Matematica.* [1]

§ 2. — ***Materiale didattico. — Libri di testo.***

Materiale didattico. — Secondo l'art. 3 della Legge 12 luglio 1896, e secondo gli articoli 7 e 8 del Regolamento 3 dicembre 1896, il Ministero della Pubblica Istruzione pone, ogni anno, una somma a disposizione delle singole Scuole complementari e normali per acquisto di materiale didattico: i singoli insegnanti fanno le loro proposte d'acquisto, il Consiglio degli insegnanti stessi le discute e delibera su di esse; e così, d'anno in anno, anche per l'insegnamento della matematica viene accrescendosi o rinnovandosi il materiale didattico, il quale però, finora, è, su per giù, quello di cui sono fornite le scuole elementari, salvo nelle scuole, ove gli insegnanti stessi, con l'aiuto pure della scolaresca, come del resto è pure raccomandato dall'art. 8 del Regolamento citato, vengono formandosi un vero e proprio gabinetto di modelli, che possono riuscire d'utile ausilio, non soltanto per la presentazione delle principali forme geometriche e per la loro analisi, ma anche per la dimostrazione dei più importanti teoremi di geometria. Bisognerebbe tener conto della difficoltà incontrata dagli alunni nella intuizione delle figure spaziali, e perciò specialmente, associare al disegno delle figure relative ai teoremi meno semplici di stereometria, la presentazione di modelli corrispondenti a queste figure.

A questo proposito crediamo opportuno di segnalare un articolo del prof. Volpi « Sull'insegnamento della geometria sperimentale induttiva », comparso nel *Bollettino di Matematica* (Anno IV pag. 41 e seg.); esso potrebbe servire di base alla formazione di collezioni vere e proprie di modelli e apparecchi utilissimi per lo scopo suindicato.

Libri di testo. — Nella prima adunanza d'ogni nuovo anno scolastico, il Consiglio degli Insegnanti della Scuola complemen-

---

[1] *Il Bollettino di Matematica* — Anno III pag. 17 e seg. (Bologna 1904).

tare e della Scuola normale, a' sensi del Regolamento in vigore, discute e delibera sulle proposte che i singoli insegnanti fanno pei libri di testo da confermare o da mutare. Di regola, in obbedienza alle disposizioni d'una Circolare ministeriale già da qualche anno inviata e successivamente confermata, un libro di testo una volta adottato deve esser mantenuto per un triennio, a meno che non si tratti di classe dove incomincia lo studio della disciplina a cui si riferisce il libro di testo, nel qual caso il mutamento può esser proposto anche prima sempre però con motivazioni, su cui discute — o, per meglio dire, dovrebbe discutere — il Consiglio degli Insegnanti, e che vengono trasmesse al Ministero, che si riserva di approvare o no le nuove proposte: fino a poco tempo addietro mancava, presso il Ministero, un organo competente per decidere in merito alle proposte dei libri di testo, ma, ormai, colla creazione dell'Ispettorato centrale, di cui fa parte pure un professore di matematica e dell'Ispettorato regionale a cui appartengono più professori di matematica, universitari e di scuole medie, c'è l'organo che mancava, ed è sperabile che possa così a grado a grado venir meglio regolata questa materia dei libri di testo, che a noi pare piena d'importanza. Giacchè, a prescindere da prescrizioni più o meno regolamentari che ne facciano divieto, noi siamo contrarî al sistema di dettare, di continuo, o peggio ancora di lasciar prendere dei liberi « appunti » dagli alunni. Noi comprendiamo benissimo — anzi riteniamo essenziale — che ogni insegnante dia una impronta *personale* alle lezioni che fa e perciò siamo recisamente contrarî al criterio che il Ministero vorrebbe introdurre, dell'adozione di un unico libro per tutti i professori della stessa disciplina appartenenti a uno stesso Istituto, ma riteniamo anche essenziale che gli alunni abbiano un libro di testo ove possano ritrovare la sostanza delle spiegazioni date dal professore. Perchè o si ritiene che basti l'attenzione prestata durante la spiegazione e allora è inutile ogni libro di testo, oppure si ritiene — conformemente a ciò che insegna un' esperienza secolare — che l'attenzione alle spiegazioni degli insegnanti debba esser seguita da uno studio personale dell'allievo, e allora occorrerà porre a disposizione di quest'allievo qualche cosa che gli rammenti la sostanza delle spiegazioni avute, e lo aiuti ad assimilare questa spiegazione, e lo sproni ad andare innanzi da sè, e lo prepari a sapere

esporre, con parola propria, gli argomenti spiegatigli e a sapere applicare le teorie apprese. Ma agli appunti siamo contrarî, perchè tolgono alla lezione tutto ciò che v'è di più brillante e sopratutto perchè generalmente sono presi male, stando dietro alla parola più che all'idea. Onde, caso mai, converrebbe che l'insegnante *dettasse* esso medesimo; e ciò conveniamo che possa farsi per qualche argomento, per qualche lezione, ma non sistematicamente, non sempre, se non altro perchè non si arrive rebbe così a svolgere nemmeno una terza parte del programma. Ormai non mancano, in Italia, libri di testo por tutte le parti della matematica, improntati ai varî indirizzi principali coi quali può svolgersi l'insegnamento di queste parti; e se proprio l'insegnante non ne trovi alcuno di sua soddisfazione, lo prepari lui stesso.

Cosi Ruggero Bonghi, da Ministro della P. I., dopo che ebbe a constatare come in varî Istituti del Regno non si adottassero libri di testo, in una circolare speciale del 25 febbraio 1875 manifestò, opinioni che concordano pienamente con la nostra suesposta; vi si legge, fra l'altro, circa agli effetti che l'allievo risente per la mancanza di un libro di testo: « delle scienze non gli resta « altra impressione ed immagine che quella che conserverebbe « d'una regione alpina un viaggiatore che saltasse di cima in cima « di un monte, senza avere mai salita o discesa nessuna pendice »...

Capitolo V. — Preparazione degli Insegnanti di matematica delle Scuole Normali.

La legge organica 12 luglio 1896 più volte rammentata nel corso di qnesta Relazione, fu provvida per le scuole normali, sopratutto in quanto contenne una precisa disposizione (Art. 13) secondo la quale la nomina degli insegnanti doveva farsi solamente per via di regolare concorso. Si aggiunse poi la disposizione dell'art. 2 del Regolamento 3 dicembre 1896 riguardo alla preferenza assegnata alla laurea pei concorsi alle cattedre di matematica, e riguardo alla forma di questi concorsi, per titoli ed esame. Nello stesso anno 1896 fu indetto un concorso per titoli e per esame, per le cattedre di matematica (più d'una trentina) resesi libere per effetto della nuova legge e della separazione

avvenuta, nelle scuole normali femminili, dell'insegnamento della matematica da quello delle scienze fisiche e naturali: fu questo un concorso importantissimo, a cui parteciparono molti valorosi giovani, varî dei quali occupano ora degnamente delle cattedre universitarie, e ne derivò come una nuova vita per le scuole normali a cui, fino allora, anzichè esser di regola, era un'eccezione che vi fossero insegnanti forniti di laurea, sopratutto per l'esiguità degli stipendi che, prima del 1896, erano assegnati ai professori di queste scuole. Un altro concorso, pure per titoli ed esami, fu bandito nel 1900, e ne venne nelle scuole normali una nuova schiera di valorosi insegnanti forniti di serî studi, di soda cultura. Poi venne la legge 8 aprile 1906 n. 141, con l'obbligo della laurea per tutti gli aspiranti all'insegnamento della matematica nelle scuole normali, e con l'obbligo del concorso. Il regolamento relativo a tale legge, anche nelle modificazioni successivamente subite, conservò l'obbligo dell'esame pei concorsi generali, cosicchè allo stato presente della legislazione, chi aspiri all'insegnamento della matematica nelle scuole normali deve aver fatto un corso di studî universitarî ed aver conseguito la laurea in matematica, inoltre deve superare un Concorso. Pel Concorso, secondo una leggina recente (1911), c'è da distinguere secondo che si tratta di *concorso generale* o di un *concorso speciale* per una cattedra d'una delle sedi cosidette primarie, come Roma, Firenze e altre città di pari importanza. Il concorso generale è sempre fatto per titoli e per esame: e l'esame pei concorsi banditi dal 1906 al 1910, consistè in una prova scritta, una lezione e una discussione orale; ma secondo il nuovo regolamento 31 agosto 1911 la prova scritta non ha più luogo e la lezione è sostituita dalla « correzione di uno o più lavori scritti » a cui deve seguire immediatamente la discussione. Pel concorso speciale è in facoltà della Commissione giudicatrice, di invitare o no, dopo avere valutato i titoli, alcuni dei concorrenti a sostenere delle prove d'esame.

La Commissione giudicatrice è composta in ogni caso di tre membri almeno; la maggioranza della Commissione è nominata dal Ministro, in base alla designazione fatta annualmente dai professori ufficiali e dai liberi docenti delle Facoltà di matematica e scienze delle R. Università; un membro è un professore di scuola media di 2º grado (classica, normale o tecnica). nominato direttamente dal Ministro.

Prima di chiudere, vogliamo anche rilevare che i concorsi su rammentati, del 1896 e del 1900, furono banditi senza distinzione di sesso; mentre alla prima applicazione della Legge e del Regolamento del 1906, nel bandire, nel 1907, un concorso generale a cattedre di matematica delle scuole normali femminili, si volle restringerlo alle sole donne, e altrettanto fu fatto pel concorso generale bandito nel 1909. Fu però osservato e dimostrato, da più parti, e dalle stesse Commissioni giudicatrici, che questa restrizione non favoriva la scelta dei migliori elementi per le cattedre poste a concorso, e finalmente, nel corrente anno 1911, furono riammessi i maschi a partecipare insieme con le donne, al nuovo concorso bandito per cattedre di matematica delle scuole normali femminili; il quale dunque è il terzo dei concorsi banditi dal 1906, ed è il quinto dei concorsi generali sudetti a partire da quando fu promulgata a favore della scuola normale la legge che diè ad essa nuova vita e dignità d'istituto secondario di 2° grado, pari al Liceo e all'Istituto tecnico.

PARTE SECONDA

Le tendenze moderne.

Capitolo I. — **Le idee moderne concernenti l'organizzazione delle scuole normali.**

In varî punti della prima parte di questa Relazione, e pure nel chiuderla, abbiamo avuto occasione di manifestare il nostro compiacimento per la Legge 12 luglio 1896, e per la nuova vita e dignità che ne derivarono per le scuole normali; errerebbe pertanto chi perciò credesse, che dopo la citata legge, si sia ritenuto che non potesse darsi un ordinamento anche migliore alle scuole normali, tale da soddisfare alla necessità d'avere Maestri, sempre migliori, sia per cultura che per preparazione didattica. Noi stessi avemmo occasione di accennarvi fin dal 1901, ossia a cinque anni appena di distanza dalla Legge Gianturco, in una nostra Relazione presentata al secondo Congresso degli insegnanti secondari di matematica, promosso dall'antica Associazione *Mathesis* [1]: ivi

[1] *Atti del Congresso di Livorno* (1901) promosso dall'Associazione *Mathesis.*

dovevamo riferire sulle condizioni dell'insegnamento della matematica nelle scuole complementari e normali, ma nel trattare di questo argomento particolare, non potemmo prescindere da un esame delle condizioni organiche di queste scuole ove intanto ci apparve troppo ristretta la durata degli studî, e ci si affacciò, fin da allora, il problema generale dell'istruzione femminile, considerando che per la scuola normale femminile, la maggior difficoltà da superarsi per poter proporre una più equa distribuzione della materia e degli orarî, derivava dal fatto che questa scuola ci risultava frequentata da « un misto di allieve aventi già l'intenzione di darsi al magistero elementare, e di altre che quasi « arrossiscono a domandare loro se eserciteranno tale professione, « e che frequentano la scuola normale, solo per accrescere la « cultura acquistata nelle scuole elementari ». Dobbiamo però dichiarare che, nel 1901, avevamo ancora degli scrupoli e dei preconcetti riguardo alla coeducazione dei due sessi, scrupoli e preconcetti, allora sicuramente più diffusi che adesso, anche fra le persone colte, e che ci sono stati tolti da dieci anni di ulteriori studî e di discussioni e sopratutto dall'osservazione dei resultati dati dalla coeducazione stessa, negli istituti secondarî classici e tecnici, ove ormai in tutte le classi, maschi e femmine attendono insieme agli studi prescelti, senza che si manifestino inconvenienti di sorta, anzi apparendone dei vantaggi per un certo ingentilimento maggiore che la presenza delle femmine sembra dare all'educazione degli uomini. Nella citata Relazione propugnavamo, dimostrandone l'opportunità, il voto che l'insegnamento della computisteria fosse staccato da quello della matematica, e così l'altro che nella scuola normale maschile la cattedra di matematica fosse separata da quella di scienze fisiche e naturali. Il Congresso approvò con lievi modificazioni formali, tutte le nostre proposte [1].

Venne poi la legge Orlando 8 luglio 1904, e con essa il nuovo ordinamento dato alla Scuola elementare e popolare, su cui ci siamo intrattenuti nell'altra nostra Relazione « *Sulle scuole infantili ed elementari* »; il legislatore sentì che sopratutto con l'istituzione della VI classe elementare e con l'elevamento dato all'istruzione popolare dalla distribuzione degli insegnamenti

(1) Cfr. *Atti* citati.

fissata per la V classe e per questa VI classe di nuova istituzione, si sarebbe imposto un riordinamento della scuola normale, e così nell'art. 8 della Legge stessa fu sancito che « entro un anno » il Governo avrebbe presentato un Disegno di legge pel riordinamento delle Scuole normali.

Ai primi del 1905, noi fermammo la nostra particolare attenzione su questo impegno fatto al Governo, e credemmo opportuno di rivolgere un appello ai Colleghi di tutta Italia, affinchè rispondendo ad un questionario che sottoponevamo alle loro discussioni, ci permettessero di conoscere e di far conoscere al Governo, l'opinione prevalente fra i più competenti, riguardo alle riforme da effettuarsi nell'ordinamento delle Scuole normali. I Colleghi delle Scuole normali risposero con molto slancio, e nel 1905 stesso, nel giugno, fu pubblicato un Volume riassumente l'esito di questo *Referendum* [1]. Dal quale Volume appare che la grande maggioranza si trovò concorde nel ritenere insufficiente la durata dei tre anni del corso normale, e nell'attribuire a questa insufficienza più specialmente, i mali più gravi da cui la Scuola Normale è afflitta: sovraccarico intellettuale maggiore che in ogni altra Scuola media, simultaneità affannosa della formazione della cultura e dell'acquisto della pratica dell'insegnamento.

Le vicende parlamentari non permisero al Governo di presentare nel 1905 nè mai più, il disegno di riordinamento delle Scuole normali, nonostante il calore delle discussioni accese dal nostro *Referendum* e nonostante la eco delle discussioni stesse, largamente manifestatasi nella stampa scolastica e anche in quella politica d'ogni partito, come anche nei Congressi tenuti dalla Federazione Nazionale fra gli Insegnanti delle Scuole medie e particolarmente nel Convegno nazionale tenuto in Roma nel 1909, sotto la presidenza dell'on. Luigi Credaro, attuale Ministro della P. I., per iniziativa della Sezione romana dell'Associazione Pedagogica Nazionale. Ed il tempo trascorso acuì maggiormente i mali affliggenti la Scuola Normale, e venne rendendosi sempre più sensibile la crisi qualitativa, dei maestri elementari. Ma in-

---

[1] *Referendum fra gli Insegnanti delle Scuole Normali, per la Riforma della Scuola Normale* promosso e riassunto da A. Conti — Bologna, Tip. Cuppini 1905.

sieme con quella qualitativa, l'applicazione della legge del 1904 aveva prodotto una sensibile crisi quantitativa, cosicchè quando nel decorso anno 1910, il Governo sottopose al Parlamento un Disegno di legge organico sulla Scuola elementare, tendente ad accrescere ancora notevolmente il numero delle Scuole elementari, e conseguentemente il numero dei Maestri necessari, il Governo stesso sentì la necessità imprescindibile di provvedimenti che ovviassero alla crisi magistrale già manifestatasi. E quì purtroppo dobbiamo lamentare, che da parte del Governo si ebbe riguardo quasi esclusivamente alla crisi quantitativa, e che inoltre per riparare a questo che era un fenomeno di natura prevalentemente economica anzichè escogitare dei provvedimenti adeguati *di natura economica*, si pensò a disposizioni la cui effettuazione avrebbe potuto dare *una fabbricazione affrettata di maestri* con un inasprimento sicuro della loro crisi *qualitativa.*

Con tali intendimenti in un articolo del citato Disegno di legge (Daneo-Credaro) erano stati richiesti al Parlamento i pieni poteri per riformare la Scuola complementare e la Scuola Normale; ma un'agitazione vivissima di tutta la classe degli insegnanti delle Scuole Normali, un loro Convegno nazionale, appositamente tenuto in Roma nel maggio del 1910, l'adesione degli Insegnanti di tutti gli ordini di Scuole medie e dei Professori universitari e l'opera efficacissima degli on.i LEONARDO BIANCHI, ANDREA TORRE e IVANOE BONOMI valsero ad impedire l'approvazione della proposta predetta che il Ministro stesso trasformò in un articolo, col quale il Governo era impegnato a presentare, entro sei mesi dall'approvazione della legge, un Disegno pel riordinamento della Scuola complementare e normale. Tale infatti la proposta, che apparve nel testo definitivo della Legge 4 giugno 1911, onde, prossimamente, avremo la presentazione, da parte del Governo, di un Disegno di riordinamento della Scuola Complementare e della Scuola Normale. Le tendenze più moderne, i voti più fervidi, dei più competenti, per la riforma di queste Scuole sono sopratutto:

a) per un accrescimento della durata degli studi;

b) per una divisione del corso degli studi in due fasi, una delle quali precipuamente dedicata alla cultura, e l'altra rivolta sopratutto allo scopo professionale, all'acquisto dell'abilità didattica;

c) per un maggiore e migliore coordinamento delle varie discipline;

d) per un alleggerimento degli orarî;

e) per una riforma dei programmi, che li sfrondi del più e del vano e vi trasporti l'alito della coltura moderna di cui abbisogna il Maestro per compiere efficacemente la sua suprema missione di civiltà.

A queste tendenze, a questi voti ci auguriamo che sia improntato il Disegno di legge del Governo, intorno al quale ci riserviamo di riferire al Congresso di Cambridge per quella parte, che abbia più speciale attinenza colla nostra disciplina.

Dobbiamo pertanto dire qualche parola intorno a una Legge recentissima « *sui ginnasi magistrali* », d'iniziativa dell'attuale Ministro della P. I., ed in virtù della quale il Parlamento ha autorizzato il Governo ad annettere ad alcuni dei ginnasi isolati (quindici al più) un corso biennale, a cui saranno ammessi i licenziati dal Ginnasio, che aspirino al diploma di maestro elementare. In questo biennio saranno impartiti l'insegnamento della Pedagogia e di altre materie professionali (pel Maestro) fra cui la Matematica, con un programma e un orario che sono ancora da fissarsi [1]. La legge in discorso è stata accolta poco favorevolmente dalla maggioranza dei competenti, i quali tuttavia non le hanno fatta una forte opposizione per non negare, quasi a priori, la bontà d'un esperimento che il Ministro intende fare, allo scopo di ovviare alla crisi magistrale. È da segnalarsi quello che Gaetano Salvemini ha scritto contro questa « normalizzazione » del ginnasio [2]; noi ci associamo interamente alle considerazioni fatte dal Salvemini, e non ci indugiamo ulteriormente su questa « novità » che non esitiamo a dire « pericolosa », « vana per la crisi magistrale quantitativa » e « propizia a peggiorare piuttosto che ad attenuare la crisi qualitativa ».

---

[1] *Mentre rivedevamo, per l'ultima volta, le bozze di questa Relazione, sono usciti, sul Boll. Uff. del Ministero della P. I. del 30 novembre 1911, questi programmi pei Corsi magistrali annessi ai Ginnasi.*

[2] Cfr. *Nuovi Doveri.* Anno V, pag. 208 e seg.

CAPITOLO II. — Le idee moderne relative allo scopo, ai programmi e ai metodi dell'insegnamento della matematica nelle Scuole normali.

§ 1. — *Osservazioni e proposte individuali.* (BISSON-MINIO, CIVININI, LEVI, PADOA, TENCA) — Da quanto abbiamo esposto nel precedente Capitolo, appare evidente che ormai il problema dell'insegnamento della matematica nella Scuola normale non può separarsi dal problema più vasto della riforma completa di questa Scuola. Pel quale problema si presentano principalmente due soluzioni, come osservano i Colleghi professori CIVININI e LEVI. in una loro accurata relazione, [1] dalla quale senz'altro riproduciamo la parte ove essi discutono sulle due soluzioni del problema generale della riforma della Scuola normale.

« La prima sarebbe di ridurre l'estensione di tutti i programmi in maniera di essere certi della possibilità di svolgerli nel tempo attualmente concesso: tale soluzione è, per esempio, caldeggiata dal prof. Tenca nella *Rivista pedagogica* e si potrebbe per quanto riguarda il nostro insegnamento così riassumere: nel primo anno, al più un brevissimo corso razionale, nel secondo e terzo anno, l'insegnante di matematica tratti la parte didattica (metodi di insegnamento, libri di testo, esercizi, ecc,) e quella parte che si potrebbe chiamare pedagogico-psicologica (come si sviluppano le idee fondamentali nel bambino, come il maestro possa verificarne ed aiutarne lo sviluppo).

« La soluzione proposta dal prof. Tenca non è certamente ideale: si dibatte qui infatti la solita questione, sia pure in termini più modesti, della miglior preparazione degli insegnanti; ora noi non crediamo affatto che la miglior preparazione sia di ottenere che sappiano soltanto quanto devono insegnare (in generale il minor grado di coltura in un dato ramo, o porta l'insegnante a trascurarlo o a considerare tutto quanto egli sa come

---

[1] LUIGI CIVININI e ALBERTO LEVI — *Sulle riforme riguardanti l'insegnamento della Matematica nella Scuola normale*. (« Bollettino di Matematica ». — Anno IX, pag. 106 e seg.).

indispensabile per l'allievo). Nè crediamo molto efficace un insegnamento pedagogico non preceduto da una seria trattazione degli stessi argomenti senza preoccupazioni pedagogiche e nella efficacia, in questo senso, di quanto si potrebbe fare in un solo anno, abbiamo poca fiducia. Osserviamo poi che ai maestri ora sono affidate la quinta e la sesta elementare (scuola popolare) e si è proposto che vengano loro affidate le scuole complementari, che dovrebbero venire dalla trasformazione eventuale di parte delle attuali scuole tecniche. Ora, sia per il programma stesso che il maestro deve svolgere in queste scuole, sia per l'esatta comprensione di quelle cognizioni scientifiche ed economiche che il maestro di queste classi deve possedere, una diminuzione della estensione dei programmi della scuola normale, non è certo utile.

« Notiamo ancora che la scuola normale difetta di insegnamenti formativi quali le lingue classiche, la filosofia, ecc., nel liceo, e la matematica, le scienze naturali e le lingue moderne nell'Istituto tecnico: anche per questo verso ci appare dannoso una riduzione dell'insegnamento deduttivo della matematica, senza contare che tale riduzione, per dare un qualche vantaggio, dovrebbe essere applicata a tutte le materie.

« L'altra soluzione attualmente caldeggiata da molti è la seguente:

« La scuola normale sia prolungata almeno di un anno e divisa in due periodi: il primo di coltura generale (s'intende che anche in questo periodo nessun insegnante dovrà dimenticare sia nella scelta degli argomenti e degli esercizi, sia nel modo, che si tratta di preparare dei futuri maestri) il secondo, specialmente per le materie scientifiche, di coltura nettamente professionale.

« Questa è la soluzione che ci appare desiderabile, del problema della scuola normale. Noi non ci attentiamo da soli (nè sarebbe qui il posto) a trattare quali dovrebbero essere i programmi e gli orari di tale scuola. Ci limitiamo quindi alla questione del programma di matematica in questa futura scuola, come estensione e come metodo.

« Noi crediamo che l'estensione dei programmi debba rimanere all'incirca come ora, cioè nel primo periodo un corso di geometria razionale equivalente a quello delle altre scuole di coltura di secondo grado, un corso di aritmetica dei numeri razionali e di algebra fino alle equazioni di 1° grado.

« Come metodo nel periodo di coltura stimiamo si debba seguire metodo nettamente deduttivo.

« Intendiamoci, ciò non vuol dire che nello svolgimento del programma non possa ammettersi qualche omissione: che anzi, sia per risparmio di tempo, sia per lo stesso indirizzo che la scuola deve avere, dovrà essere lecito (e consigliato) all'insegnante, di accennare appena quelle dimostrazioni che sono analoghe ad altre già date, non sostituendo considerazioni intuitive, ma avvertendo esplicitamente gli allievi della omissione della dimostrazione.

« Ci pare inoltre, tenuto conto dello scopo della scuola, che nella scelta degli esercizî si debba dare la preferenza a quegli esercizî di geometria che appaiono applicazioni dell' aritmetica in confronto a esercizî di costruzione geometrica o di dimostrazione.

« Nel 2° periodo con orario più ridotto l'insegnamento della matematica dovrà essere diretto alla preparazione professionale, coll' esame di libri di testo, con preparazione e correzione di esercizî e problemi e infine con la parte pedagogica-psicologica (se sarà possibile ottenere che all'insegnante di matematica sia affidato il relativo tirocinio) ».

Nelle precedenti proposte non si tiene però conto, minimamente, di un periodo preparatorio, pel quale passano tutti gli allievi della Scuola normale, frequentando, anteriormente al corso normale, o la Scuola tecnica o le prime tre classi del ginnasio, se maschi, oppure, come avviene per la grande maggioranza delle femmine, la Scuola complementare femminile, un istituto di coltura, che è venuto assumendo sempre maggiore importanza, e pel quale va ora prevalendo il voto che venga istituito anche per la Scuola normale maschile e che sia destinato a fondersi in certo modo con l'attuale corso normale per costituire, insieme con esso, la Scuola normale moderna, che prendendo gli alunni dalle Scuole elementari, dia loro tutta quella cultura ed abilità didattica che si reputino necessarie per gli educatori del popolo.

Il prof. PADOA nel suo recente articolo « Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle Scuole elementari, medie, e di magistero » [1] considera in modo più com-

---

[1] *Bollettino di Matematica* — Anno IX, pag. 73 e seg.

plesso il problema dell'insegnamento della matematica nelle Scuole normali, muovendo da questo principio generale:

« L'insegnamento della matematica nella *Scuola media* (sfollata, come ho detto, mediante scuole professionali inferiori e considerata quindi esclusivamente quale anello di congiunzione fra la Scuola elementare e le Facoltà universitarie o le Scuole professionali superiori parmi debba svolgersi in *tre corsi* successivi *(preparatorio, deduttivo, complementare)*, ben collegati ma nettamente distinti: dei quali *i primi due* (triennali ciascuno) dovrebbero essere comuni a tutte le eventuali suddivisioni che si ritenessero opportune nella Scuola media per altre ragioni, mentre *il terzo* dovrebb'essere vario di contenuto e di durata, conforme alle accennate suddivisioni ».

Dal quale principio generale, dopo avere esposto le sue vedute circa i predetti tre corsi, preparatorio, deduttivo e complementare, il prof. PADOA viene ad affermare espressamente che egli crede, per quanto concerne la matematica, « che anche per i futuri maestri sia opportuno l'insegnamento ordinato nei due corsi triennali successivi, *preparatorio* e *deduttivo.*

« Quello che occorre è soltanto di istituire anche per la Scuola normale un corso (finale) *complementare* che corrisponda alla sua indole ed al suo fine, e che perciò sia, in adatte proporzioni, nè più nè meno che una *Scuola di magistero* In essa (*annuale* o *biennale*, secondo la durata complessiva degli studi, ed io preferirei biennale) l'insegnante dovrebbe prendere in esame il programma della Scuola elementare, commentare e raffrontare buoni o cattivi libri di testo, e dare tutte le norme che stimerà più opportune a rendere efficace l'insegnamento della matematica nella Scuola elementare, facendo poi che gli alunni tengano lezioni di saggio, preparino gruppi di esercizî e problemi ben graduati, riferiscano sui pregi e difetti di libri di testo non prima esaminati in iscuola, ecc.

« Occorre soggiungere che questo compito dev'essere interamente affidato all'insegnante di matematica? Pare di sì, a quanto ne dice la professoressa Bisson-Minio nella ricordata sua Relazione: [1] « È bene per tutti i conti che le norme didattiche siano

(1) *Atti del Congresso di Padova.*

date dal professore di matematica, perchè non si può indicare il metodo migliore di impartire una nozione... se non si conoscono da tutti i punti di vista le varie questioni. Ciò non si può pretendere dall'insegnante di pedagogia.. ..... » pag. 12 linea 3 dal basso — pag. 13 linea 3) ».

Noi ci associamo completamente a questa opinione del Padoa, e poichè egli ben a ragione si preoccupa della diversità dell'insegnante di matematica della Scuola media di primo grado da quello della Scuola secondaria superiore, noi ne prendiamo motivo per compiacerci del fatto che nella Scuola normale femminile l'insegnante di matematica è tenuto, per legge, a impartire lo stesso insegnamento nella Scuola complementare, e per augurarci che non soltanto questa disposizione resti immutata anche nel nuovo ordinamento che è allo studio, ma che, inoltre, per quanto è possibile essa venga estesa agli altri ordini di scuola; sarà così possibile, come intanto lo è fin d'ora nella Scuola complementare e normale femminile, svolgere un corso *preparatorio* di matematica che veramente predisponga la mente degli alunni ai *postulati* alle *definizioni* e ai *teoremi* del corso deduttivo.

§ 2. — *L'esito di un « referendum » recente*. — Un contributo notevole di idee moderne sull'insegnamento della matematica nelle scuole di cui ci occupiamo, resulta dalle risposte pervenute ad uno speciale Questionario, che noi sottoponemmo, sul finire del 1909, ai Colleghi delle scuole normali (1). Non tutti, non molti nemmeno, inviarono le loro risposte, ma si sa bene quanta e quale sia la generale apatia, e come pertanto le minoranze, colla loro intelligenza e colla loro operosità valgano ad affermarsi validamente, sì da determinare, esse, i più importanti mutamenti (2),

---

(1) *Bollettino di Matematica* — Anno VIII, n. 9-10, pag. 273 e seg.

(2) Ricordiamo pertanto con viva simpatia i nomi dei Colleghi: Buzzi Omobono, Cimarelli Tobia, Bisson-Minio Ersilia, De Crescenzo Domenico, Decio Camilla, Gattoni Jannelli Camilla, Giudici Maria Teresa, Manfredini Anaide, Marcialis Efisio, Mercogliano Domenico, Moscardelli Francesco, Patrassi Pietro, Pressi Cornelia, Quintili Pierina, Rubini Luisa, Spina Cimino Raffaele, Tenca Luigi, Vannini Tommaso, Vargas Scalettaris Raffaella (*defunta*) dai quali ci pervennero interessanti risposte.

La proposta d'aumento dell'orario settimanale di matematica da due a tre ore, in tutte le classi del corso normale, è appoggiata all'unanimità.

A proposito del disegno geometrico, il Congresso tenuto a Padova, nel 1909, dagli Insegnanti di matematica delle scuole medie, approvava la seguente proposta della egregia Relatrice signora Bisson-Minio.

Il Congresso:

ritenuto necessario che le definizioni geometriche, l'enunciazione delle proprietà delle figure e l'indicazione e la giustificazione delle costruzioni grafiche di geometria non si debbano mai trovare discordi o seguirsi con ordine illogico;

considerata d'altronde la difficoltà del coordinamento e dell'identità di criteri e di definizioni tra l'insegnante di matematica e quello di disegno, i cui programmi sono compilati indipendentemente l'uno dall'altro;

fa voti perchè *la parte* **costruttiva** *del disegno geometrico sia passata dal programma di disegno a quello di matematica*, ritardandosi perciò, per l'insegnamento del disegno, alla 2ª e 3ª complementare la parte di applicazione (ornamentale) dell'uso degli strumenti.

A quest'ordine del giorno pure si associa la grande maggioranza dei Colleghi.

Riguardo alle nozioni di Computisteria tutti i Colleghi si trovano concordi nell'approvare che siano riunite nella 3ª complementare quelle nozioni di computisteria che il programma vigente assegna alla 2ª e alla 3ª complementare; ma non altrettanto concorde è il loro parere, riguardo al corso normale, pel quale osservano i professori Vannini e Spina Cimino, a cui noi pure ci associamo, che ivi la Computisteria diviene materia professionale, in quanto che nelle scuole elementari vi è attualmente (nella V e VI) anche l'insegnamento delle nozioni di computisteria, onde è per lo meno poco naturale che si proponga di togliere questo insegnamento dal corso normale ove occorreranno invece dei richiami delle nozioni date nella 3ª complementare e delle nozioni complementari oltre che delle norme didattiche.

Riguardo alle norme didattiche raccoglie ancora molto favore la proposta approvata dal citato Congresso di Padova, che cioè:

considerata la grande importanza didattica delle norme da darsi nel corso normale per l'insegnamento della matematica nella scuola elementare;

ritenuto necessario specialmente l'accordo completo tra le norme date teoricamente e le osservazioni che devono esser fatte al tirocinante durante le sue lezioni;

alle lezioni di tirocinio di matematica debba assistere e guidare gli alunni l'insegnante di tale materia.

Alla quale proposta noi pure continuiamo ad essere favorevoli, pensando che al desiderabile accordo fra gli insegnanti circa ai precetti generali, provvederebbero a poco a poco le adunanze del Consiglio degli insegnanti, quando questo Consiglio funzionasse sul serio, non come semplice registratore di cifre, ma come ente eminentemente pedagogico nel suo complesso, e quindi il più competente, il più indicato a discutere e a deliberare sulle norme generali riflettenti il tirocinio degli allievi.

Riguardo alla prova scritta di matematica è appoggiato, ma leggermente, il voto per la precedenza della prova orale anzichè della prova scritta; al compenso fra la prova scritta e la prova orale è contraria soltanto la prof.ª BISSON-MINIO, per la quale ha poco valore la restrizione che niuna delle due classificazioni sia minore di 5, in quanto che la preoccupa il fatto, a quanto pare frequente, e che noi non esitiamo a deplorare, che le Sottocommissioni esaminatrici, anzichè accettare il voto inferiore a 5 proposto dal professore della materia, accettino quello d'ammissione all'orale, generalmente proposto dal Presidente per ragioni di *quiete*..... o di *paterna* benevolenza..

Riguardo alla correzione dei compiti a quanto pare prevale il metodo di fare una correzione individuale a tutti indistintamente i lavori eseguiti in classe, sotto la sorveglianza dell'insegnante, e di riferire, sulle risoluzioni fatte dagli alunni, per segnalare i più gravi errori e il metodo di risoluzione preferibile; mentre pei lavori eseguiti a casa si preferisce fare una correzione simultanea, chiamando un'alunna a rifare il compito alla lavagna ed invitando le altre a confrontare il proprio lavoro con

quello che si viene svolgendo alla tavola nera con l'aiuto dell'insegnante.

Ai programmi proposti dalla professoressa Bisson-Minio al Congresso di Padova ([1]), che ne rinviò lo studio alle Sezioni dell'Associazione *Mathesis* sono state mosse varie osservazioni che brevemente riassumiamo.

Un'osservazione comune a varie delle risposte pervenute al nostro *referendum* riguarda le nozioni d'algebra di cui non pare opportuno ritardare lo studio fino alla terza normale. « Certo in questa classe potrà, meglio che nella 1ª normale, essere svolta la « teoria dei numeri relativi, ma viene quasi completamente per- « duta l'utilità pratica che le equazioni portano alla risoluzione « dei problemi. L'insegnamento dell'algebra manca così al suo « vero scopo e diviene un ingombro quasi inutile. Io credo — « è la professoressa Manfredini che scrive e con la quale noi ci « troviamo su questo punto interamente d'accordo, secondo ciò « che già sostenemmo e proponemmo nel Congresso di Livorno « del 1901 — che tale insegnamento debba essere impartito al « più presto possibile. Fino dalla 3ª complementare, sia pure con « metodo essenzialmente pratico, le alunne dovrebbero essere « addestrate a stabilire e a risolvere le equazioni per la risoluzione « dei problemi ».

Un'altra osservazione d'indole generale muove ai programmi in discorso la professoressa Manfredini ed è che « non serbino « quella generalità di vedute, essenziale per essere poi interpre- « tati o svolti con diversità d'intendimenti e di criterî »; alla quale osservazione noi ci associamo solo per ciò che riguarda il programma delle nozioni d'algebra, che ci appare redatto in modo da parerne quasi imposta una trattazione secondo un criterio modernissimo, che è quello proprio a cui noi ci siamo ispirati nel redigere i nostri « Elementi di calcolo algebrico per la 1ª normale (come anche per la 3ª tecnica) » ma che pertanto attende ancora il conforto di una più lunga esperienza. Non ci pare invece fondata l'osservazione predetta, per quanto riguarda lo studio della Geometria nel corso normale, a meno che si voglia essere « separatisti » ad oltranza, come pare voglia essere il prof. Cima-

---

([1]) Cfr. *Atti relativi* oppure il *Bollettino di Matematica* — Anno 1909.

relli, al punto da non voler nominare nemmeno una figura solida fino a che non sia esaurito completamente lo studio (*puro* e *metrico*) della geometria piana; ora i programmi proposti lasciano conveniente libertà all'insegnante, d'esser cioè « fusionista » o « separatista », quando non si ecceda nel senso di questa qualifica, e perciò noi con la maggioranza dei Colleghi che hanno risposto, approviamo il programma di geometria del corso normale e con esso il criterio di libertà di scegliere fra il metodo separatista e il metodo fusionista, non vedendo d'altra parte ragione — come ci scriveva nel 1901 il prof. Levi — « per allontanare gli angoli « e le distanze nel piano degli angoli e le distanze nello spazio « e così l'eguaglianza dei poligoni dall'eguaglianza degli angoloidi e dei poliedri, allo stesso modo che è utile avvicinare le « teorie di equivalenza, di similitudine e di misura delle figure « piane e solide ».

Tacendo di altre osservazioni e proposte di minore importanza rileviamo la proposta del prof. Patrassi di aggiungere al programma d'aritmetica del corso normale le nozioni fondamentali sulle progressioni e sui logaritmi con applicazioni alle questioni d'interesse composto e di annualità, nozioni queste che già vedemmo comparire in taluni dei varî programmi succedutisi dal 1858 al 1896, e la cui importanza oggi è ancora più sentita per lo sviluppo sempre maggiore preso dalle questioni attuariali e per la necessità che ne deriva, che il maestro, destinato ad essere un faro di civiltà nei più oscuri luoghi, conosca quanto vi è di più essenziale per saper dare spiegazioni sulle più importanti forme di previdenza sociale.

Riguardo ai mezzi per accrescere l'efficacia dell'insegnamento nelle Scuole normali, le risposte avute concordano nel riconoscere come tali un coordinamento migliore delle varie parti della materia da insegnare, una maggior frequenza e varietà delle applicazioni delle varie parti teoriche, che man mano si svolgono, e quindi un congruo aumento dell'orario settimanale, pel corso normale.

Riguardo all'esito avuto dallo svolgimento di una o più parti del programma con qualche metodo d'insegnamento diverso dagli

ordinari, ben scarse sono state le risposte pervenuteci, (1) non tali certamente da poterne trarre qualche sicura conclusione di indole generale.

Conclusione. — Dopo di che, noi concludiamo senz'altro questa Relazione, senza ulteriori sviluppi dei Capitoli che seguirebbero, secondo il piano indicato dal Comitato Centrale nel suo « *Rapport préliminaire* » riguardo agli esami e alla preparazione degli insegnanti; quanto agli esami, sta dinanzi al Parlamento un disegno di legge, che tende a semplificare le norme in vigore e a render più rigorosi i passaggi e il conseguimento delle licenze, con un ripristino totale, anzi, dell'obbligo degli esami quando si tratti della licenza, ciò che corrisponde a un desiderio pressochè universale dei competenti e degli stessi padri di famiglia; nè v'è altro d'importante da riferire su questo punto, stando al fine speciale di questa Relazione. Quanto poi alla preparazione degli insegnanti delle Scuole normali, ci rimettiamo senz'altro, alla dotta relazione elaborata dall'illustre prof. Salvatore Pincherle per quanto concerne la preparazione, in genere, degli insegnanti di matematica delle Scuole medie.

---

(1) La prof.ª Rubini ha seguito con successo i criterî che informano la Relazione presentati dalla prof.ª Bisson-Minio al Congresso di Padova nella parte che si riferisce alla prima complementare; le professoresse Giudici, Quintili e Vargas hanno tratto buoni resultati dalle loro lezioni di calcolo letterale nella 1ª normale ispirate al criterio propugnato dal compianto Vailati e attuato in un nostro volumetto, ove la risoluzione delle equazioni apre senz'altro lo studio del calcolo letterale, la prof.ª Manfredini segue, nelle sue lezioni d'aritmetica razionale, il metodo del Peano e dichiara che mai le è accaduto di constatare che le alunne trovassero difficoltà maggiore seguendo questo metodo, piuttosto che gli altri metodi più comunemente usati, e aggiunge d'avere ottenuto resultati sempre buoni, talvolta ottimi.

ALLEGATI

Allegato A)

Cenni preliminari circa lo stabilimento ed il progressivo sviluppo delle Scuole normali e magistrali prima dell' ordinamento vigente nel 1861 (1).

Delle Scuole normali fu culla quella Germania, la quale nei processi filosofici e nello spirito sintetico di ogni scientifica disciplina di tanto precedette e si lascia addietro tutte le altre nazioni del mondo incivilito. Come ne insegna Vittore Cousin, si fu per l'illuminata iniziativa di Giovanni Giulio Hecker, consigliere superiore del Concistoro di Berlino, che fu aperta fin dal 1748 una scuola normale privata, la quale nel 1753 fu elevata al grado di scuola normale primaria reale, e nel 1771 venne dotata dal Grande Federico d'una rendita di quattromila scudi. L'Austria posta, come potenza tedesca, nella necessità di seguire il progresso intellettuale della Germania, ma inclinata per le sue condizioni politiche e le sue mire dispostiche a paralizzare gli effetti, fu bensì la prima che portò in Italia l'insegnamento normale, ma ciò fece su basi così meschine e con mezzi così inetti, che il Piemonte libero ne ottenne in pochi anni molto maggiori risultati.

In vero il Regolamento per le scuole elementari pubblicato in Lombardia fin dal 1818, già parla di una scuola semestrale, e di scuole quadrimestrali e trimestrali di metodica presso le scuole normali (scuole elementari governative nei capiluogo di provincia): ma, o ciò debba attribuirsi a fini politici del Governo, oppure a ragioni più semplici, come la mancanza di sufficienti guarentigie nell' accettazione degli aspiranti, od al troppo modesto sapere degli istruttori, fatto sta che l'istruzione dei maestri elementari in Lombardia rimase in generale in con-

(1) Dal *Codice dell' Istruzione secondaria* — Torino 1861. Tipografia Sab. Franco, pag. 469 e seguenti.

dizioni assai basse ed insufficienti. In Piemonte, appena nel 1822 un Regolamento del 23 luglio cominciò ad obbligare i maestri elementari, allora chiamati comunali, a riportare l'approvazione dell'Autorità scolastica provinciale (*Riformatore*), approvazione che si concedeva dapprima senza alcuna guarentigia d'idoneità, e poi per disposizione del R. Viglietto 20 marzo 1829 mediante un esame, che si sosteneva davanti lo stesso Riformatore assistito da due maestri di grammatica. Nel 1844 (manifesto del 10 luglio) si fece in Torino il primo esperimento d'una scuola pedagogica sotto la guida di quell'uomo così benemerito della istruzione elementare ed infantile, che fu Ferrante Aporti; ma non si ordinarono scuole di metodo su basi stabili e proficue, che colle Regie Patenti del 1° agosto 1845. Frutto dello studio e dell'esperienza di uomini colti e pratici della materia, fra cui lo stesso Aporti, Vincenzo Troya e sopra tutti l'illustre Amedeo Perjron, ben si può dire che ad esse scuole è dovuto e da esse data il progresso immenso fatto dell'istruzione elementare in Piemonte. Avevano per iscopo principale d'istruire alle nuove discipline pedagogiche i maestri già in esercizio, ma aprivano ad un tempo l'adito a conseguire le patenti di maestro a tutti coloro, i quali, dato saggio in un esame di conoscere le materie necessarie a sapersi da un maestro, mostrassero di riescire buoni insegnanti mediante un corso ed un esame pedagogico.

Un numero sterminato di persone, le quali, dopo aver percorso gli studi secondari in provincia, non potevano per mancanza di mezzi pecuniari od altri appigliarsi a carriere accademiche, faceva volentieri il sacrifizio di pochi mesi per conseguire un corredo di cognizioni ed un titolo, se non lucroso, a molti geniale, e così popolava queste scuole e somministrava un personale sufficiente al bisogno. Se non che per mancanza, noi crediamo, o d'appropriate direzioni, o di sufficiente vigilanza, od anche per l'entusiasmo politico penetrato nei primi anni del libero regime fin nelle più modeste e tranquille pareti, i giovani professori, cui venivano affidate queste scuole invece di attenersi alla pratica, facevano per lo più lezioni politico-accademiche; quindi il discredito in cui caddero queste scuole. Del resto il più bell'elogio a siffatta istituzione noi l'abbiamo nelle conferenze pedagogiche tenutesi nell'Emilia, le quali, contenute nei modesti limiti della pratica, incontrarono l'approvazione generale. Alle scuole di metodo succedettero le scuole magistrali annuali ordinate dal regolamento 21 agosto 1853, poscia le normali fondate dalla legge 5 giugno e ordinate dal regolamento 5 settembre 1859 su basi identiche a quelle poste in vigore dal R. D. del 24 Giugno 1860.

Le scuole preparatorie per le maestre nacquero tutte dopo il 1848, parte si può dire da sè in seguito al bisogno sentitosene nelle Provincie, parte per cura di associazioni private, finchè col regolamento 21 agosto 1853 si estesero ad esse le disposizioni vigenti per le scuole maschili.

Ma non dobbiamo incolpare agli egregi uomini che iniziarono l'insegnamento normale se non pensarono eziandio alle maestre: ciò deve piuttosto attribuirsi alla mancanza assoluta in quell'epoca di bastevoli elementi.

Allegato B)

Ordinamento dato alla Scuola Normale dalla Legge Casati.

« *Delle Scuole Normali* »

Art. 357. — Sono istituite 9 scuole normali per gli allievi maestri, delle quali una nella Savoia, una nella Sardegna, una nella Liguria, tre nelle antiche Provincie dello Stato e tre nelle nuove.

Egual numero di scuole normali colla medesima distribuzione è pure stabilito per le allieve maestre (1).

Art. 358. — Le materie d'insegnamento in tali istituti sono:

1° la lingua e gli elementi di letteratura nazionale;
2° gli elementi di geografia generale;
3° la geografia e la storia nazionale;
4° l'aritmetica e la contabilità;
5° gli elementi di geometria;
6° nozioni elementari di storia naturale, di fisica e di chimica;
7° norme elementari di agraria;
8° disegno lineare e calligrafia;
9° la pedagogia.

Nelle scuole normali per le maestre è aggiunto l'insegnamento di lavori proprî al sesso femminile: in quelle pei maestri può essere aggiunto un corso elementare d'agricoltura e di nozioni generali sui diritti e doveri dei cittadini in relazione allo Statuto, alla legge elettorale ed all'amministrazione pubblica.

Art. 359. — L'insegnamento delle materie predette si compie in tre anni. Esso però verrà ripartito in guisa che dopo due anni di corso, gli allievi possano essere abilitati all'esame per la patente del corso inferiore delle scuole elementari, e dopo tre anni all'esame per la patente del corso superiore delle scuole medesime.

---

(1) Con l'art. 1 del Reg. 24 giugno 1860 fu poi ulteriormente precisato che la distribuzione delle Scuole normali regie fra le varie Provincie del Regno sarebbe stata fatta con speciali Decreti Reali, tenendosi conto della popolazione e delle peculiari condizioni delle Provincie medesime.

Art. 360. — Nel secondo e terzo anno del corso gli allievi saranno esercitati in una delle quattro classi del corso compiuto elementare, che verrà posto a disposizione dell'istituto dal Comune in cui è situato.

Art. 361. — A ciascuna delle scuole normali sono addetti tre professori titolari, fra cui sono distribuite le parti principali dell'insegnamento. L'insegnamento delle altre materie potrà essere affidato ad insegnanti aggiunti.

Art. 362. — (3 categorie di professori — Titolari. — Stipendi. — Comitato ispettrici......)

Art. 363. — (Agli stipendi provvede lo Stato, ai locali e agli arredi provvedono i Comuni).

Art. 364. — Per l'ammissione alle Scuole normali si richiede *sedici* anni compiuti per gli alunni, *quindici* per le alunne e l'aver superato un *esame d'ammissione* giusta i programmi prescritti [1].

Art. 365. — (Sussidî).

Art. 366. — (idem — Esami per le borse).

Art. 367. — (Riunione dei sussidiati in convitto.....).

Art. 368. — (Perdita del sussidio).

Art. 369. — (Preferenza ai maestri e alle maestre — a parità di merito — provenienti dalle Scuole normali).

Art. 370. — (Facoltà per le Provincie d'aprire Scuole magistrali).

Art. 371. — (Facoltà ai privatisti di presentarsi all'esame nelle Scuole normali dello Stato, ecc. ecc.).

Art. 272. — (Pareggiamento di patenti d'idoneità dopo 5 anni di insegnamento di chi l'ebbe come privatista).

---

[1] Secondo il Reg. 24 giugno 1860, l'esame d'ammissione al primo anno delle Scuole normali maschili si stendeva sulle materie contenute nel Programma d'insegnamento della quarta classe elementare delle Scuole pubbliche. — Nelle Scuole femminili l'esame stesso si volgeva sulle materie del Programma della terza elementare.

Allegato C)

Programmi per le scuole normali e magistrali degli allievi-maestri (approvati con R. Decreto, 21 novembre 1858) [1] Ministro Cadorna.

Aritmetica. — I Anno.

1. Numerazione decimale parlata e scritta.

2. Le quattro prime operazioni sui numeri interi, sulle frazioni decimali e sui numeri interi accompagnati da frazioni decimali — loro prove e dimostrazioni — mezzo di ottenere il risultato della moltiplicazione e divisione dei numeri decimali con una data approssimazione.

3. Principî di divisibilità dei numeri — numeri primi — ricerca dei divisori primi d'un numero intero — ricerca del massimo divisore comune a due numeri.

4. Frazioni ordinarie — loro proprietà fondamentali — riduzione d'una frazione ordinaria alla più semplice espressione — riduzione di più frazioni allo stesso denominatore — ricerca del denominatore più piccolo a frazioni date.

5. Le quattro prime operazioni sulle frazioni ordinarie e sui numeri interi accompagnati da frazioni ordinarie — dimostrazione delle regole per dette operazioni.

6. Conversione delle frazioni ordinarie in decimali, e viceversa.

7. Numeri complessi — Riduzione dei numeri complessi alla forma di frazione e viceversa — conversione di numeri complessi non decimali in decimali e viceversa — le quattro prime operazioni sui numeri complessi.

8. Sistema metrico decimale dei pesi e delle misure legali — unità fondamentale — misure di lunghezze, di superficie, di volume e di peso — monete — conversione delle misure metriche decimali nelle antiche misure e viceversa — uso delle tavole di riduzione.

9. Formazione delle potenze dei numeri — estrazione delle radici

---

[1] N. B. — Secondo il Regolamento 24 giugno 1860 (art. 58-59-60-61-62-63) per essere inscritti al I corso occorreva aver superato un esame d'ammissione. A questo esame d'*ammissione* poi, secondo l'art. 364 della Legge Casati erano ammessi soltanto i maschi aventi 16 anni compiuti e le donne aventi 15 anni compiutie stendentesi per le scuole maschili sulle materie della *4ª elementare*, e per le scuole femminili sulle materie della *3ª elementare*.

quadrate e cubiche dei numeri interi e delle quantità frazionarie — Estrazione di dette radici per approssimazione.

10. Dei rapporti e delle proporzioni — proprietà fondamentali delle equidifferenze — proprietà principali delle proporzioni.

11. Regola del tre semplice e composta — regole d'interesse e di sconto semplice, di allegazione, di cambio, di società e di partizione.

12. (*) Norme per insegnare l'aritmetica e il sistema metrico nelle scuole elementari.

Contabilità. — I Anno.

I. — *Contabilità domestica e rurale.*

Necessità di tenere ben ordinati i conti di famiglia.

1. Dell'inventario — beni immobili e mobili — debiti e crediti — ipoteche — inventario della casa civile — varie sue parti — mobili, biancheria ecc. — Inventario della casa e dei beni rurali — varie sue parti — attrezzi, derrate.

2. Del bilancio — parte attiva, e parte passiva — Bilancio attivo — entrate ordinarie, straordinarie e prevedibili — varie categorie delle une e delle altre — Bilancio passivo — spese ordinarie, straordinarie e prevedibili — varie categorie delle une e delle altre.

3. Della tenuta dei libri in partita semplice — libro giornale — libro mastro e libri ausiliari — registrazione delle entrate, delle spese, dei debiti e dei crediti sopra i medesimi — chiusura dei conti sul libro mastro — sistemazione dei conti correnti ad interesse secondo i diversi metodi più praticati.

II. — *Cenni sulla contabilità commerciale.*

Operazioni del commerciante.

4. Dei titoli che rappresentano le medesime fatture — conti di compra e di vendita — distinte di pagamento — quitanze e ricevute — lettere di vettura e polizze di carico — biglietti all'ordine e cambiali — mandati e lettere di credito — distinte di sconto e distinte di negoziazione degli effetti di commercio.

Orario pel I anno: Aritmetica e contabilità 3 ore settimanali in lezioni.

Geometria. — II Anno.

1. Corpi — Estensione — Dimensioni — Volume — Superficie — Linea — Punto — Linea retta, spezzata e curva — Superficie, piana e

---

(*) N. B. — Il programma di pedagogia non conteneva norme speciali per l'insegnamento dell'aritmetica e della geometria nelle scuole elementari, ma ne conteneva solo per l'insegnamento della lettura, della lingua e della composizione.

curva — Misura della linea retta — Comune misura di due linee rette — Metodo per tracciare una linea retta sulla carta e sul terreno — Riga e modo di verificarla.

2. Rette concorrenti e parallele — Rette perpendicolari ed oblique — Angoli, lati, vertice — Varie specie di angoli — Proprietà degli angoli adiacenti — Proprietà degli angoli opposti al vertice.

3. Circolo — Circonferenza del circolo — Centro — Raggio — Diametro — Corda — Saetta — Segante — Tangente — Arco — Quadrante — Settore — Segmento — Angolo al centro — Angolo inscritto — Angolo circoscritto — Circonferenze uguali — Corde uguali — Descrivere una circonferenza di circolo — Compasso — Circonferenze concentriche, tangenti, segantisi.

4. Misura lineare della circonferenza del circolo — Divisione sessagesimale della circonferenza del circolo in gradi, minuti e secondi — Misura degli angoli per mezzo degli archi del circolo — Semicerchio rapportatore — Costrurre un angolo uguale ad un angolo dato — Applicazioni.

5. Per un punto preso fuori d'una retta non si può condurre su di questa che una sola perpendicolare — Per un punto dato sopra fuori di una retta innalzare od abbassare a questa una perpendicolare — Squadra e modo di verificarla — Proprietà della perpendicolare e delle oblique condotte da uno stesso punto ad una medesima retta.

6. Dividere per metà una retta, un angolo ed un arco di circolo — Trovare il centro d'un arco — Per tre punti dati far passare una circonferenza di circolo — Per un punto dato fuori o sopra della circonferenza del circolo condurre a questo una tangente — Costruzione del quadrato e del rettangolo — Applicazioni.

7. Denominazione degli angoli formati da due rette parallele tagliate da una terza retta — Teoremi relativi a questi angoli — Per un punto dato condurre una retta parallela a una seconda retta data.

8. Costruzione del parallelogrammo — Archi dello stesso circolo compresi fra due parallele — Applicazioni.

9. Figure piane, rettilinee, curvilinee, mistilenee — Poligono e sue specie, cioè triangolo, quadrilatero, pentagono ecc. Poligoni convessi — Diagonali d'un poligono — Classificazione dei triangoli rispetto ai lati e rispetto agli angoli — Casi d'eguaglianza dei triangoli.

10. Somma degli angoli del triangolo — Proprietà del triangolo equilatero e del triangolo isoscele — Costruzione del triangolo quando ne sono dati tre elementi, fra i quali siavi almeno un lato — Costruzione del triangolo equilatero di cui è dato il lato — Costruzione di un triangolo eguale ad un triangolo dato — Applicazioni.

11. Unità di misure per le aree — Misura dell'area del rettangolo,

del quadrato, del parallelogrammo, del triangolo, del trapezio e d'un poligono qualunque — Problemi ed applicazioni.

12. Poligoni regolari — Loro descrizione per mezzo della divisione della circonferenza del circolo in parti uguali — Misura dell'area del poligono regolare, del settore e del segmento del circolo — Problemi ed applicazioni.

13. Nomenclatura dei solidi principali — Poliedri — Prismi — Parallelepipedi — Cubo — Piramidi — Corpi rotondi — Cilindro — Cono — Sfera — Diametro e raggio della sfera — Circolo massimo — Circoli minori — Emisfero — Segmento sferico — Spicchio sferico — Piramide sferica.

14. Misura delle superficie dei poliedri — Sviluppo e misura della superficie curva del cilindro retto, del cono retto e del tronco di cono retto a basi parallele — Regola pratica per ottenere la misura della superficie della sfera; del fuso sferico; della calotta; della zona — Problemi ed applicazioni.

15. Unità di misura per i volumi — Misura del volume del parallelepipedo, del prisma, della piramide, del cilindro, del cono tronco a basi parallele e della sfera — Problemi ed applicazioni.

16. Norme per insegnare le prime nozioni di geometria nelle scuole elementari.

Orario pel III Anno: Geometria 3 ore settimanali in 3 lezioni.

1. Ripetizione e compimento delle principali proprietà delle proporzioni e delle nozioni più importanti di geometria piana insegnate nell'anno II.

2. Rette proporzionali — Una retta parallela ad un lato del triangolo ne taglia gli altri due lati in parti proporzionali, e viceversa.

3. Ricerca d'una quarta proporzionale dopo tre rette date — Divisione geometrica di una retta in parti uguali ovvero in parti proporzionali a numeri dati, o nella stessa ragione in cui è divisa una linea retta — Scale geometriche, loro costruzione ed uso.

4. Poligoni simili — Condizioni necessarie e sufficienti perchè due triangoli siano simili — Sopra una retta data costruire un triangolo simile ad un triangolo dato.

5. Come i poligoni simili vengano divisi da diagonali omologhe in un egual numero di triangoli simili e similmente disposti — Sopra una retta data costruire un poligono simile ad un poligono dato.

6. Rapporto dei perimetri e delle aree dei poligoni simili, e dei poligoni regolari dello stesso numero di lati — Rapporto delle circonferenze e delle aree di due circoli — Nozioni del rapporto costante della circonferenza del circolo al diametro — Problemi ed applicazioni.

7. Rapporto tra la perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo

retto del triangolo rettangolo sulla ipotenusa ed i segmenti di questa — Trovare una media proporzionale tra due rette date — Problemi ed applicazioni.

8. Retta perpendicolare ad un piano — piani paralleli — piani concorrenti e linea d'intersezione — Angolo diedro e sua misura — Piani perpendicolari tra loro — Angolo solido — Specie diverse di angoli solidi — Poliedri regolari, tetraedro, ottaedro, icosaedro, esaedro, e dodecaedro.

9. Ripetizione delle nozioni state insegnate nel II anno intorno ai volumi — Applicazioni più usuali e semplici della straordinaria pratica.

10. Elisse — Nomenclatura della linea e dei punti di essa — Modo di descriverla e nozione delle sue principali proprietà.

Orario: Geometria 2 ore settimanali in 2 lezioni.

Programma per le scuole normali e magistrali delle allieve maestre (approvati con R. Decreto 19 dicembre 1858) Ministro Cadorna.

Avvertenza (che non è data per le scuole maschili).

« Nello svolgere le materie indicate nei Programmi che seguono, gl'insegnanti dovranno restringersi alle più semplici e precise definizioni ed alle nozioni affatto elementari evitando ogni disquisizione scientifica.... »

Aritmetica. — I Anno.

1. (come per le scuole maschili).
2. (come per le scuole maschili).
3. Divisibilità dei numeri — numeri pari, impari — numeri primi — ricerca dei divisori primi d'un numero intero — ricerca del massimo divisore comune a due numeri.
4. (come per le scuole maschili).
5. (come per le scuole maschili).
5. (come per le scuole maschili).
7. Numeri complessi — loro conversione in numeri decimali.
8. (come per le scuole maschili con questa sola variante pel 5° titolo: « conversione delle antiche misure nelle misure metriche decimali »).

Orario pel II anno: 2 ore settimanali in 2 lezioni.

9. Formazione delle potenze dei numeri — regola pratica per estrarre le radici quadrate dei numeri interi e delle quantità frazionarie ridotte sotto forma di numeri decimali.

10. — Dei rapporti e delle proporzioni — proprietà fondamentali

delle equidifferenze — medio aritmetico – proprietà fondamentali delle proporzioni — ricerca del quarto proporzionale e del medio proporzionale geometrico.

11. Regola del tre semplice e composta — risoluzione di problemi semplici col metodo detto di *riduzione all'unità* — regole d'interessi e di sconto semplice, di cambio, di società e di partizione.

12. (Come per le maschili, pel I anno al n. 12 del programma d'aritmetica).

Contabilità domestica. — II Anno.

I numeri 1-2 e 3 del programma delle scuole normali maschili (I anno), con nessuna modificazione, arrestandosi però il n. 3 alla chiu- « sura dei conti sul libro mastro ».

Nomenclatura e nozioni elementari di geometria. — II Anno.

1. (*come per le scuole maschili*, toltone il titolo 11° « comune misura di due linee rette » e modificata la dizione del 12° così « Tracciare « una linea retta ».

2. (come per le scuole maschili).

3. (come per le scuole maschili) con questa sola modificazione dell'ultimo titolo: Circonferenze concentriche — Corona circolare ».

4. (come per le scuole maschil i).

5. (come per le scuole maschili, soppresso l'ultimo titolo).

6. (come per le scuole maschili).

7. (come per le scuole maschili).

8. (come per le scuole maschili).

9. (come per le scuole maschili) con questa modificazione nel 5° titolo: « Classificazione dei triangoli e dei quadrilateri » e posto come 6° e ultimo titolo » Poligono regolare e sue specie «.

10. (come per le scuole maschili, soppressi però i primi due titoli).

11. (come per le scuole maschili, ma col 2° titolo così espresso: « Metodo pratico ger ottenere l'area del rettangolo ecc.....).

12. (come per le scuole maschili, soppressa la misura del settore e del segmento del circolo).

13. (come per le scuole maschili, aggiunto in fine « Unità di misura per i volumi »).

14. Norme per insegnare le prime nozioni di geometria nelle scuole elementari.

Orario pel II anno: 2 ore settimanali (in 2 lezioni) per l'Aritmetica e Contabilità e 2 lezioni) per la Geometria.

N. B. — Lo studio della geometria terminava al II anno nelle scuole normali femminili.

AVVERTENZA: Tanto nelle maschili quanto nelle scuole femminili: *esame scritto di matematica.*

Istruzione 5 febbraio 1859 per lo svolgimento dei Programmi (del 1858) per le Scuole Normali (Date dal Ministro Cadorna).

Aritmetica e contabilità.

Quantunque i giovani ammessi alle scuole normali siano già forniti delle principali nozioni d'aritmetica, dovrà il professore ricominciare questo insegnamento per inculcare i principî fondamentali sui quali non è mai soverchia la loro meditazione. Essi non debbono solo apprendere empiricamente il calcolo, ma conoscere le ragioni in modo da saperlo maneggiare senza esitanza entro quei limiti in cui è ristretta la scienza di cui abbisognano. Il professore deve adunque aver di mira d'avvezzare gli alunni a formarsi concetti chiari e precisi sì del sistema di numerazione parlata e scritta, e sì delle precipue operazioni; quindi di esercitare il loro raziocinio intorno alle poche proprietà de' numeri che debbono sapere, e precipuamente intorno alle dimostrazioni delle regole delle operazioni. Ma quel che più importa allo scopo dell'insegnamento ed allo studio dei giovani, si è l'uso che essi debbono fare delle teoriche apprese. Per la qual cosa il professore li eserciterà sovratutto nella risoluzione dei problemi; nè si contenti di proporre problemi astratti, ma li tolga dall'economia domestica e rurale, dalla statistica, dalla storia e li connetta sempre con utili cognizioni. Avvezzati così gli allievi a sempre aver fra le mani problemi istruttivi, si persuaderanno di dover seguire lo stesso metodo nelle scuole elementari, ed eviteranno lo sconcio di render difficile e disameno ai fanciulli un insegnamento, il quale ben graduato ed applicato riesce all'incontro dilettevole del pari che utile.

In qnanto ai principii didattici che il professore d'aritmetica dovrà insegnare nella scuola normale, rammenti come negli asili d'infanzia e nella prima classe elementare non si possa far senza quei sussidi che rendono percettivo l'insegnamento, concretizzano e mettono sott'occhio i numeri. Tali sono il pallottolliere ed il frazioniere coi quali si possono dare i primi concetti non solo della numerazione ma ancora delle prime operazioni aritmetiche su piccoli numeri.

Gli esercizî di aritmetica mentale che qui cominciano non dovranno essere smessi e abbandonati per tutto il corso; ed anche nei calcoli scritti dovrà il professore sempre richiedere dagli alunni quelle ragioni per cui credono di doversi valere nella risoluzione dei problemi di queste anzichè di quelle operazioni, e procedere con un metodo anzichè con un altro. Abbia pur cura del modo con cui essi scriveranno le operazioni affinchè s'avvezzino a disporle in modo chiaro, ordinato ed esatto, e

conchiudano con risposte precise ai quesiti elementari in cui si risolve il problema.

Finalmente non dimentichi il professore che parte essenziale del metodo applicato all'insegnamento dell'aritmetica consiste nella scelta e nella graduazione dei problemi. Avvezzi adunque ed eserciti i suoi alunni nel ricercare, formulare e graduare i problemi aritmetici per le varie classi elementari, ove dovranno insegnare; assegni loro frequentemente per compito cotesti esercizi, e noti accuratamente gli errori in cui possono cadere sì per rispetto all'argomento mal scelto, e sì per rispetto alle difficoltà insufficienti od eccessive che potranno proporre.

Potrà il professore per la teorica aritmetica valersi del *Trattato* del professore Marta ed anche del *Trattato d'Aritmetica* dei *Fratelli delle scuole cristiane;* come per la scelta dei problemi gli gioverà questo trattato, e la *Guida per l'insegnamento dell'Arimetica* del medesimo Autore.

In quanto alla contabilità, è cosa per sè evidente come il professore non debba abbondare in teoriche, che sarebbero inutili allo scopo del suo insegnamento; ma determinato con semplicità e parsimonia il valore dei termini comunemente adoperati in siffatta materia, egli debba insegnare in modo pratico esercitando gli alunni a compilare inventarî ad ordinare un bilancio privato, a tenere i libri, a chiudere e sistemare i conti, a scrivere moduli di quitanze, polizze, mandati ecc., come se i giovani avessero fra le mani gli affari d'una privata o d'una piccola casa di commercio.

Elementi di Geometria.

Questo insegnamento, come apparisce dal Programma, non è diretto alla speculazione matematica, ma a dare quelle nozioni geometriche che bastano a risolvere i problemi più usuali e possono divenire popolari.

Tuttavia il professore potrà valersene per esercitare il raziocinio dei giovani ed avvezzarli all'esattezza del linguaggio ed a formarsi idee chiare ed ordinate. A tal uopo gioverà la precisione, delle definizioni, e la logica classificazione delle linee e delle figure di uno dovrà dare la spiegazione. Premessa così la nomenclatura geometrica, il professore darà, secondo il programma medesimo della teorica delle figure, quella parte che è base precipua delle regole di misurazione. Queste regole non potranno, in quanto al loro principio, essere dimostrate rigorosamente alla foggia di trattati scientifici, ma dovranno ricavarsi da principî induttivamente stabiliti. — Avverta tuttavia il professore come nel terzo anno di corso il suo insegnamento divenga più scientifico, e debba procedere con metodo più rigoroso. Insiste sulle proprietà delle proporzioni necessarie alla intelligenza della teoria delle linee proporzionali e dei poligoni simili; chè nessun modello più perfetto d'ordine logico e di raziocinio serrato potrà dare ai suoi alunni. — Ma sì nel primo come nel secondo

anno del corso di geometria non dimentichi il professore quale debba essere l'indole del suo insegnamento, e proponga continuamente problemi ed applicazioni convenientemente scelte e graduate.

Di problemi grafici non occorrerà di proporne gran coppia, e perchè quelli che possono essere necessari sono indicati nel programma, e perchè gli altri che possono giovare al disegno lineare faranno parte di questo insegnamento. Ma dei problemi numerici egualmente che dei modi d'esporre colla massima semplicità le teorie geometriche troverà copiosi e lodevoli modelli nel libro francese: *Géometrie par Eysserich et Pascal*, Parigi 1853. — In quanto alle norme didattiche per l'insegnamento delle nozioni di geometria nelle scuole elementari dovrà il professore notare i gradi di esso, e come possa incominciare con frutto assai per tempo e perfin nelle scuole dell'infanzia. Di questo primo insegnamento, il professore darà esempi, e proporrà esercizî agli alunni.

Allegato D)

Programmi per le Scuole normali approvati con R. Decreto 9 novembre 1861. (Ministro De Sanctis)

Aritmetica

Orari: 3 ore settimanali distinte pel 1° anno in tre lezioni per *Aritmetica* e *Contabilità.* (Scuole maschili e Scuole femminili).

1. Numerazione decimale parlata e scritta.

2. Le quattro prime operazioni sui numeri interi, sulle frazioni decimali e sui numeri interi accompagnati da frazioni decimali. — Loro prove e dimostrazioni. — Mezzo di ottenere il resultato della moltiplicazione e divisione dei numeri decimali con una data approssimazione.

3. Principî di divisibilità dei numeri. — Numeri primi. — Ricerca dei divisori primi di un numero intero. — Ricerca del massimo divisore comune a due numeri.

4. Frazioni ordinarie. — Loro proprietà fondamentali. — Riduzione d'una frazione ordinaria alla più semplice espressione. — Riduzione di più frazioni allo stesso denominatore. — Ricerca del denominatore più piccolo a più frazioni date.

5. Le quattro prime operazioni sulle frazioni ordinarie, e sui numeri interi accompagnati da frazioni ordinarie. — Dimostrazioni delle regole per dette operazioni.

6. Conversione delle frazioni ordinarie in decimali e viceversa.

7. Numeri complessi. — Riduzione dei numeri complessi alla forma di frazione, e viceversa. — Conversione dei numeri complessi non deci-

mali in decimali, e viceversa. — Le quattro prime operazioni sui numeri complessi.

8. Nozioni di nomenclatura geometrica ad uso del sistema metrico. — Come crescono i quadrati ed i cubi col crescere dei loro lati.

9. Sistema metrico decimale dei pesi e delle misure legali. — Unità fondamentale. — Misure di lunghezza, di superficie, di volume e di peso. — Monete. — Conversione delle misure metriche decimali nelle antiche misure e viceversa. — Uso delle tavole di riduzione.

10. Formazione delle potenze dei numeri. — Estrazione delle radici quadrate e cubiche dei numeri interi e delle quantità frazionarie. — Estrazione di dette radici per approssimazione.

11. Dei rapporti e delle proporzioni. — Proprietà fondamentali delle equidifferenze. — Proprietà principali delle proporzioni.

12. Regola del tre semplice e composta. Regole d'interesse e di sconto semplice, d'allegazione, di cambio, di società e di partizione.

13. Norme per insegnare l'aritmetica ed il sistema metrico nelle scuole elementari [1].

Programma di contabilità (II Anno)

Contabilità domestica e rurale.

Necessità di tenere bene ordinati i conti di famiglia.

1. Dell'inventario. — Beni immobili e mobili. — Debiti e crediti. — Ipoteche. — Inventario della casa civile. — Varie sue parti. — Mobili, biancheria, ecc. — Inventario della casa e dei beni rurali. — Varie sue parti. — Attrezzi, derrate, ecc.

2. Del bilancio. — Parte attiva e parte passiva.

Bilancio attivo. — Entrate ordinarie, straordinarie e prevedibili. — Varie categorie delle une e delle altre.

Bilancio passivo. — Spese ordinarie, straordinarie e prevedibili. — Varie categorie delle une e delle altre.

3. Della tenuta dei libri in partita semplice. — Libro giornale. — Libro mastro e libri ausiliari. — Registrazione delle entrate, delle spese, dei debiti e dei crediti sopra i medesimi. — Chiusura dei conti sul libro mastro. — Sistemazione dei conti correnti ad interesse secondo i diversi metodi più praticati.

Programma di geometria (II e III Anno)

1. Corpi. — Estensione. — Dimensioni. — Volume. — Superficie. — Linea. — Punto. — Linea retta. — Spezzata. — Curva. — Superficie

---

[1] N. B. — Ancora nel programma di pedagogia nulla compariva circa alla metodologia speciale per l'aritmetica e la geometria.

piana e curva. — Misura della linea retta. — Comune misura di due linee rette. — Metodo per tracciare una linea retta sulla carta e sul terreno. — Riga e modo di verificarla.

2. Rette concorrenti e parallele. — Rette perpendicolari od oblique. — Angoli, lati, vertice. — Varie specie di angoli. — Proprietà degli angoli adiacenti. — Proprietà degli angoli opposti al vertice.

3. Circolo. — Circonferenza del circolo. — Centro. — Raggio. — — Diametro. — Corda. — Saetta. — Segante. — Tangente. — Arco. — Quadrante. — Settore. — Segmento. — Angolo al centro. — Angolo inscritto. — Angolo circoscritto. — Circonferenze uguali. — Corde uguali. — Descrivere una circonferenza di circolo. — Compasso. — Circonferenze concentriche. — Tangenti. — Segantisi.

4. Misura lineare della circonferenza del circolo. — Divisione sessagesimale della circonferenza del circolo in gradi, minuti e secondi. — Misura degli angoli per mezzo degli archi di circolo. — Semicircolo rapportatore. — Costruire un angolo uguale ad un angolo dato. — Applicazioni.

5. Per un punto preso, sopra o fuori d'una retta, non si può condurre su di questa che una sola perpendicolare. — Per un punto dato, sopra o fuori d'una retta, abbassare od innalzare a questa una perpendicolare. — Squadra, e modo di verificarla. — Proprietà della perpendicolare e delle oblique condotte da uno stesso punto a una medesima retta.

6. Dividere per metà una retta, un angolo ed un arco di circolo. Trovare il centro di un arco. — Per tre punti dati far passare la circonferenza di circolo. — Per un punto dato fuori o sopra della circonferenza condurre a questa una tangente. — Costruzione del quadrato e del rettangolo. — Applicazioni.

7. Denominazione degli angoli formati da due rette parallele tagliate da una terza retta. — Teoremi relativi a questi angoli. — Per un punto dato condurre una retta parallela ad una seconda retta data.

8. Costruzione del parallelogramma. — Archi dello stesso circolo compresi fra due parallele. — Applicazioni.

9. Figure piane rettilinee, curvilinee, mistilinee. — Poligono e sue specie, cioè triangolo, quadrilatero, pentagono, ecc. — Poligoni convessi. — Diagonali d'un poligono. — Classificazione dei triangoli rispetto al lati e rispetto agli angoli. — Casi di eguaglianza dei triangoli.

10. Somma degli angoli del triangolo. — Proprietà del triangolo equilatero e del triangolo isoscele. — Costruzione del triangolo quando ne sono dati tre elementi, tra i quali siavi almeno un lato. — Costruzione del triangolo equilatero di cui è dato il lato. — Costruzione di un triangolo eguale ad un triangolo dato. — Applicazioni.

11. Unità di misura per le aree. — Misura dell'area del rettan-

golo, del quadrato, del parallelogramma, del triangolo, del trapezio, e di un poligono qualunque. — Problemi ed applicazioni.

12. Poligoni regolari. — Loro descrizione per mezzo della divisione della circonferenza del circolo in parti uguali. — Misura dell'area del poligono regolare, del circolo, del settore, e del segmento del circolo. — Problemi ed applicazioni.

13. Nomenclatura dei solidi principali. — Poliedri. — Prismi. — Parallelepipedi. — Cubo. — Piramidi. — Corpi rotondi. — Cilindro. — Cono. — Sfera. — Diametro e raggio della sfera. — Circolo massimo. — Circoli minori. — Emisfero. — Segmento sferico. — Spicchio sferico. — Piramide sferica.

14. Misura della superficie dei poliedri. — Sviluppo e misura della superficie curva del cilindro retto, del cono retto e del tronco di cono retto a basi parallele. — Regola pratica per ottenere la misura della superficie della sfera; del fuso sferico; della calotta; della zona. — Problemi ed applicazioni.

15. Unità di misure per i volumi. — Misura del volume del parallelepipedo, del prisma, della piramide, del cilindro, del cono, del tronco di cono a basi parallele e della sfera. — Problemi ed applicazioni.

16. Norme per insegnare le prime nozioni di geometria nelle Scuole elementari.

(Appare manifesto che questi programmi ripetono in buona parte quelli del '58, rispetto ai quali sono però più semplici per la minor quantità di materia contenutavi).

Orario: Per la Scuola normale maschile.

1° anno: Aritmetica e contablità. — 3 ore in 3 lezioni.

2° anno: Aritmetica contabilità e geometria. — 3 ore in 3 lezioni.

3° anno: Aritmetica e geometria. — 2 ore in 2 lezioni.

Per la Scuola normale femminile.

1° anno: Aritmetica e contabilità — 3 ore in 3 lezioni.

2° anno: Aritmetica e geometria. — 3 ore in 3 lezioni.

3° anno: Aritmetica e geometria. — 3 ore in 3 lezioni.

Secondo il Rogolamento 9 novembre 1861, gli esami d'ammissione alla 1ª normale (ferme restando le restrizioni d'età poste, del resto, dalla legge Casati) [1] versavano in una composizione scritta ed in *una prova orale* di mezz'ora sulle prime regole della grammatica *sulle prime operazioni dell'aritmetica pratica.........*

Prova scritta d'esame anche per la matematica per i varî corsi della Scuola normale.

---

[1] Così in base a tale legge rimaneva vigente l'ordinamento che permetteva di abilitare alla fine del 2° corso per la Scuola elementare inferiore e alla fine del 3° corso per la Scuola elementare superiore.

Allegato E)

Istruzioni e programmi per l'insegnamento dell'*aritmetica*, *geometria* e *contabilità* nelle Scuole Normali e Magistrali date il 10 ottobre 1867 (Ministro De Sanctis).

L'aritmetica nelle scuole normali richiede una esposizione ragionata, imperocchè male saprebbe insegnare altrui la pratica delle operazioni chi non avesse una sufficiente cognizione della teoria. Per questo nel primo anno delle scuole normali il professore di matematiche, incominciando dalla numerazione e venendo alle altre operazioni aritmetiche, dovrà dare le ragioni dei modi diversi di operare, e fatto sicuro che queste sieno ben comprese, verrà poi a parlare del modo d'insegnare l'aritmetica ai fanciulli nelle scuole elementari. Con ciò si sarà preparato, ed avrà loro preparata la via per ridurre l'insegnamento all'atto pratico e per procedere innanzi sicuro nella esposizione delle materie serbate agli altri anni di corso. Del resto le *Indicazioni* definiscono abbastanza la natura e l'estensione delle materie da trattarsi.

Quanto alla geometria, si noti innanzi tutto che il fine di questo insegnamento è di mettere i futuri maestri in possesso sicuro delle definizioni delle figure geometriche più importanti e delle loro proprietà principali. Non si pretende adunque che il metodo adoperato per impartire tali nozioni abbia rigore scientifico: bensì dovrà il docente prefiggersi che i suoi raziocinii riescano non faticosi alle menti degli allievi i quali per lo più non sono preparati da una educazione precedente a studî severi.

Il metodo migliore d'arrivare a tale intento è quello di valersi del disegno. Data una chiara ed esatta definizione di una figura, ed insegnata la soluzione di un facile problema, il maestro ne faccia eseguire la costruzione dai suoi allievi, curando nel miglior modo possibile la precisione del disegno. Prendendo poi a considerare il disegno eseguito, ne deduce quelle verità che ne discendono con una evidenza per così dire intuitiva, o coll'uso di ragionamenti semplicissimi. Alcuni esempi chiariranno forse meglio tale concetto.

Dopo aver insegnate le definizioni relative al circolo, e messo in chiaro che in uno stesso circolo ad archi eguali corrispondono eguali angoli al centro, la proporzionalità degli angoli agli archi è di una evi-

denza intuitiva, purchè il maestro si restringa, com'è opportuno, a considerare archi commensurabili: e in seguito si potrà parlare della divisione della circonferenza, della misura degli angoli, e della costruzione di angoli dati.

La proposizione che il raggio perpendicolare a una corda divide per metà la corda, l'arco e l'angolo al centro corrispondenti — le costruzioni per condurre la perpendicolare ad una retta per un punto dato dentro o fuori di essa — la bisezione degli angoli, delle rette e degli archi — le proprietà del triangolo isoscele — quella dei punti della retta condotta per il mezzo di un'altra e a questa perpendicolare — quella dei punti della bisettrice di un angolo — il modo di trovare il centro del circolo a cui appartiene un arco dato — la costruzione del circolo che passa per tre punti dati o tocca tre rette date — l'eguaglianza degli archi compresi tra rette parallele, ecc. — sono cose tra loro talmente collegate, che tutte si possono coi ragionamenti più semplici dedurre da una di esse. Definita l'area di una figura si arriva intuitivamente alla espressione dell'area di un rettangolo, limitando la costruzione al caso in cui i lati sono commensurabili colla unità. Di qui coll'aiuto di trasformazioni grafiche si passa alla determinazione dell'area di un parallelogrammo d'un triangolo, d'un trapezio, di un poligono qualunque.

Questi esempî sono stati qui adotti per fare ben comprendere il metodo grafico-intuitivo che si vuole prescrivere in queste scuole; non già per tracciare la via che debbono tenere i maestri in quei casi particolari. Ogni insegnante, per poco che vi pensi, troverà facilmente molte vie diverse per far dipendere molte proposizioni da una sola costruzione.

Quanto alla geometria solida il maestro dovrà restringersi a dare le definizioni delle varie figure, presentandone i modelli agli allievi e ad insegnare le regole pratiche per calcolare le superficie e i volumi.

Da ultimo è da avvertire che nel 2° anno il docente dovrà solo comunicare le cognizioni fondamentali per ciascuno degli argomenti accennati nelle indicazioni; mentre nel terzo cogli esercizî grafici e numerici darà uno sviluppo più ampio alle materie già spiegate nel secondo, mirando sopratutto ad applicare il calcolo decimale, la regola del tre, l'estrazione di radice e le nozioni sul sistema metrico.

Si aggiungono alla Istruzione le seguenti avvertenze per ciò che riguarda le scuole normali femminili.

Per ciò che riguarda le alunne delle scuole normali femminili il corso di aritmetica del 1° anno sarà il medesimo che quello per i maschi: ma nel 2° anno la geometria e il disegno lineare si restringerà a quel tanto che è bisognevole per comprendere il sistema metrico in tutte le sue parti, tralasciando tutte quelle notizie e quei problemi e quelle costruzioni geometriche che non hanno con questo sistema un legame neces-

sario. Invece in quest'anno si darà compimento all'aritmetica per le alunne del 2° corso, trattando della divisibilità dei numeri, del M. C. D. e m. c. m. a più numeri dati, cose prescritte e notate tra gli esercizî del 3° anno per i maschi, ed aggiungendo a ciò i primi esercizî del tenere i conti e la scrittura dell'azienda domestica e di qualche traffico minuto: esercizî, i quali possono essere di grande utilità tanto alle maestre, quanto alle madri di famiglia, che debbono sapersi adoprare al banco e allo scrittoio, e che nel 3° anno avranno più largo svolgimento. In questo anno essi serviranno a richiamare tutte le regole pratiche insegnate negli anni precedenti e ad applicarli a casi pratici. A questi esercizî si aggiungerà al tempo medesimo qualche notizia particolareggiata sugli atti di commercio, sul modo di tenere il conto corrente ed il libro mastro, e sui principî più elementari delle partite semplice e doppia. E così in un breve e chiaro insegnamento di computisteria si raccoglieranno in quest'anno tutte le nozioni che la maestra di grado superiore dev'essere in grado di poter dare alle alunne che, venendo dalle scuole elementari, si volgono alla masserizia, al traffico, all'industria. In fine del corso il maestro, ponendo in chiaro l'ordine tenuto in questo insegnamento, procurerà di svolgere le regole secondo le quali dev'essere dato, acciocchè riesca efficace e fruttuoso a chi impara.

PROGRAMMI.

Primo anno: **Aritmetica.** — Numerazione decimale parlata e scritta. Le prime 4 operazioni sui numeri interi, sui numeri frazionari, sui numeri composti, sui numeri decimali. — Rapporto; proporzionalità diretta e inversa — regola del tre semplice e composta col metodo di riduzione all'unità — applicazioni.

Secondo anno: **Geometria.** — Definizioni generali relative alle figure geometriche, rette concorrenti, perpendicolari, parallele — angoli adiacenti, opposti al vertice. — Definizioni relative al circolo — misura degli angoli — proprietà elementare delle corde, delle tangenti — costruzioni che ne derivano — Costruzione di triangoli con elementi dati: proprietà dei triangoli — Costruzione di parallele, rettangoli, quadrati, rombi, trapezî — loro proprietà elementari — Area del rettangolo e delle altre figure rettilinee — iscrizione di poligoni regolari nella circonferenza — area di un poligono regolare — area del circolo — lunghezza della circonferenza — Definizioni relative alle figure solide geometriche — Regole pratiche per calcolare le aree ed i volumi del parallelepipedo, del prisma, delle piramidi, del cilindro retto, del cono retto e della sfera. — Sistema metrico decimale — Norme per insegnare il sistema metrico nelle scuole elementari.

Contabilità domestica. — Conto e libri fondamentali — modo di usarli e di chiudere i conti.

Terzo anno: **Aritmetica.** — Potenze — calcolo degli esponenti — Divisibità dei numeri — Scomposizione di un numero nei suoi fattori semplici - Modo di trovare tutti i divisori di un numero — M. C. D. e m. c. m. a più numeri dati — Radice quadrata d'un numero intero e decimale con una data approssimazione — Radice cubica di un numero intero e decimale con una data approsimazione.

Geometria. — Esercizi grafici e numerici.

Orario: 1° Anno, 3 lezioni settimanali e 3 ore d'insegnamento per settimana.
2° Anno, 3 lezioni settimanali e 3 ore d'insegnamento per settimana.
3° Anno, 2 lezioni settimanali e 3 ore d'insegnamento per settimana.

Allegato F)

Programma di Aritmetica, Geometria e Contabilità, 30 settembre 1880 (De Sanctis).

Scuola di preparamento (alla Scuola normale femminile).

In questa scuola le maestre ripeteranno l'insegnamento dell'aritmetica dato nel corso elementare, ma con questa avvertenza particolare, che le alunne acquistino idee più nette e precise che non fecero nelle classi elementari, che conoscano perfettamente la natura e l'uso delle operazioni dell'aritmetica applicate al calcolo ordinario nei bisogni della vita, e che sieno gradatamente esercitate nel calcolo a mente.

Ripigliando a parte a parte l'insegnamento che le alunne hanno ricevuto dell'aritmetica, s'ingegneranno con metodi intuitivi di fare entrare nella loro mente idee chiare ed esatte, di correggere i difetti della loro istruzione precedente e di rendere questo studio utilmente pratico, facendo operare, per quanto è possibile, sopra unità concrete e scegliendo ad esempî problemi di un' applicazione usuale.

Sezione inferiore.

Numerazione. — Calcolo sui numeri interi e sulle frazioni decimali. — Sistema metrico decimale.

Sezione superiore.

Calcolo sulle frazioni ordinarie e sui numeri complessi. — Regole del tre semplice e composta con il metodo di riduzioue all' unità.

Esercizî.

Le alunne faranno a mano a mano frequenti e graduali esercizî a voce e per iscritto.

1. Calcolo a mente con l'aiuto di problemi progressivamente più difficili, ma sempre variati, e che si riferiscano ai più comuni bisogni della vita.

2. Molti esercizî di numerazione parlata; per esempio, enunciare un numero, quando si conoscano le differenti unità onde esso si compone, o scomporre nelle sue differenti unità un numero già enunciato.

3. Bisogna esercitare a servirsi nel fatto delle varie misure, affinchè le nozioni del sistema metrico non restino pure astrazioni. Converrà molto insistere perchè le alunne comprendano bene alcune parti poco chiare del S. M. D.; per esempio che il dm^2 non è la decima ma la centesima parte del m^2; che il dm^3 non è $^1/_{10}$ ma $^1/_{1000}$ del m^3. Si adoperi se è possibile, dei modelli proprî a questo genere di dimostrazioni. Si faranno parecchi esercizî sul cambiamento di unità. — Dato un numero intero con tre cifre decimali si farà enunciare prendendo il numero intero per m, m^2, m^3, kg., ha, l, ecc.

4. Si faranno eseguire frequenti problemi sulla regola del tre, d'interesse, ecc., trattandoli con il metodo di riduzione all'unità. I problemi dovranno essere fondati sulla proporzionalità reale, la quale sarà fatta comprendere con molte applicazioni pratiche.

5. Si useranno frequenti e variati mezzi intuitivi per fare comprendere il calcolo delle frazioni ordinarie. Così sarà facile l'intendere che cosa è una frazione ordinaria, l'ufficio dei suoi due termini, le differenti forme di cui una stessa frazione è suscettibile.

Scuole normali (maschili e femminili).

Primo corso — Aritmetica. — 1. Calcolo sui numeri interi. — 2. Principali caratteri di divisibilià dei numeri, ricerca dei fattori di un numero. — 3. Calcolo sulle frazioni ordinarie e decimali. — 4. Elevazione dei numeri alla 2ª e 3ª potenza; estrazione della radice quadrata e cubica. — 5. Calcolo sui numeri complessi. — 6. Sistema metrico decimale; riduzione delle antiche alle nuove misure metriche e viceversa. — 7. Ragioni e proporzioni; regole del tre semplice e composta, e loro uso alla risoluzione di alcuni problemi. — 8. Progressioni; logaritmi e modo di usarli per risolvere i problemi più comuni.

Il professore curerà che in questo corso l'insegnamento sia più razionale, e si facciano frequenti ed ordinati esercizî.

Secondo corso — *Geometria*: 1. Angoli, parallele, triangoli. — 2. Quadrilateri. — 3. Poligoni uguali, equivalenti e simili. — 4. Circolo. — 5. Misura delle aree. — 6. Rette perpendicolari ed oblique ad un piano; piani paralleli e convergenti. — 7. Poliedri. — 8. Prisma e piramide. — 9. Cilindro, cono e sfere. — 10. Misura delle superficie e dei volumi dei solidi geometriei.

Esercizî.

Gli alunni risolveranno problemi di geometria, grafici e numerici. Altri esercizî grafici saranno fatti sotto la guida del professore di disegno, il quale nell'insegnamento del disegno lineare procederà di pieno accordo col professore di geometria.

Contabilità — 1. Iuventario e bilancio preventivo. — 2. Libri per tenere i conti in partita semplice, e modo di usarli. — 3. Chiusura dei conti sul libro mastro e modo di sistemare i conti correnti senza o con interessi. — 4. Bilancio consuntivo.

Esercizî.

Il professore darà agli alunni il compito di tenere nell'anno un conto o di una famiglia o di un piccolo negozio e farà esercizî di metodologia per l'insegnamento dell'aritmetica e del sistema metrico decimale nelle classi elementari di grado inferiore.

Terzo corso — *Aritmetica* e *geometria.* — Sommaria ripetizione delle parti più difficili di questa materia; risoluzione di problemi di aritmetica e di geometria; esercizi di metodologia per l'insegnamento dell'aritmetica e del sistema metrico decimale nelle classi elementari di grado superiore.

Orario: ore 4 $^1/_2$ I corso; ore 3 II corso; ore 1 $^1/_2$ III corso. Scuola di preparamento ore 4 $^1/_2$.

Istruzioni generali ai Programmi del 30 settembre 1880, (De Sanctis).

« Le istruzioni premesse ai programmi del 10 ottobre 1867 sono sempre iu vigore. Anzi desideriamo che i professori curino meglio di informare il loro insegnamento a quelle savie massime pedagogiche, e di seguirle fedelmente nella pratica ». I programmi che presentiamo non fanno altro che tracciare delle linee generali, per segnare i limiti nei quali ciascuno insegnamento deve tenersi secondo la natura della scuola e il possibile lavoro di ogni anno.

I professori meglio che altri potranno giudicare quale parte del loro insegnamento debbano toccare leggermente e quale approfondire quale

premettere e quale posporre. Noi confidiamo nella libertà e nella iniziativa dei professori, i quali nella loro opera debbono prendere consiglio dalle necessità del momento e dalla capacità, dalla buona volontà e dalla diligenza dei proprî alunni. Solo raccomandiamo che ogni professore entri in classe bene preparato, con un disegno già stabilito nella mente, affinchè l'attenzione degli alunni sia fermata da una lezione interessante, la quale sia nel medesimo tempo un ritorno su quello che si è veduto ed un passo in avanti in quello che resta a vedere.

Non indicheremo alcun libro di testo, altro che quello per la lettura dell'italiano..........

È assolutamente vietato il dettare in classe.........

Ogni insegnamento deve mirare e a dar conoscenza della materia, nei limiti consentiti dalla natura della scuola, e a sviluppare la intelligenza e ad educare il senso morale degli alunni.

Onde nulla si confidi alla memoria che prima l'intelletto non abbia bene compreso, niun vocabolo sia usato il cui senso non sia stato già bene dichiarato. Le idee astratte siano precedute dalla intuizione dei concreti da cui furono derivate e per gli alunni si rifaccia quel processo di analisi per il quale l'umanità è salita alla formazione di esse idee.......

. . . . ; . . . .

I programmi sono comuni e alle scuole maschili e alle femminili. Ma non si vuole dimenticare che, sebbene la intelligenza sia la stessa nell'uomo e nella donna, pure secondo la natura dell'ufficio che l'uno e l'altra tengono nel mondo, alcune qualità variano di grado e di modo. E a coteste differenze bisogna por mente nello svolgimento di ciascun programma, nello scegliere gli esercizî in ciascuna materia...............

. . . .

Allegato G)

Programmi approvati con Decreto Ministeriale 1 novembre 1883 (Ministro G. Baccelli).

Aritmetica, Contabilità e Nozioni elementari di geometria

Corso preparatorio.

In questo Corso ha principio lo studio dell'aritmetica ragionata per mezzo delle più semplici e facili dimostrazioni, di guisa che alle operazioni pratiche già apprese nelle classi elementari si aggiunga la dimo-

strazione di quelle regole e di quelle proprietà sulle quali le stesse operazioni sono fondate.

Classe I.

1. Le prime 4 operazioni sui numeri interi e principali teoremi relativi a dette operazioni.

2. Le prime 4 operazioni delle frazioni in generale.

3. Teoria delle frazioni ordinarie.

4. Ricerca, per successive divisioni, del massimo divisore comune a due o più numeri e sua applicazione alla riduzione delle frazioni ai minimi termini.

5. Nomenclatura delle principali figure geometriche e misura delle loro aree,

Classe II.

1. Le 4 operazioni sulle frazioni ordinarie e loro dimostrazioni.

2. Frazioni decimali — Loro principali proprietà — Le 4 operazioni sulle frazioni decimali sole o accompagnate da numeri interi.

3. Nomenclatura dei più comuni solidi geometrici e misura delle loro superficie e dei loro volumi.

4. Esposizione completa del sistema metrico decimale.

Corso normale.

Classe I.

1. Principali Teoremi sui numeri primi e sui caratteri di divisibilità dei numeri.

2. Ricerca dei fattori di un numero e per mezzo di questi ricerca del M. C. D, e del M. C. M. a due o più numeri.

Applicazioni alla riduzione delle frazioni ai minimi termini e alla riduzione di 2 o più frazioni ad un M. D. C. — Ricerca della generatrice di una frazione decimale periodica.

3. Calcolo sui numeri complessi ed esercizî di riduzione delle antiche in nuove misure e viceversa.

Contabilità — Prime nozioni di contabilità domestica — Note di compra e vendita — Quietanze — fatture — prontuari — inventari.

Classe II.

Geometria: 1. Angoli — Rette perpendicolari — Oblique — Parallele — Triangoli — Quadrilateri — Poligoni regolari — Poligoni eguali equivalenti e simili — Circolo — Misura delle aree.

2. Rette perpendicolari, oblique, parallele ad un piano — Piani paralleli e convergenti — Poliedri — Prisma e piramide — Cilindro — Cono e sfera — Misura della superficie e dei volumi dei principali corpi geometrici.

Aritmetica: 1. Potenze dei numeri — Estrazione della radice quadrata.

2. Soluzione dei problemi della regola del 3 semplice e composta col metodo di riduzione all'unità — Regola di partizione d'interesse semplice e di miscuglio.

Contabilità: Sistema monetario dello Stato — Fondi pubblici — Cambiali e biglietti all'ordine — Regole di sconto — Senseria — Tara — Ragguagli di prezzo, d'interesse e di sconto.

Esercizî metodologici per l'insegnamento dell'aritmetica e del sistema metrico nelle scuole elementari inferiori.

Classe III.

Aritmetica: 1. Rapporti e proporzioni e principali applicazioni di esse alla soluzione dei problemi relativi alla regola del 3 semplice e composta, di interesse e di partizione.

2. Progressioni per differenza e per quoziente — Logaritmi e modo di usarli nella soluzione dei problemi d'interesse composto e di annualità e nella estrazione delle radici numeriche.

Geometria. — In questa classe le nozioni di planimetria e di stereometria apprese nella seconda classe, saranno applicate alla misura dei terreni coll'uso dei più comuni strumenti geodetici.

Contabilità. — Inventario — Bilancio preventivo e consuntivo — Libri per tenere i conti nelle piccole aziende commerciali ed agricole — Chiusura dei conti sul libro mastro, e modo di sistemare i conti correnti con interessi o senza.

Esercizî metodologici per l'insegnamento dell'aritmetica e del sistema metrico decimale nelle scuole elementari superiori.

Orario: per le scuole normali superiori 2 ore per classe; per le scuole normali inferiori 2 ore per classe; pel Corso preparatorio 3 ore per classe; ove sarà in facoltà del Direttore distribuire le materie in modo che una maestra insegni lingua e storia e un'altra le rimanenti materie (eccettuato canto e ginnastica).

Allegato H)

Programmi (abroganti quelli approvati il 1 novembre 1883) dati dal Ministro P. Boselli, il 17 settembre 1890.

Aritmetica, Geometria e Computisteria

Istruzioni.

Nelle due prime classi della scuola preparatoria, l'opera di chi insegna aritmetica e nozioni di geometria deve essere rivolta a confermare e compire, per via di continui esercizî giudiziosamente fatti con metodo induttivo, quel che gli alunni hanno appreso nelle scuole elementari.

Egli deve perciò, innanzi tutto, proporsi questi tre fini: 1° di abituare gli alunni al calcolo mentale, in guisa che sappiano sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere i numeri speditamente, senza errori e senza dubbiezze; 2° di condurli a dire in qual modo e con quali operazioni si possono più facilmente risolvere i problemi loro proposti; 3° di ammaestrarli a giudicare con una certa esattezza, servendosi per lo più dell'occhio, e qualche volta della mano, la lunghezza di una linea, l'ampiezza di una superficie, il volume e il peso dei corpi che li circondano.

Ad ottenere tutto questo sarebbe forse buon consiglio non adottare nelle due prime classi della scuola preparatoria alcun libro di testo.

Giunti però alla terza classe, per quanto l'insegnamento delle matematiche in queste scuole debba esser sempre tenuto in modesti confini, deve tuttavia cominciare a essere fatto associando avvedutamente il metodo induttivo al deduttivo, con l'intento di porgere agli alunni una chiara e ordinata istruzione scientifica, e di svolgere e ad un tempo disciplinare le loro facoltà mentali.

E perchè siffatto studio considerata altresì l'indole speciale della scuola normale, riesca veramente utile ed efficace, bisogna ancora aver presente ch'esso deve fornire agli alunni i mezzi d'intendere più agevolmente e più chiaramente le altre materie che traggono lume dalle matematiche, come le nozioni di cosmografia, alcune di geografia, molte cognizioni di fisica, ecc.; deve porli in grado di saper tenere con ordine

i conti di una modesta azienda, e di impartire in giusta misura, per trarne buoni risultati, l'insegnamento dell'aritmetica e del sistema metrico nelle scuole elementari.

In ciascuna classe, a cominciare dalla 1ª della scuola preparatoria, oltre gli esercizî sulla lavagna, per l'aritmetica e la geometria, gli alunni faranno a casa due esercizî scritti ogni settimana.

PROGRAMMA

Scuola preparatoria.

Classe I. (ore 2 settimanali).

Aritmetica pratica. — Le prime 4 operazioni sui numeri interi e sulle prime frazioni ordinarie. — Risoluzione di problemi analoghi.

Classe II. (ore 2 settimanali).

Le prime 4 operazioni sulle frazioni decimali.

Nozioni pratiche di geometria utili alla chiara intelligenza del sistema metrico decimale e delle figure che servono agli esercizî di disegno nella scuola preparatoria.

Risoluzioni di problemi analoghi.

Classe III. (ore 2 settimanali).

Aritmetica razionale. — Le prime 4 operazioni sui numeri interi. — Principali caratteri di divisibilità dei numeri. Teoria elementare dei numeri primi e non primi e ricerca del massimo comun divisore e del minimo comun multiplo di due o più numeri.

Le prime 4 operazioni sulle frazioni ordinarie e decimali. — Conversione delle frazioni ordinarie in decimali e viceversa.

Sistema metrico decimale.

Numeri complessi — Conversione dei numeri complessi in frazioni ordinarie od in frazioni decimali. — Operazioni sui numeri complessi.

Riduzione delle antiche misure in quelle del sistema metrico decimale.

Scuola normale.

Classe I. (ore 2 settimanali).

Potenza e radice — Estrazione della radice 2ª e 3ª — Estrazione delle radici per approssimazione.

Grandezza e quantità proporzionali — Rapporti e proporzioni; problemi che possono risolversi coll'aiuto delle proporzioni.

Geometria - Nozioni di planimetria. — Punti e rette e loro rapporti di posizione nel piano.

Angoli — Triangoli e quadrilateri — Poligoni — Poligoni regolari — Circolo — Principali teorie relative all'uguaglianza dei poligoni.

Misura delle rette, degli angoli, dei poligoni e dei circoli.

Equivalenze di figure piane e principali teorie che vi si riferiscono.

Computisteria per le piccole aziende. — Note di compra e vendita, quietanze, fatture, prontuari.

Sistema monetario dello Stato. Fondi pubblici — Cambiali e biglietti d'ordine. Sconti, senserie e tare.

Classe II. (ore 2 settimanali).

Aritmetica razionale. — Potenza, radice e logaritmo. — Operazioni logaritmiche — Regole pratiche per la ricerca dei logaritmi corrispondenti a numeri dati e viceversa — Uso dei logaritmi nella risoluzione dei problemi d'interesse composto e di annualità, e nella estrazione delle radici.

Geometria - Planimetria. — Problemi di misurazione, nei quali si possa far uso della regola per l'estrazione della radice 2ª.

Somiglianza delle figure piane e principali teorie che vi si riferiscono.

Stereometria. — Punti, rette e piani, e loro rapporti di posizione nello spazio — Angoli piani, diedri — Prismi e piramidi — Poliedri e poliedri regolari — Cilindro, cono e sfera.

Nozioni fondamentali sulla eguaglianza, equivalenza, somiglianza delle figure solide — Misura delle superfici e dei volumi delle figure solide.

Problemi di misurazione, nei quali possa farsi uso della regola per l'estrazione della radice 3.ª

Risoluzione di problemi aritmetica e geometria.

Nelle scuole maschili esercizî per la misura dei terreni e dei fabbricati, adoperando i più comuni strumenti geodetici.

Computisteria. — Inventarî — Bilancio preventivo: libri necessarî per tenere i conti delle piccole aziende. Chiusura dei conti sul libro mastro, e modo di sistemare i conti correnti con o senza interesse. Conto consuntivo.

Esercizî pratici per l'insegnamento dell'aritmetica, della geometria intuitiva e del sistema metrico decimale nelle classi elementari inferiori.

Classe III. (ora 1 settimanale).

Ripetizione delle materie studiate negli anni precedenti, e risoluzione di problemi di aritmetica e geometria.

Esercizî pratici per l'insegnamento dell'aritmetica, del sistema metrico decimale e delle nozioni di geometria nelle classi elementari inferiori e superiori.

Allegato I)

Programmi per il corso preparatorio della Scuola Normale, dati con R. Decreto 29 ottobre 1891 (Ministro della Pubblica Istruzione Pasquale Villari).

Aritmetica pratica e nozioni pratiche di geometria

1ª Classe. (2 ore settimanali)

Aritmetica. — Le 4 operazioni fondamentali sui numeri interi e regole per eseguirle. — Prove delle quattro operazioni.

Regole per conoscere se un numero è divisibile per 2, 4, 8, 3, 9, 5, 25.

Divisore comune a due o più numeri.

Ricerca del massimo comune divisore di due numeri o più. — Numeri primi tra loro.

Numeri primi assoluti e relativi.

Regola per decomporre un numero in fattori primi e per trovare tutti i divisori di un numero.

Ricerca del massimo comun divisore mediante la scomposizione dei numeri in fattori primi.

Multipli comuni a due o più numeri e regola per calcolare il minimo comune multiplo.

Geometria — Nozioni pratiche utili alla chiara intelligenza delle figure che servono agli esercizî di disegno.

Regole pratiche per la misura delle rette e degli angoli.

2ª Classe. — (2 ore settimanali)

Aritmetica. — Frazione ordinaria e sue proprietà, facendo variare i termini di essa.

Riduzione delle frazioni alla più semplice espressione ed allo stesso denominatore.

Le quattro operazioni fondamentali sulle frazioni; regole per eseguirle. — Potenza di una frazione.

Numero decimale. — Moltiplicazione e divisione di un numero decimale per una potenza di 10.

Le prime quattro operazioni sui numeri decimali.

Riduzione di una frazione ordinaria in decimale e viceversa.

Sistema metrico decimale.

Regola pratica per l'estrazione della radice quadrata da un numero intero e dalle frazioni.

Geometria. — Regole pratiche per la misura dei triangoli, quadrilateri, poligoni, circonferenze e circoli.

Esercizî numerici e problemi. — Problemi inversi.

3ª *Classe.* (2 ore settimanali)

Aritmetica. — Numeri complessi. — Riduzione dei numeri complessi in frazioni ordinarie e in decimali limitandone l'applicazione alle sole misure non decimali ora in uso da noi e a qualche misura estera.

Rapporti e proporzioni con numeri interi.

Proporzionalità diretta ed inversa. — Regola del 3 semplice e composta, col metodo delle proporzioni e con quello della riduzione all'unità.

Divisione di un numero in parti proporzionali a numeri dati.

Regola pratica per l'estrazione della radice cubica da un numero intero e dalle frazioni.

Geometria — Regole pratiche per la misura delle superficie e dei volumi dei principali solidi geometrici, premesse le necessarie definizioni e nozioni (cubo, prisma, piramide, sfera, cilindro, cono).

Esercizî numerici e problemi. — Problemi inversi.

Avvertenza

Nell'insegnamento dell'aritmetica e delle nozioni di geometria è necessario dare definizioni e regole chiare ed esatte, esempi molti, problemi svariati e scelti fra quelli che non richiedono troppo lunghe operazioni di calcolo e che hanno attinenza con le necessità della vita.

In ciascuna lezione si dovrà assegnare un tempo sufficiente agli esercizî di calcolo orale.

Allegato K)

Programmi per le Scuole Normali, dati il 18 settembre 1892 (Ministro F. Martini).

Dalla *Circolare N. 111.*

...... Mi sarebbe piaciuto non mutare quelle del 1890 perchè le troppo frequenti mutazioni turbano l'andamento degli studî e scemano la fiducia che insegnanti, famiglie, alunni devono avere nella saldezza

e ragionevolezza degli ordinamenti didattici; ma alla riforma era obbligato, sia perchè bisognava connettere gli studî del corso normale con quelli del corso preparatorio disposti in nuovo modo l'anno passato, sia perchè mi persuasi che i programmi del corso normale non rispondevano al carattere e al fine delle scuole normali. E perchè agli esami di patente non si presentano i soli alunni di queste scuole, importava determinare con precisione la coltura e le attitudini, di cui devono dar saggio i candidati.

Mi affido alla diligenza e allo zelo dei direttori e degli insegnanti, perchè questi programmi sieno coordinati agli studî già fatti dagli alunni, senza ripetizioni non necessarie e senza lacuna, di che vorrò essere particolarmente informato nelle relazioni finali.

. . . .

Matematica.

Il professore di matematica non dimentichi ch'è fine della scuola normale apparecchiare gli allievi maestri all'insegnamento elementare. Si contenti di insegnare in modo che siano addestrati all'esattezza del linguaggio e de' segni e del rigore del ragionamento. Ogni tanto, ma non a troppi lunghi intervalli, un'ora sia occupata in esercizi nella scuola. Gli alunui poi risolveranno a casa un facile quesito ogni settimana, applicando opportunamente le regole sulla divisibilità dei numeri, sulla ricerca del massimo comun divisore e del minimo comun multiplo, sulla conversione delle frazioni ordinarie in decimali e viceversa.

Per la geometria solida sarà utile far costruire le figure dagli alunni con pezzi di cartone, fili di ferro, ecc., perchè meglio rilevino i disegni fatti sulla lavagna.

Classe I (ore 2 settimanali).

Aritmetica. — Teoria delle quattro operazioni fondamentali — Teoremi fondamentali sulla divisibilità dei numeri — Caratteri di divisibilità. — Potenza e radice — estrazione della radice 2ª e 3ª con una data approssimazione.

Geometria piana. — Definizioni e prime nozioni di Geometria piana — Angoli, tringoli e quadrilateri — Poligoni regolari e irregolari — Circolo — Principali teoremi relativi all'eguaglianza dei poligoni — Misure delle rette, degli angoli, dei poligoni e dei cerchi — Equivalenza di figure piane e principali teoremi che vi si riferiscono.

Classe II (ore 2 settimanali).

Aritmetica. — Rapporto — Equidifferenza e proporzione — Grandezze direttamente o inversamente proporzionali — regola del 3 semplice e

composto — Soluzione dei problemi relativi col metodo delle proporzioni.

Nozioni di contabilità. – Fattura, quietanza, cambiale, biglietto all'ordine.

Geometria. — Linee proporzionali e poligoni simili — Punti, rette e piani, e loro rapporti di posizione nello spazio — Angoli diedri e solidi — Poliedri regolari — Prisma e piramide — Cilindro, cono e sfera — Nozioni fondamentali sull'eguaglianza, equivalenza e somiglianza delle figure solide — Risoluzioni di problemi pei quali possa farsi uso delle regole per l'estrazione della radice 2ª e 3ª — Misura della superficie e dei volumi delle figure solide.

Esercizî pratici per l'insegnamento dell'Aritmetica, del sistema metrico decimale e delle nozioni di Geometria nelle classi elementari inferiori.

Classe III (ore 2 settimanali).

Computisteria — Sistema monetario dello Stato — Fondi pubblici — Cambiali e biglietti all'ordine — Sconti, senserie e tasse — Inventari, bilancio preventivo, conto corrente — Vaglia cambiari e postali — Casse di risparmio — Risoluzione di problemi di Aritmetica e di Geometria con applicazione ai noti principî di Fisica.

Esercizî pratici per l'insegnamento dell'Aritmetica, del sistema metrico decimale e delle nozioni di Geometria nelle classi elementari superiori.

Allegato L)

Programmi di matematica per il Corso complementare e per il Corso Normale, approvati con R. Decreto 24 novembre 1895 (Ministro G. Baccelli).

(Dalle *Avvertenze*).

Per il Corso complementare — In questo insegnamento è più che mai necessario il dare definizioni chiare e regole precise, esempi molti, problemi svariati e scelti tra quelli, che non richiedono troppo lunghe operazioni di calcolo e che hanno attinenza con la necessità della vita. Fra gli esercizî sono da preferire quelli, nei quali è più agevole l'applicazione del calcolo mentale. Questo serve benissimo alla ginnastica dell'intelletto e conferisce anche non poco all'acquisto della facoltà di ragionare ordinatamente e di parlare con precisione di linguaggio. Ma per conseguire il fine l'insegnante non deve contentarsi dei risultati del

calcolo, deve seguire e disciplinare il procedimento logico, per il quale si potè rispondere al quesito.

In quanto alla geometria si raccomanda di associarla continuamente al disegno e di renderla intuitiva mediante lavori di cartone, di legno, di filo di ferro, ecc.

Per il Corso normale — Il professore di matematica non dimentichi che è fine della scuola normale apparecchiare gli alunni all'insegnamento elementare. Si contenti d'insegnare in modo che siano addestrati all'esattezza del linguaggio e dei segni ed al rigore del ragionamento. Ogni tanto, ma non a troppo lunghi intervalli, un'ora sia occupata in esercizî nella scuola. Gli alunni risolveranno a casa un facile quesito ogni settimana, applicando opportunamente le regole sulla divisibilità dei numeri, sulla ricerca del M. C. D. e del M. M. C. sulla conversione delle frazioni ordinarie in decimali e viceversa, sulla riduzione delle misure metriche.

Nella scelta dei quesiti, l'insegnante abbia cura di riferirsi a casi pratici, e li componga, per quanto può, con elementi di fatto tolti dalla vita domestica, dalla fisica, dalla geografia, dalle altre scienze, allo scopo di contribuire anche col suo insegnamento all'educazione degli alunni e di destare un interessamento che alletti allo studio.

Per la geometria solida sarà utile far costruire le figure dagli scolari col cartone, con fili di ferro, ecc., perchè meglio rilevino i disegni fatti sulla lavagna.

Programma per il Corso complementare femminile

I Classe. (ore 2 settimanali)

Aritmetica — Le quattro operazioni fondamentali sui numeri interi e regole per eseguirle. — Prove delle quattro operazioni. — Potenza di un numero.

Regole per conoscere se un numero è divisibile per 2, 4, 8, 3, 9, 5, 25.

Divisore comune a due o più numeri.

Ricerca del massimo comune divisore di due o più numeri. — Numeri primi tra loro.

Numeri primi assoluti e relativi.

Regola per decomporre un numero in fattori primi e per trovare tutti i divisori di un numero.

Ricerca del massimo comun divisore mediante la scomposizione dei numeri in fattori primi. — Multipli comuni a due o più numeri e regola per calcolare il mininimo comun multiplo.

Geometria — Nozioni pratiche utili alla chiara intelligenza delle figure che servono agli esercizi di disegno. — Regole pratiche per la misura delle rette e degli angoli

II Classe. (ore 2 settimanali)

Aritmetica. — Frazione ordinaria e sue proprietà, facendo variare i termini di essa.

Riduzione delle frazioni alla più semplice espressione e allo stesso denominatore.

Le quattro operazioni fondamentali sulle frazioni; regole per eseguirle. — Potenza di una frazione.

Numero decimale. — Moltiplicazione e divisione di un numero decimale per una potenza di 10.

Le prime quattro operazioni sui numeri decimali.

Riduzione di una frazione ordinaria in decimale e viceversa.

Sistema metrico decimale.

Regola pratica per l'estrazione della radice quadrata da un numero intero e dalle frazioni.

Geometria — Regole pratiche per la misura dei triangoli, dei quadrilateri, dei poligoni, delle circonferenze e dei circoli.

Esercizî numerici e problemi. — Problemi inversi.

IV Classe. (ore 2 settimanali)

Aritmetica. — Numeri complessi. — Riduzione dei numeri complessi in frazioni ordinarie e in decimali limitandone l'applicazione alle sole misure non decimali ora in uso da noi e a qualche misura estera.

Rapporti e proporzioni con numeri interi.

Proporzionalità diretta ed inversa. — Regola del tre, semplice e composta, col metodo delle proporzioni e con quello della riduzione all'unità.

Divisione di un numero in parti proporzionali a numeri dati.

Regola pratica per l'estrazione della radice cubica da un numero intero e dalle frazioni.

Geometria — Regole pratiche per la misura delle superficie e dei numeri dei principali solidi geometrici premesse le necessarie definizioni e nozioni (cubo, prisma, piramide, sfera, cilindro, cono).

Esercizî numerici e problemi. — Problemi inversi.

Programma per i Corsi normali (femminili e maschili)

I Classe. (ore 2 settimanali)

Aritmetica. — Teoria delle quattro operazioni fondamentali. — Teoremi fondamentali sulla divisibilità dei numeri. — Caratteri di divisibilità. — Potenza e radice. — Estrazione delle radici 2ª e 3ª con una data approssimazione.

Geometria piana. — Definizioni e prime nozioni di geometria piana. — Angoli triangoli e quadrilateri. — Poligoni regolari e irregolari. —

Circolo. — Principali teoremi relativi all'eguaglianza dei poligoni. — Misura delle rette, degli angoli, dei poligoni e dei cerchi. — Equivalenza di figure piane e principali teoremi che vi si riferiscono.

II Classe. (ore 2 settimanali)

Aritmetica. — Rapporto. — Equidifferenza e proporzione. — Grandezze direttamente ed inversamente proporzionali; regola del tre semplice e composta. — Soluzione dei problemi relativi col metodo delle proporzioni.

Nozioni di contabilità. — Fatture, quietanze, cambiali. — Banche e casse di risparmio.

Geometria. — Linee proporzionali e poligoni simili. — Punti, rette e piani, e loro rapporti di posizione nello spazio. — Angoli diedri e solidi. — Poliedri e poliedri regolari. — Prisma e piramide. — Cilindro cono e sfera.

Nozioni fondamentali sulla eguaglianza, equivalenza e somiglianza delle figure solide.

Risoluzione di problemi pei quali possa farsi uso delle regole per l'estrazione della radice seconda e terza.

III Classe. (ore 2 settimanali)

Computisteria. — Sistema monetario dello Stato. — Fondi pubblici. — Sconti, senserie e tasse. — Inventari, bilancio preventivo, conto corrente.

Risoluzione di problemi d'aritmetica e di geometria.

RASSEGNA BIBLIOGRAFICA

FEDERICO AMODEO: *Complementi di Analisi Algebrica elementare*, con appendice sulle Sezioni Coniche. — Napoli, L. Pierro Editore, 1909. — L. 3.

L'A. senza seguire l'ordine dei programmi, ha disposto gli argomenti secondo un ordine più razionale, ponendo prima le nozioni di analisi combinatoria, le frazioni continue e l'analisi indeterminata, quindi le equazioni e disequazioni di 1° e 2° grado, e infine le nozioni relative allo studio delle funzioni (limiti, continuità, forme indeterminate, massimi e minimi). Quest'ordine ci sembra preferibile anche dal punto di vista didattico, tenuto conto della difficoltà relativa dei varî Capitoli, e delle cognizioni che presuppongono nel lettore.

L'opera si divide in 7 capitoli.

Il 1° Capitolo: *Elementi di analisi combinatoria*, tratta: delle disposizioni, permutazioni, inversioni nelle permutazioni, e sostituzioni (§ 1°);

delle Combinazioni semplici (§ 2°) e con ripetizione (§ 3°); del prodotto di n fattori binomî e della potenza n^{ma} del binomio con n intero e positivo (§ 4°); della potenza intera e positiva di un polinomio (§ 5°) e termina con Cenni sulle Probabilità (§ 6°). Le dimostrazioni sono brevi, facili per quanto è possibile, rigorose; tuttavia ci sembra utile notare qualche svista e qualche imprecisione di linguaggio che nuoce talvolta alla chiarezza.

Così a pag. 33 invece di $\sum_1^n (2n-1)(2n+1) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

deve essere:

$$\sum_1^n (2n-1)(2n+1) = \frac{4n^3+6n^2-n}{3};$$

L'enunciato dell'esercizio 2° a pag. 45 non è esatto; doveva dirsi: Si hanno due urne, in una vi sono i numeri da 0 a 90, nell'altra i numeri 10, 20, 30... 90; qual'è la probabilità di fare 72 estraendo un numero dall'una e uno dall'altra?

Così a pag. 46, n. 43, era bene dire: La probabilità che l'evento si verifichi in uno determinato (p. es. nel 1°) di n tentativi e non succeda negli altri è pq^{n-1} ecc.

A pag. 47 avendo chiamato, nella probabilità a posteriori, p_i la probabilità che verificatasi la causa C_i ne segua l'avvenimento A, ω_i indicherà non la probabilità che la C_i faccia effettuare l'avvenimento A, ma la probabilità che si verifichi la causa C_i stessa.

Sono piccolezze, ma niente bisogna trascurare per la chiarezza di un libro di testo, specialmente in un argomento così delicato come le nozioni sulla probabilità. A pag. 54 n. 49, non si capisce affatto perchè se « P_i è la probabilità a posteriori della causa e_i per produrre l'avvenimento osservato A ed l_i la probabilità che questa causa possa produrre l'avvenimento futuro B della identica natura di A, e se l'avvenimento B può essere prodotto indifferentemente dalle cause C_1 C_2... C_n, si abbia per la probabilità totale dell'avvenimento B: $P = P_1 l_1 + P_2 l_2 + ... + P_n l_n$ ». Forse l_i deve rappresentare la probabilità che si effettui la causa C_i stessa.

Il Capitolo 2° tratta delle *Frazioni continue*; e in esso sono notevoli le applicazioni allo sviluppo in frazione continua di π, e al calcolo dei giorni che si debbono intercalare in un certo numero di anni perchè l'anno civile coincida coll'anno tropico.

Il Capitolo 3° tratta dell'*Analisi indeterminata di 1° grado.*

In esso l'A. espone il metodo di Eulero e il metodo di Lagrange per determinare una (e quindi infinite) soluzioni intere di un'equazione a due incognite, fa la ricerca delle soluzioni intere e positive (§ 1°), tratta delle soluzioni intere e intere e positive di m equazioni fra $m+1$ incognite (§ 2°); dopo aver considerato l'equazione con 3 incognite, passa

al caso generale di un' equazione con più di due incognite (§ 3°) e di m equazioni con $m+h$ incognite (§ 4°). Chiude il Capitolo la risoluzione dell' equazione Pitagorica (§ 5°).

L' esempio 1° a pag. 121 si poteva risolver più semplicemente ponendo:

$110x_3-27x_2=2(17-6x_1)$, donde, poichè una soluzione di $110x_3-27x_2=2$ è $x_3=1$, $x_2=4$, si ha:

$x_1=x_1$; $x_2=68-24x_1+110t_1$; $x_3=17-6x_1+27t_1$; $x_4=162-57x_1+$ $+257t_1$, $x_5=37-13x_1+59t_1$. Lo stesso si dica dell' esempio 2°.

Per la chiarezza della dimostrazione del n. 30 a pag. 127 era bene dire: *Supponiamo che* x, *invece che dispari come nel metodo di Euclide, sia pari, allora si può porre:* $z+y=2^m u^2$, $z-y=2^n v^2$ donde: $x=2^{k+1}u.v$,

$$\begin{cases} y=4^k u^2-v^2 \\ y=u^2-4^k v^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=4^k u^2+v^2 \\ z=u^2+4^k v^2, \end{cases}$$

e scambiando x con y, x viene necessariamente dispari, donde si ricade nelle soluzioni di Euclide.

Nel Capitolo 4°: *Disequazioni e sistemi di disequazioni*, dopo alcuni teoremi generali (§ 1°), si tratta della risoluzione di disequazioni di 1° grado ad un' incognita (§ 2°), di disequazioni di 2° grado ad una sola incognita (§ 3°), e delle disequazioni razionali (§ 4°).

A pag. 144, 145 e 148 dove dice soluzioni *comuni* ai due sistemi di disequazioni, bisogna sempre cancellare la parola *comuni*.

Il Capitolo 5° contiene la *discussione di equazioni e di problemi di 2° grado*. Nelle discussioni di equazioni contenenti un parametro (§ 1°) si vale opportunamente della rappresentazione dei numeri reali mediante punti di una retta. Nel fare il confronto delle radici delle equazioni con uno o due numeri dati (§ 2°), l' A. espone la discussione nota col nome del Tartinville, ma omette a ragione le tavole sinottiche, perchè ritiene che l' uso di queste nella discussione delle equazioni « sopprima l' elasticità del pensiero dell' alunno, e lo immiserisca in un' unica via molto pedestre ». Nel § 3°, *discussioni di problemi di 2° grado* sono risolti e discussi 10 problemi di 2° grado a 1, 2, 3 incognite, di cui varî già assegnati come temi per la licenza d' Istituto tecnico.

Notiamo che a pag. 164 riga 16, invece di

$$(k-1)f(-1)=(k-1(4k+6)>o,$$

deve dire: $(k-1)f(-1)>o$ quindi $(k-1)(4k+6)<o$.

A pag. 170 ci sembra che per $b<2a$ il problema invece di essere impossibile, sia soddisfatto per tutti i valori di r.

A pag. 190 riga 19 deve essere: $\dfrac{s}{l}\leq\dfrac{k+1}{2\sqrt{k^2+k+1}}$.

Capitolo 6° — *Funzioni finite e continue, tendenze al limite, forme indeterminate.*

Dopo aver definito il limite superiore e inferiore di una funzione in un dato intervallo e dimostrato, che una funzione finita ammette tali limiti, l'A. passa a definire il limite di una variabile indipendente e il limite di una funzione col tendere della variabile, a un limite determinato. Definisce quindi le funzioni continue in un punto, o solo a destra, o solo a sinistra, e continue, in un intervallo, e dimostra i principali teoremi relativi a queste funzioni. Passa infine a trattare del valore delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty, \times 0$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, valore determinabile colla teoria dei limiti.

La dimostrazione del n. 19 a pag. 211 si fonda (e non sarebbe male dirlo) sul terema 4° del numero 9. La dimostrazione si potrebbe anche sostituire con quest'altra forse più soddisfacente: Se $f(x) = \sqrt[m]{\phi(x)}$,

$$[f(x)]^m = \phi(x)\ ,\ \lim_{x=a} [f(x)]^m = \lim_{x=a} \phi(x) = \phi(a), \text{ ma}$$

$$\lim_{x=a} [f(x)]^m = \left[\lim_{x=a} f(x)\right]^m \quad \text{onde} \quad \lim_{x=a} f(x) = \sqrt[m]{\phi(a)} \quad \text{c. v. d.}$$

Capitolo 7° — *Massimi e minimi — Discussione delle funzioni.*

Dopo aver definito le funzioni crescenti, decrescenti e costanti a destra e a sinistra di un punto a e in un dato intervallo, passa a considerare il rapporto incrementale e la derivata prima di una funzione e dimostra i criterî basati sul segno di questa derivata per giudicare se la funzione è crescente o decrescente. Definisce quindi i massimi e i minimi di una funzione, dimostra che in essi la derivata si annulla, e passa ad esporre la regola di Fermat-Monforte per la ricerca dei massimi e minimi. Questa regola, di cui sarebbe utile una dimostrazione più ampia, presenta sui metodi ordinarî (metodo della funzione inversa, dei moltiplicatori indeterminati ecc.) i vantaggi di essere più semplice, più generale, ed estensibile al caso di funzione di più variabili; ma il principio su cui si basa non è sempre giusto, perchè non sempre basta considerare la derivata prima.

Essa consiste in fondo nel cercare la derivata prima della funzione e nel risolvere l'equazione che risulta uguagliandola a zero. Le radici sono in generale i valori della variabile che rendono massima o minima la funzione. Dal segno della derivata nel loro intorno si può decidere se si tratta di un massimo o di un minimo, o se manca massimo e minimo.

Il caso della funzione di più variabili si riconduce al precedente, supponendo nella funzione stessa variabile una per volta ciascuna delle variabili e applicando ogni volta la regola di Fermat-Monforte. Si avranno tante equazioni quante sono le variabili e le soluzioni del sistema rappresentano in generale i gruppi di valori che fanno divenire massima o minima la funzione.

Dopo aver applicato la regola alla discussione delle funzioni $y = ax^2 + bx + c$; $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, passa a risolvere e discutere 21 problemi interessanti di massimo e minimo.

Di questi alcuni corrispondono ai noti teoremi relativi al massimo di un prodotto di due o più variabili di cui la somma sia costante ecc., che ricevono pronta applicazione in tante questioni geometriche: altri si riferiscono al cammino dei raggi riflessi e rifratti.

Chiude il Capitolo la discussione, seguita da varî esempi, delle funzioni fratte della forma: $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$, $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, discussione accompagnata da opportuni diagrammi.

Chiude il Volume un'*appendice*, che contiene, « solo per comodità dei miei alunni » (dice l'A. nella prefazione), brevi cenni sulle sezioni coniche, argomento di geometria prescritto per la 4ª classe della sezione fisico-matematica.

Le osservazioni che abbiamo potuto fare in seguito a una lettura attenta e scrupolosa del libro, non tolgono niente al valore effettivo di questo, che raccomandiamo caldamente ai colleghi, che insegnano nel 2° biennio degli Istituti tecnici come efficacissimo aiuto per il loro insegnamento.

Le mende notate, si riferiscono, come ognuno può giudicare a particolari trascurabili, e l'A. se vuole, le può correggere insieme a varî errori di stampa, anche senza aspettare una nuova edizione coll'aggiungere alla presente una errata-corrige; esse, ci piace ripetere, non infirmano affatto il metodo generale di trattazione tenuto dall'A. Una parola speciale di lode, meritano gli esempi e gli esercizî numerosi, bene scelti, interessanti, e le note storiche che l'A. ha parcamente disseminato per il volume.

A. NATUCCI

Una doverosa dichiarazione. — *Riguardo al metodo che il prof. Natucci ha denominato « Russell-Cipolla » nella sua recensione al libro di Aritmetica del prof. Amodeo (cfr. n. 5-6-7-8 p. 196), è doveroso ricordare i lavori del nostro valoroso collaboratore prof. Bindoni, di molto anteriori a quelli del Cipolla, e nei quali già fu data una definizione nominale di numero reale, da cui non differisce, sostanzialmente, quella data in appresso dal prof. Cipolla.*

LA DIREZIONE

ERRATA-CORRIGE [1]

A pagina 202, linee 15-16-17-18:

al luogo delle parole « andrebbero integrate .... al modo stesso dai lati omologhi ».

si legga:

« andrebbero integrati con l'aggiunta di quelle considerazioni sul *verso*
« delle figure, che sono necessarie ad evitare da parte del lettore inter-
« pretazioni non conformi alla verità e al pensiero dell'A. ».

---

[1] **N. d. D.** — Per un disguido di bozze, non fu eseguita tale variazione che già era stata indicata dal prof. **Ettore Trevisani** nella sua recensione dell'opera del prof. Frattini.

ALBERTO CONTI: *Direttore Responsabile.*

INDICE DELL' ANNO X

Articoli generali d'indole scientifico-didattica.

Programmi e relative proposte di riforma.

Piccole Note.

Corrispondenza.

Varietà

Rubrica dei Congressi.

Rassegna Bibliografica.

Necrologia.

Rubrica " fuori testo ,,

44. I 6 piani condotti per ciascuno spigolo d'un tetraedro al punto medio dello spigolo opposto passano per un medesimo punto.

45. Se pel vertice d'un triedro si conduce una retta, i piani condotti per essa e per ciascuno spigolo dividono la faccia opposta in due angoli: fra i sei angoli così determinati sussiste la relazione che il prodotto dei seni di tre non consecutivi è uguale al prodotto dei seni dei rimanenti tre.

46. $(x-1)^{2n} - x^{2n} + 2x - 1$ è divisibile per $2x^3 - 3x^2 + x$.

47. $(x+1)^{6n\pm1} - x^{6n\pm1} - 1$ è divisibile per $x^2 + x + 1$.

48. I tre lati d'un triangolo sono le radici dell'equazione $x^3 - 2px^2 + qx - r = o$; ricavare l'equazione che abbia per radici i quadrati delle tre mediane.

49. I tre lati d'un triangolo sono le radici dell'equazione $x^3 - 2px^2 + qx - r = o$; esprimere per mezzo dei coefficienti l'area del triangolo, e il raggio del circolo circoscritto.

50. I quattro lati d'un quadrilatero iscrittibile sono le radici dell'equazione $x^4 - 2px^3 + qx^2 - rx + s = o$; esprimere per mezzo dei coefficienti l'area e il raggio del circolo circoscritto.

NOTIZIE VARIE

Sui concorsi a cattedre di matematica di Scuole Medie

Concorso per i Licei e Istituti tecnici. — Gli atti relativi sono stati approvati dalla Sezione della Giunta del C. S. della P. I. per l'Istruzione Media. Il Ministero, accogliendo i voti manifestatigli da più parti, ed anche da queste colonne, ha proceduto subito alle nomine in modo che il 1 gennaio 1912 i vincitori fossero già alle rispettive cattedre. Però nel fare queste nomine, si è voluto saltare, per quest'anno, coloro che ebbero.... la mala ventura di riuscire vincitori anche nel Concorso per le Scuole Normali e d'aver già accettato una Cattedra di Scuole Normali. Si volle perciò appoggiarsi sul 1° comma dell'art. 28 dell'ultimo regolamento (approvato con R. Dec. n. 1104 in data 31 agosto 1911). Ma a noi sembra che tale articolo sia applicabile soltanto quando la qualifica di *vincitore* in più concorsi abbia *un valore ufficiale*, ossia soltanto dopo che siano stati *tutti* approvati gli atti di questi concorsi dalla Giunta del C. S. e tutti resi esecutivi dal Ministro. Invece i vincitori del Concorso per le Scuole Normali, quando hanno accettato le cattedre loro offerte *non sapevano* (ufficialmente, cioè legalmente parlando) d'esser vincitori anche del Concorso pei Licei, i cui Atti non erano stati ancora approvati e tanto meno resi esecutivi. Gli

interessati dunque non se ne stiano: un anno di meno d'anzianità nei Licei o Istituti tecnici, anche se fatto in Scuole di pari grado come le Scuole normali, può avere varie conseguenze non favorevoli per chi precede nella graduatoria a coloro che sono stati subito nominati!

È poi curioso come le *ragioni didattiche* e *legali* dietro alle quali si trincera il Ministero, portano a questo resultato: *insegnanti senza la cattedra vinta*, e *cattedre senza insegnanti*. Infatti gli ultimi fra i vincitori del Concorso per le Scuole Normali non hanno posto, essendo forzatamente trattenuti alle Scuole Normali i vincitori delle Normali e dei Licei o Istituti tecnici, mentre tutti i posti vacanti di Liceo e d'Istituto tecnico non sono coperti, perchè la graduatoria dei vincitori di questi posti viene mutilata dall'applicazione « molto libera » del predetto art. 28 del Regolamento.

Concorso per gli Istituti Nautici. — Si è adunata il 16 dicembre la Commissione giudicatrice per procedere alle prove orali, ed ultimare i propri lavori.

Dei 12 ammessi alle prove orali si presentarono 8 soltanto, ed eccone la graduatoria definitiva.

Vincitori: 1. Cecioni - 2. Teofilato - 3. Ascoli - 4. Cherubino - 5. Gennari - 6. Rovetti.

Idonei: 1. Ceccherini - 2. Beggi.

Concorsi speciali. — La presentazione dei titoli per partecipare a tali concorsi è stata prorogata fino al 31 gennaio 1912.

Commissioni giudicatrici. — Secondo la votazione avvenuta il 25 aprile 1911, la maggioranza dei membri delle Commissioni giudicatrici dei Concorsi speciali banditi con avviso del 31 ottobre scorso, dovrà essere scelta, per la matematica, fra i 10 professori universitari che seguono, nell'ordine dei voti ottenuti:

Torelli Gabriele — Berzolari Luigi — Marcolongo Roberto — Pincherle Salvatore — Lauricella Giuseppe — Arzelà Cesare — Veronese Giuseppe — Pascal Ernesto — Montesano Domenico — Nicoletti Onorato.

NOMINE E DISTINZIONI VARIE

Il prof **Generoso Gallucci** del R Liceo Genovesi di Napoli ha vinto il premio di L. 1000 della R. Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, sul tema: « *La teoria delle configurazioni geometriche in rapporto a quella delle sostituzioni* ».

Per l'Anno 1912

(Annata XI del Bollettino di Matematica)

Pel nuovo anno, la Direzione non sta ad inviare una speciale Circolare, e si limita ad annunziare che nei primi numeri della nuova annata compariranno gli articoli di cui seguono i titoli, di alcuni dei quali la Direzione ebbe già formale promessa, mentre della maggior parte sono presso di essa i rispettivi manoscritti, che, per assoluta insufficienza di spazio, non poterono essere ancora pubblicati. La Direzione rinnova sentiti ringraziamenti ai valorosi e cortesi Collaboratori, ai Soci e ai Lettori tutti, ai quali da queste colonne, nell'impossibilità di farlo per tutti singolarmente, invia i più fervidi auguri pel nuovo anno.

R. Marcolongo - Sulle nuove disposizioni pei concorsi.
F. Palatini - Sul principio di De Zolt per i poligoni.
» » - Sul principio di De Zolt per i poliedri.
D. Gambioli - Sul triangolo ortico e su uno speciale trapezio.
S. Composto - Sulla funzione $\varphi(n)$ e sui numeri primi con un dato numero n.
Teresa Magnani - Una condizione necessaria e sufficiente affinchè un poligono convesso di n lati sia circoscrittibile ad una circonferenza.
S. Minetola - Le ripartizioni semplici.
L. Galvani - Addizione alla Nota « Una semplice proprietà delle serie di potenze ».
A. Bindoni - Sulla classificazione delle isomerie.
» » - Sulle definizioni per astrazione mediante classi.
T. Rietti - Sui poligoni regolari inscritti in altri poligoni regolari.
E. Piccioli - Il teorema di Pitagora ed i suoi corollari estesi all'n-edro lineare di S_{n-1}.
O. Garrone - Sulla regola di Ruffini a due operatori.
R. La Marca - Legge delle opposizioni.
C, Leoni - Osservazioni sui principî della geometria esposti secondo il trattato del Faifofer.
P. Buffa - Una questione di metodo.

L'insegnamento *della matematica nel R. Istituto Industriale di Fermo.*

Recensioni delle opere di matematica elementare e di matematica superiore più recenti, pervenute alla Direzione *in duplice copia.*

Quesiti proposti nelle discussioni orali ai concorrenti di cattedre di matematica di Scuole medie *e svolgimento di alcuni fra questi*

☞ **Durante il 1912 la Direzione avrà cura di pubblicare più regolarmente il " Bollettino ,,, e di evitare fascicoli con più di due numeri riuniti.**

Quote d'abbonamento pel 1912

La quota d'abbonamento al « Bollettino di Matematica » per l'anno 1912 è di L. 6,50 per l'Italia (L. 7,50 per l'Estero) e deve essere versata entro gennaio possibilmente, ed in ogni caso, non più tardi della fine di febbraio. Entro questo termine, tutti i Soci del 1911 e i nuovi Soci riceveranno copia del primo fascicolo della nuova annata.

Coloro che già erano associati anche al *Bollettino di Matematiche e di Scienze Fisiche e Naturali* (Giornale per la coltura dei Maestri elementari e degli Alunni delle Scuole Normali) e che intendono confermarne l'abbonamento, qualora già non l'abbiano fatto, sono pregati di inviare la relativa quota di L. 2, **non più al nostro indirizzo, ma al Prof. LUIGI TENCA** (*Via XX Settembre, 47 - LODI*), il quale, in seguito a nostra preghiera, ha assunto interamente la Direzione e l'Amministrazione del predetto « Bollettino di Matematiche e Scienze Fisiche e Naturali ».

Finito di stampare il giorno 2 gennaio 1912.

I nuovi programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole classiche.

Con R. D. 28 settembre 1911 n. 1162 pubblicato nella *Gazzetta Ufficiale* del 7 novembre 1911, è stata soppressa la facoltà di opzione fra lo studio del greco e quello della matematica di cui all'art. 3 del R. D. 11 novembre 1904 n. 657, e con lo stesso decreto sono stati approvati i programmi che seguono, *non accompagnati da speciali istruzioni sullo svolgimento dei programmi stessi.*

Classe quarta — Ginnasiale (ore due settimanali).

Aritmetica razionale.

Le principali proprietà relative alle prime cinque operazioni sui numeri interi. Criteri di divisibilità per 2 o per 5, per 4 o per 25, per 3 o per 9, massimo comune divisore. Numeri primi tra loro. Minimo comune multiplo.

Geometria.

Rette e piani. Segmenti ed angoli. Rette perpendicolari. Triangoli. Loro proprietà e casi d'uguaglianza. Poligoni. Rette parallele. Somma degli angoli interni di un triangolo e di un poligono convesso. Parallelogrammi e trapezi.

Classe quinta — Ginnasiale (ore due settimanali).

Aritmetica razionale.

Frazioni e loro proprietà. Le principali proprietà relative alle prime cinque operazioni sulle frazioni. Riassunto delle proprietà delle operazioni tra numeri razionali assoluti. Numeri decimali. Trasformazione esatta od approssimata di una frazione ordinaria in numero decimale. Proporzioni numeriche.

Geometria.

Luoghi geometrici. Circonferenza e sue proprietà. Posizioni relative di una retta e di una circonferenza. Proprietà degli archi, delle corde e degli angoli al centro. Angoli alla circonferenza. Tangenti uscenti da un punto esterno. Posizioni relative di due circonferenze. Circonferenza inscritta o circoscritta ad un triangolo. Problemi grafici elementari relativi ai segmenti, agli angoli ed ai triangoli. Problemi e luoghi geometrici relativi alla circonferenza. Poligoni regolari. Quadrangolo, esagono, triangolo regolari inscritti in una circonferenza.

Classe prima — Liceale (ore quattro settimanali).

Algebra

Teoria dei numeri razionali col segno ed operazioni relative. Calcolo letterale. Equazioni in genere. Equazioni di primo grado ad una incognita. Sistemi di due equazioni di primo grado a due incognite. Brevi cenni sui sistemi di primo grado a tre e più incognite. Problemi di primo grado. Progressioni aritmetiche e geometriche.

Geometria.

Principali teoremi e problemi sull'equivalenza dei poligoni. Proporzioni fra grandezze geometriche e loro più semplici proprietà. Triangoli e poligoni simili ed applicazioni relative. Decagono e pentagono regolari inscritti in una circonferenza.

Rette e piani nello spazio. Angoli diedri. Rette e piani perpendicolari. Rette e piani paralleli. Proiezioni, angoli e distanze. Triedri e loro casi di uguaglianza. Angoloidi. Prismi e piramidi. Poliedri in genere. Cenni sui poliedri regolari.

Classe seconda — Liceale (ore tre settimanali).

Algebra.

Numeri reali e cenni sulle operazioni ad essi relative. Radicali ed operazioni su di essi. Equazioni di secondo grado ad un'incognita. Somma e prodotto delle radici. Equazioni biquadratiche. Sistemi di equazioni di grado superiore al primo nei casi più semplici. Equazioni frazionarie ed irrazionali.

Geometria.

Grandezze commensurabili ed incommensurabili. Teoria della misura e sue applicazioni, ai segmenti, agli angoli, ai poligoni ed alla circonferenza.

Principali teoremi e problemi sull'equivalenza e la similitudine dei poliedri. Superfici e volumi dei prismi e delle piramidi. Cilindro, cono e sfera. Aree e volumi relativi. Applicazioni dell'algebra alla geometria.

Classe terza — Liceale (ore due settimanali).

Aritmetica.

Teoria dei numeri primi e sue più semplici applicazioni.

Algebra.

Potenze con esponente razionale. Potenze con esponente reale. Equazione esponenziale. Logaritmi. Uso delle tavole.

Trigonometria.

Funzioni circolari e loro principali proprietà. Formule per l'addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione degli archi. Logaritmi delle funzioni circolari. Risoluzione dei triangoli rettilinei ed applicazioni.

Osservazione.

Nell'anno scolastico 1911-912 non si svilupperanno nella seconda classe liceale i primi due numeri dell'attuale programma di geometria e per la terza liceale si manterrà interamente il vecchio programma di matematica.

Concorso a premi ministeriali riservato a insegnanti di scuole medie, governative o pareggiate.

È aperto un concorso a cinque premi di L. 2000 ciascuno, due dei quali da conferirsi ai migliori lavori su argomenti di scienze matematiche, due ai migliori lavori su argomenti attinenti alla storia civile e alle discipline ausiliarie ed uno al miglior lavoro di argomento didattico o di metodologia dell'insegnamento medio.

Possono partecipare al concorso gli insegnanti di ruolo appartenenti a scuole medie, governative o pareggiate.

Le domande d'ammissione al concorso, scritte in carta da bollo da L. 1 devono esser presentate insieme con i lavori al Ministero della P. I. (Segretariato generale) non più tardi del 31 dicembre 1912.

SOMMARIO:

Ricevuta delle quote *(sulla terza pagina della copertina).*

da tutti i lettori domande intorno a qualsiasi argomento compreso nel programma del periodico, e che accoglierà altresì le risposte via via date alle dette domande dai lettori medesimi o dalla Direzione.

La quota d'abbonamento è di L. 6,50 per l'Italia (L. 7,50 per l'Estero).

L'abbonamento può esser preso in qualunque momento dell'anno, ma termina coll'anno stesso; e la Direzione non garantisce di potere inviare tutti i numeri dell'annata a partire dal primo, a coloro che assumono l'abbonamento dopo il febbraio.

L'ammontare della quota d'abbonamento dev'essere pagato in una sola volta e anticipatamente.

La ricevuta delle quote vien data sulla copertina del *Bollettino*, a meno che non si tratti di Enti, (Istituti, Comuni, Biblioteche ecc.) che ne facciano speciale richiesta.

I fascicoli del " BOLLETTINO DI MATEMATICA „ portano la numerazione, d'anno in anno, da 1 a 12, ma escono di regola ogni due mesi. La Direzione si riserva il diritto di raccogliere in un sol fascicolo due o più numeri, all'intento di dare un proporzionato sviluppo a tutte le principali rubriche. In ogni caso l'annata comprende almeno 20 fogli (di 16 pagine ciascuno) di testo e 24 pagine almeno di copertina colorata interna,

---

AVVERTENZA PEI NUOVI SOCI

Non è più disponibile alcuna collezione completa, essendo esaurita l'annata II e l'annata VII. Sono però disponibili alcune copie (*ben poche ormai*) delle annate I, III, IV, V, VI, VIII, IX e X a prezzi da convenirsi, di volta in volta, a seconda della richiesta.

ESTRATTI

Per gli estratti dei loro articoli, gli Autori devono farne l'ordinazione direttamente alla *Tipografia Cuppini* (*Bologna, Via Castiglione 8*), e non più tardi del giorno in cui essi hanno rispedito le bozze.

Sul principio di De Zolt per i poligoni

FRANCESCO PALATINI (Torino)

La lettura dell'articolo del prof. Natucci pubblicato nel fascicolo 1-4 anno X di questo *Bollettino* m' ha indotto ad esumare alcune note scritte parecchi anni fa per uso mio personale. Nel rileggerle trovo che per la loro semplicità possono interessare i Colleghi che si occupano dei fondamenti della geometria e credo quindi non inutile di pubblicarle.

1. Definizione. — Dato un triangolo ABC ed un segmento l, si consideri il segmento x tale da essere

$$l : h_a = a : x \qquad (1)$$

Confrontando con questa le proporzioni

$$h_b : h_a = a : b \quad , \quad h_c : h_a = a : c$$

avremo anche

$$l : h_b = b : x \quad (2) \quad , \quad l : h_c = c : x. \qquad (3)$$

Chiameremo il segmento x definito da una qualunque delle relazioni (1), (2), (3) *segmento associato al triangolo* ABC *rispetto al segmento* l. Nel seguito quando si dirà segmento associato ad un triangolo, s' intenderà sempre rispetto ad un segmento l fissato una volta per tutte.

Corollario. — *Il segmento associato ad un triangolo non è mai nullo.*

Teorema I. — *Se sono eguali i segmenti associati a due triangoli* ABC, A'B'C' *rispetto ad un segmento* l, *lo sono anche i segmenti associati ai medesimi rispetto ad un altro segmento* m.

Difatti indicando con x, x' i due primi segmenti associati e con y, y' i due secondi, si ha per ipotesi

$$l : h_a = a : x \qquad l : h_{a'} = a' : x'$$

$$m : h_a = a : y \qquad m : h_{a'} = a' : y'$$

donde

$$l : m = y : x \qquad l : m = y' : x'$$

$$y : x = y' : x'$$

e perciò se è $x = x'$, sarà anche $y = y'$.

2. *Se un triangolo* ABC *si divide in parti con segmenti uscenti da un vertice* A *e terminanti al lato opposto* a, *il segmento associato al triangolo* ABC *è uguale alla somma dei segmenti associati alle parti.*

Se sono m_1, m_2,... le parti in cui viene diviso a, a partire da B, mediante i punti M_1, M_2,... estremi dei considerati segmenti uscenti da A, ed x, x_1, x_2,... i segmenti associati ad ABC, ABM_1, AM_1M_2,... rispetto ad un dato segmento l, si ha (def.)

$$l : h_a = m_1 : x_1 = m_2 : x_2 = \ldots = a : x,$$

donde

$$m_1 + m_2 + \ldots : x_1 + x_2 + \ldots = a : x$$

e perciò essendo $m_1 + m_2 + \ldots = a$, sarà anche $x = x_1 + x_2 + \ldots$

Teorema II. — *Se un triangolo* ABC *è diviso in triangoli mediante segmenti aventi gli estremi su due lati* AB, AC *e non intrecciantisi* [1], *la somma dei segmenti associati a questi triangoli è uguale al segmento associato ad* ABC.

Fra gli estremi dei segmenti considerati nell' ipotesi deve esservi uno dei vertici B, C, altrimenti la parte adiacente al

---

[1] Cioè mediante i lati di una spezzata a zig-zag coi vertici sui lati AB, AC e mediante altri eventuali segmenti uscenti dai vertici di questa spezzata ed interni agli angoli della medesima.

lato BC sarebbe quadrangolare, e nessuno di detti segmenti ha un estremo in A. Prendiamo una divisione che soddisfi all'ipotesi del teorema e determinata da $n+1$ segmenti. Allora togliendo quello di questi segmenti che è più prossimo ad A, rimane una divisione che soddisfa pure all'ipotesi del teorema e determinata da n segmenti. Ma quel segmento divide il triangolo di quest'ultima divisione, che ha il vertice in A, in due, i cui segmenti associati danno una somma (t. I) eguale al segmento associato al triangolo stesso. Dopo ciò risulta subito che la somma dei segmenti associati ai triangoli ottenuti con gli $n+1$ segmenti è uguale alla somma dei segmenti associati ai triangoli ottenuti con gli n segmenti, e perciò se questa è uguale al segmento associato ad ABC, lo è anche quella; quindi se il teorema vale per il caso di n segmenti, vale anche per quello di $n+1$. Ma il teorema è vero (t. I) per il caso di una divisione fatta con un solo segmento e perciò esso rimane dimostrato.

Teorema III. — *Se un triangolo* ABC *si scompone in triangoli in qualsiasi modo, la somma dei segmenti a questi associati è uguale al segmento associato ad* ABC.

Si conducano le rette determinate dal vertice A coi vertici dei triangoli T della divisione data, e siano, a partire da B, ordinatamente C_1, C_2,... i punti d'incontro di esse con BC. Se uno dei triangoli T è diviso da una o più di tali rette in parti non tutte triangolari, si divida ciascun quadrangolo con una sua diagonale, e avremo così ABC diviso in un certo numero di triangoli che chiameremo U. Se è MNP uno dei triangoli T, una sola delle rette AM, AN, AP lo può attraversare, sia p. e. la AM, e sia Q il suo punto d'incontro con NP. Allora chiamando U_1 i triangoli U appartenenti ad MNP ed U'_1, U''_1 quelli di questi che appartengono rispettivamente ad MNQ, MPQ, siccome internamente al lato QM non si trovano vertici di U'_1, U''_1, avremo che la somma dei segmenti associati agli U_1 è uguale alla somma dei segmenti associati agli U'_1 più quella dei segmenti associati agli U'_2, il che è uguale (per il teor. II che comprende anche il I) alla somma dei segmenti associati ad MNQ, MPQ, e questa (t I) è uguale al segmento associato ad MNP. Se ne conclude che *la somma dei segmenti associati ai triangoli* T *è uguale a quella dei segmenti associati ai triangoli* U. Ma anche i triangoli U che com-

pongono ciascuno dei triangoli ABC_1, $AC_1C_2, \ldots$ si trovano nelle condizioni del teor. II, perciò la somma dei segmenti associati ai triangoli U che compongono ABC_1 è uguale al segmento associato a quest' ultimo triangolo, e così dicasi per AC_1C_2 ecc.; se ne conclude che *la somma dei segmenti associati ai triangoli* U *è uguale a quella dei segmenti associati ai triangoli* ABC_1 $AC_1C_2, \ldots$, *la quale per il teor. I è uguale al segmento associato ad* ABC. Dalle due ultime conclusioni segue che la somma dei segmenti associati ai triangoli T è uguale al segmento associato ad ABC.

3. Teorema. — *Se un poligono è diviso in un certo modo in triangoli* T *ed in un altro modo in triangoli* T′, *la somma dei segmenti associati ai primi è uguale a quella dei segmenti associati ai secondi.*

Considerando insieme i segmenti che determinano le due divisioni, essi dividono il poligono dato in poligoni che divideremo (quelli che non sono già triangoli) in triangoli, ed otterremo così una nuova divisione del poligono dato in triangoli che chiameremo U. Allora ogni T ed ogni T' o è un triangolo U o una somma di triangoli U, cosicchè (n. 2, t. III) la somma dei segmenti associati ai triangoli T e quella dei segmenti associati ai triangoli T' sono entrambi eguali alla somma dei segmenti associati ai triangoli U, e perciò eguali fra loro.

Definizione. — Dicesi *segmento associato ad un poligono* quel segmento che è somma dei segmenti associati ai triangoli che si ottengono dividendo in qualsiasi modo il poligono dato in triangoli,

Corollario I. — *Il segmento associato a un poligono non è mai nullo.*

Corollario II. — *Se un poligono* P *è somma di due o più poligoni* P′, P″, …, *il segmento associato al primo è uguale alla somma dei segmenti associati agli altri.*

Basta dividere P', $P'', \ldots$ in triangoli, con che anche P risulta diviso in triangoli, e applicare la definizione precedente.

Segue da questo corollario che *il segmento associato ad un poligono è maggiore di quello associato ad una sua parte poligonale.*

Teorema II. — *Non è possibile dividere un poligono* P *ed una sua parte poligonale* P′ *in un egual numero di poligoni rispettivamente eguali.*

Difatti se ciò fosse possibile, i segmenti associati a P, P'

sarebbero (cor. II) eguali, il che è contrario all'ultima conclusione cui siamo pervenuti.

Osservazione. — Come si vede, in questa forma i teoremi dimostrati nella presente Nota possono trovar posto in un testo di geometria per le nostre scuole medie, non offrendo difficoltà maggiori di quelle presentate da tanti altri teoremi che pur fanno parte del nostro insegnamento.

Sul principio di De Zolt per i poliedri

FRANCESCO PALATINI (Torino)

Facendo seguito al mio precedente articolo « Sul principio di De Zolt per i poligoni » mi propongo di dare alla dimostrazione del principio di De Zolt per i poliedri una forma che sia accessibile alla intelligenza degli studenti delle nostre scuole medie superiori. Il lettore è pregato di farsi le figure.

1. Definizione. — Dato un tetraedro $ABCD$ e fissato un segmento l, si prenda il segmento x_d associato al triangolo ABC rispetto ad l, e si consideri poi il segmento y tale da essere (indicheremo con H_a, H_b, H_c, H_d le altezze del tetraedro uscenti rispettivamente dai vertici A, B, C, D)

$$l : H_d = x_d : y. \tag{1}$$

Indicando con h_{dc} l'altezza CQ del triangolo ABC relativa al lato AB e con h_{cd} l'altezza DP di ABD pure relativa al lato AB, dico che è

$$H_d : H_c = h_{cd} : h_{dc} \ (\alpha).$$

Difatti ciò deriva dall'essere fra loro equiangoli i triangoli DNP, CMQ, dove N ed M sono i piedi delle altezze H_d, H_c. Ora indicando con x_c il segmento associato al triangolo ABD rispetto ad l, si ha per definizione (articolo citato)

$$l : h_{cd} = AB : x_c \ , \ l : h_{dc} = AB : x_d$$

donde $h_{cd} : h_{dc} = x_c : x_d$, la quale con la ($\alpha$) dà $H_c : H_d = x_d : x_c$, che con la (1) dà

$$l : H_c = x_c : y. \qquad (2)$$

Analogamente avremo

$$l : H_b = x_b : y \quad (3) \qquad l : H_a = x_a : y \qquad (4)$$

indicando con x_b, x_a i segmenti associati rispetto ad l ai triangoli ACD, BCD.

Chiameremo il segmento y definito dall'una o dall'altra delle (1), (2), (3), (4) *segmento associato al tetraedro* ABCD *rispetto al segmento* l.

Corollario I. — *Se due tetraedri hanno segmenti associati eguali rispetto ad un segmento* l, *essi hanno segmenti associati eguali rispetto ad un altro segmento* l'. Si dimostra come la proposizione analoga di planimetria (art. citato).

Corollario II. — *Il segmento associato ad un dato tetraedro rispetto ad un dato segmento non è mai nullo.*

Osservazione. — Nel seguito quando si dirà segmento associato ad un dato tetraedro s'intenderà rispetto ad un dato segmento fissato una volta per sempre.

2. Teorema I. — *In qualunque modo si divida un tetraedro* ABCD *in tetraedri aventi il vertice in un vertice* A *e la base nella faccia opposta* BCD, *la somma dei segmenti associati ad essi è uguale al segmento associato ad* ABCD.

Infatti le basi di tali tetraedri costituiscono una divisione di BCD in triangoli T_1, $T_2, \ldots$, T_n; siano x_1, $x_2, \ldots$, x_n i segmenti associati a questi triangoli rispetto ad l e indichiamo con y, y_1, $y_2, \ldots$, y_n i segmenti associati rispetto ad l ai tetraedri $ABCD$, AT_1, $AT_2, \ldots$, AT_n. Avremo (n. 1., def.).

$$l : H_a = x_a : y = x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = \ldots = x_n : y_n$$

donde

$$x_a : y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n : y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

e siccome è (art. citato) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_a$, così avremo $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = y$.

Corollario. — *Se un tetraedro si divide in parti con piani passanti per uno spigolo, il segmento associato al tetraedro è uguale alla somma dei segmenti associati alle parti.*

Teorema II. — *Se un tetraedro* ABCD *è diviso in tetraedri mediante triangoli coi vertici su tre lati concorrenti* DA, DB, DC *e non intrecciantisi, la somma dei segmenti associati a questi tetraedri è uguale al segmento associato ad* ABCD.

Fra i lati dei triangoli considerati nell' enunciato dev' esserci uno dei lati di *ABC*, altrimenti la parte adiacente a questo triangolo sarebbe un poliedro di 5 facce anzichè un tetraedro. La dimostrazione del teorema procede poi per induzione allo stesso modo del teorema analogo di planimetria (art. citato).

Osservazione. — Rammentiamo che i piani delle facce di un tetraedro dividono lo spazio in 15 parti, di cui una è la parte interna del tetraedro, quattro sono quelle parti dei suoi triedri che trovansi esterne al solido, quattro i triedri opposti a quelli del tetraedro. Vi sono poi altre sei regioni, ciascuna delle quali è parte del diedro opposto allo spigolo ad un diedro del tetraedro, parte che è limitata dalle facce di detto diedro e dagli angoli determinati dai prolungamenti dei lati del nostro solido situati sui piani delle facce del diedro suo considerato e diversi dalla costola del medesimo. In altre parole una di queste sei regioni è la parte di spazio comune a un diedro del tetraedro ed all' opposto allo spigolo di quello avente per spigolo il lato del solido opposto alla costola del primo.

Teorema III. — *Se un punto* M *esterno ad un tetraedro e non situato sul piano d' una faccia si congiunge coi lati, dei sei piani risultanti ve n' ha tre o due che attraversano il solido e lo dividono in sei o in quattro tetraedri la somma dei cui segmenti associati è uguale al segmento associato al tetraedro dato.*

Sia il punto *M* esterno al tetraedro *ABCD* situato in uno dei suoi triedri o in uno dei loro opposti, p. e. in quello di vertice *C* o nel suo opposto. Allora la retta *MC* attraversa il tetraedro, che è quindi pure attraversato dai tre piani congiungenti questa retta coi tre spigoli uscenti da *C*, piani che dividono il solido in sei tetraedri tali che la somma dei loro segmenti associati è uguale (t. I) al segmento associato al tetraedro dato, essendo la divisione in tetraedri fatta con piani passanti per il vertice *C*. Un piano poi passante per un altro spigolo, p e. per *AD*, e attra-

versante il tetraedro, trovandosi metà nel diedro $B(AD)C$ e metà nel suo opposto allo spigolo, incontra in un punto il segmento di MC che è compreso nel tetraedro, avendo questo segmento gli estremi sulle facce del diedro $B(AD)C$, perciò codesto punto è interno al tetraedro, il che significa che i piani congiungenti M coi lati della faccia opposta a C non attraversano $ABCD$.

Sia ora il punto M in una delle sei ultime regioni nominate nell'oss. precedente, p. e. in quella appartenente al diedro opposto allo spigolo ad $A(BC)D$. Il piano MBC trovandosi metà nel diedro $A(BC)D$, sulle cui facce ha gli estremi il segmento AD, incontra questo segmento in un punto H, e analogamente il piano MAD incontra il segmento BC in un punto K, dunque i due piani MBC, MAD s'incontrano in una retta MHK appoggiata agli spigoli opposti BC, AD e attraversano il tetraedro e lo dividono in quattro tetraedri, tali che la somma dei loro segmenti associati è uguale al segmento associato ad $ABCD$. Difatti il piano MBC uscente dallo spigolo BC divide il nostro tetraedro in due $ABCH$ $BCHD$, ed il piano MAD uscente dallo spigolo AH del primo e HD del secondo divide ciascuno di questi in altri due. Allora (cor. t. I) la somma dei segmenti associati ai due tetraedri che compongono ciascuno dei $ABCH$, $BCHD$ è uguale al segmento associato al rispettivo intero tetraedro, e la somma dei segmenti associati ai due ultimi è uguale al segmento associato al tetraedro dato. Ora un piano passante per uno degli altri quattro spigoli, p. e. per CD, e attraversante il tetraedro dato, trovandosi metà nel diedro $A(CD)B$ sulle cui facce ha gli estremi il segmento HK, taglia questo in un punto, il che prova che i piani congiungenti M con gli altri quattro spigoli di $ABCD$ non lo attraversano.

Osservazione I. — I sei tetraedri considerati nella prima parte della dimostrazione del teorema precedente hanno in comune uno spigolo sulla retta MC, ed i quattro considerati nella seconda parte hanno in comune uno spigolo sulla retta MHK.

Osservazione II. — Se il punto M esterno al tetraedro $ABCD$ è sul piano di una faccia (ma non in uno spigolo), p. e. nell'angolo BAC o nel suo opposto al vertice, trovandosi nel diedro $B(AD)C$, o nel suo opposto allo spigolo, il piano MAD divide il solido in due tetraedri i cui segmenti associati danno (cor. t. I) una somma eguale al segmento associato ad $ABCD$ ed aventi in comune uno spigolo sulla retta MA. Dei piani poi determinati da

M con gli altri spigoli uno contiene la faccia ABC e non attraversa quindi il solido, e quelli determinati da M con CD e BD non lo attraversano nemmeno, perchè la retta AM incontra il segmento BC in un punto L, ed un piano che passa per CD o per BD e che attraversa il nostro solido incontra in un punto il segmento AL che ha gli estremi sulle facce di ciascuno dei diedri di spigolo CD, DB, e quindi non può passare per M. Se poi il punto M esterno al tetraedro $ABCD$ si trova sulla retta di un lato di questo, si vede subito che nessuno dei piani che lo congiungono agli altri cinque spigoli attraversa il solido.

Teorema IV. — *Se un tetraedro si divide in parti mediante piani uscenti da un punto esterno situato sulla retta di un lato, e se ognuno dei tronchi di piramide* (a basi non parallele) *così risultanti che non sia triangolare si divide in tronchi di piramide triangolari con piani passanti per uno dei suoi spigoli concorrenti* (prolungati che siano) *nel punto fissato, e se ognuno dei tronchi di piramide triangolare si divide poi in tetraedri* (col procedimento che si suole adoperare per dividere in tetraedri un prisma triangolare o un tronco di piramide a basi parallele), *il tetraedro dato resta diviso in tetraedri, ed il suo segmento associato è uguale alla somma dei segmenti associati a questi.*

Sia N un punto sul prolungamento del lato DA (dalla parte di A) del tetraedro $ABCD$ e conduciamo per esso dei piani α_1, α_2, ... seganti il tetraedro stesso. I piani α dividono ciascuno dei tetraedri $NBCD$, $NABC$ in piramidi di vertice N, ed ognuna di queste che non sia triangolare si potrà dividere in piramidi triangolari mediante piani diagonali passati per uno degli spigoli uscenti da N. Le parti poi in cui $ABCD$ è diviso dai piani α sono, oltre a qualche possibile tetraedro, tronchi di dette piramidi (a basi non parallele situate in BCD, ABC), tronchi che vengono divisi dai piani diagonali sopra considerati in tronchi di piramide triangolare, ognuno dei quali potremo dividere (nel modo indicato nell'enunciato del teorema) in tre tetraedri, e otteniamo così diviso $ABCD$ in un certo numero di tetraedri U_1, mentre $NABC$ resta diviso in un certo numero di tetraedri U_2 mediante piani uscenti dal vertice N [cosicchè (t I) la somma dei segmenti associati agli U_2 è uguale al segmento associato a $NABC$], ed $NBCD$ è somma dei tetraedri U_1, U_2. Inoltre i piani uscenti da N e che dividono $NABC$ nei tetraedri U_2 dividono $NBCD$

in tetraedri U_3, ognuno dei quali è somma di un U_2 e di uno o più U_1, e la scomposizione di un U_3 in siffatti tetraedri U_2, U_1 è fatta con triangoli aventi i vertici sui lati uscenti da N e non intrecciantisi, cosicchè (t II) il segmento associato a detto U_3 è uguale alla somma dei segmenti associati agli U_2, U_1 che lo compongono (quindi la somma dei segmenti associati a tutti gli U_1 più quella dei segmenti associati a tutti gli U_2 è uguale alla somma dei segmenti associati a tutti gli U_3). Raccogliendo abbiamo: *segm ass. ad* NABC + *segm. ass. ad* ABCD = (cor. t. I) = segm. ass. ad $NBCD$ = (t I) = somma dei segm. ass. agli U_3 = somma dei segm. ass. agli U_2, U_1 = *segm. ass. ad* NABC + *somma dei segm. ass. agli* U_1. Ne segue che il segmento associato ad $ABCD$ è uguale alla somma dei segmenti associati ai tetraedri U_1, c. v. d.

Teorema V. — *Se un tetraedro è comunque scomposto in tetraedri, la somma dei segmenti a questi associati è uguale al segmento associato al tetraedro stesso.*

Sia il tetraedro $ABCD$ diviso in tetraedri V in qualunque modo. Consideriamo i piani determinati dal vertice A e dalle rette cui appartengono i lati dei vari tetraedri parziali; essi tagliano il piano del triangolo BCD in rette che dividono il triangolo stesso in poligoni, ed il tetraedro dato resta diviso da quei piani in piramidi aventi per vertice A e per basi quei poligoni, e ciascuna di queste piramidi resta divisa dalle facce o parti di facce dei V in essa contenute in poliedri aventi i lati soltanto sulle facce uscenti da A e quindi i vertici soltanto sugli spigoli uscenti da A. Divideremo poi ciascuna di dette piramidi che non sia triangolare in piramidi triangolari con piani diagonali uscenti da uno degli spigoli concorrenti in A, e otterremo così $ABCD$ diviso in un certo numero di tetraedri V_1 con piani uscenti dal vertice A [cosicchè (t. I) la somma dei segmenti associati ai V_1 è uguale al segmento associato ad $ABCD$].

Sia ora $PQRS$ uno dei tetraedri V. Esso (t. III e relativa oss. II) è diviso dai piani individuati da A e dai suoi lati in tetraedri (se è attraversato da qualcuno di detti piani) la somma dei cui segmenti associati è uguale al segmento associato a $PQRS$, ed A si trova (oss. I e II t. III) sulla retta di uno spigolo comune a tutti questi tetraedri esternamente a ciascuno di essi (tutt' al più può esser vertice per qualcuno dei medesimi). Chiameremo V_2 i tetraedri così risultanti nei vari V (qualcuno di

essi può essere anche un V), e notiamo che (t. III) il segmento associato ad un V è uguale alla somma dei segmenti associati ai V_2 che lo compongono [cosicchè la somma dei segmenti associati a tutti i V_2 contenuti in $ABCD$ è uguale alla somma dei segmenti associati ai V].

Ora dei rimanenti piani condotti per A (cioe quelli determinati da A e dagli spigoli dei V diversi da $PQRS$ e quelli condotti per suddividere le piramidi non triangolari ottenute nel tetraedro dato in tetraedri V_1) ve ne potranno essere di quelli che attraversano qualcuno dei V_2 che compongono $PQRS$. Divideremo allora questo V_2 in tetraedri nel modo indicato nel teor. IV e otterremo così (estendendo quest' operazione a tutti i V_2) diviso $ABCD$ in tetraedri V_3, in guisa che (per detto teorema) il segmento associato ad ogni V_2 è uguale alla somma dei segmenti associati ai tetraedri che lo compongono [cosicchè la somma dei segmenti associati a tutti i V_3 è uguale a quella dei segmenti associati a tutti i V_2].

D'altronde anche ogni V_1 viene così a essere scomposto in tetraedri V_3 mediante triangoli coi vertici negli spigoli uscenti da A e non intrecciantisi, e tali perciò (t. II) che la somma dei loro segmenti associati è uguale al segmento associato a detto V_1 [cosicchè la somma dei segmenti associati a tutti i V_3 è uguale a quella dei segmenti associati a tutti i V_1].

Raccogliendo le varie conclusioni ottenute abbiamo: segm. ass. ad $ABCD =$ somma dei segm. ass. ai $V_1 =$ somma dei segm. ass. ai $V_3 =$ somma dei segm. ass. ai $V_2 =$ somma dei segm. ass. ai V, c. v. d.

3. Teorema. — *Se una figura poliedrica è divisa in un certo modo in tetraedri* T *ed in altro modo in tetraedri* T', *la somma dei segmenti associati ai primi è uguale a quella dei segmenti associati ai secondi.* Si dimostra come l'analoga proposizione di planimetria.

Definizione. — Dicesi *segmento associato ad una figura poliedrica* quel segmento che è somma dei segmenti associati ai tetraedri che si ottengono dividendo in un modo qualsiasi la figura data in tetraedri.

Dopo ciò le successive proposizioni e le relative dimostrazioni non sono che la traduzione delle analoghe di planimetria (articolo citato).

Sulla funzione $\varphi(n)$ di GAUSS

E

Sui numeri primi con un dato numero n

SALVATORE COMPOSTO (Acireale)

I. — Sulla funzione $\varphi(n)$ di GAUSS.

1. È noto che GAUSS indicò con $\varphi(n)$ il numero dei numeri primi con un dato numero n, non superiori ad n.

Di tale funzione sono anche note diverse proprietà, ma, se non c'inganniamo, come non si conosce una legge generale che dia la successione dei numeri primi, nonostante la questione sia stata studiata da eminenti matematici, così, sebbene noto il valore di $\varphi(n)$, pure non si conosce una regola la quale serva a calcolare tutti i numeri primi con un dato numero n, *non superiori* ad n.

In questo lavoro ci proponiamo di stabilire una regola semplicissima con la quale si possa calcolare la successione dei numeri primi con un dato numero n, *minori e maggiori di* n, e di dedurre dalla regola medesima importanti conseguenze.

2. TEOREMA 1° — *Se* m *ed* n *sono due numeri primi diversi tra loro, i numeri*

$$(1) \qquad 1 \quad 2 \quad 3 \cdots\cdots (m-1)$$

e quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi i numeri:

$$(2) \qquad m \quad 2m \quad 3m \cdots\cdots (n-1)\,m$$

contengono tutti i multipli di n *secondo i numeri* (1), *e tutti i numeri primi col prodotto* mn, *non superiori al prodotto medesimo.*

Infatti, i numeri (1) e quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi i numeri (2) formano il seguente quadro:

$$
(3)\left\{\begin{array}{llllll}
(1) & 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & (m-1) \\
(2) & 1+m & 2+m & 3+m & \cdots\cdots & (m-1)+m \\
(3) & 1+2m & 2+2m & 3+2m & \cdots\cdots & (m-1)+2m \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(n) & 1+(n-1)m & 2+(n-1)m & 3+(n-1)m & \cdots & (m-1)+(n-1)m
\end{array}\right.
$$

È chiaro che i numeri (3) contengono tutti i numeri intieri da 1 ad $[(m-1)+(n-1)m]$, ossia da 1 ad $(mn-1)$, eccezione fatta dei numeri

$$(4) \qquad m \quad 2m \quad 3m \cdots\cdots (n-1)m.$$

Allora, tra i numeri (3) si debbono trovare anche i primi $(m-1)$ multipli di n, cioè:

$$(5) \qquad n \quad 2n \quad 3n \cdots\cdots (m-1)n$$

giacchè nessuno di questi ultimi numeri può essere uguale ad uno dei numeri (4), come si può facilmente dimostrare; inoltre, essendo $(mn-1)$ il maggiore dei numeri (3), questi contengono solamente tutti i multipli di n minori di mn, ossia contengono i numeri (5), che sono precisamente i multipli di n secondo i numeri (1).

Se ora dai numeri (3) scartiamo i numeri (5), quelli che rimangono, oltre a non essere superiori al prodotto mn, sono anche primi col prodotto medesimo, giacchè, in caso contrario, dovrebbero essere multipli o di m, o di n, il che è impossibile, perchè i multipli di m non si trovano tra i numeri (3), ed i multipli di n sono stati scartati.

Osservazione. — Dal teorema precedente segue subito che scartando dai numeri del quadro (3) i multipli di n secondo i numeri (1) del quadro medesimo, si hanno tutti i numeri primi col prodotto mn, non superiori ad mn, e che questi numeri sono in tutto $(m-1)(n-1)$, risulta cioè che *se* m *ed* n *sono numeri primi diversi tra loro, si ha la nota relazione:*

$$(6) \qquad \varphi(m \cdot n) = (m-1)(n-1) = \varphi(m) \cdot \varphi(n).$$

*
* *

3. Teorema 2° — *Se* m, n, r *sono tre numeri primi diversi tra loro, i numeri primi col prodotto* m n, *non superiori al prodotto medesimo, che indichiamo in ordine crescente con*

$$(7) \qquad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \cdots\cdots\cdots p_{\varphi(mn)}$$

e quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi

$$(8) \qquad mn \quad 2mn \quad 3mn \cdots\cdots (r-1)\,mn$$

contengono tutti i multipli di r *secondo i numeri* (7) *e tutti i numeri primi col prodotto* m n r, *non superiori ad* m n r.

Indichiamo, infatti, con

$$(9) \qquad p'_1 \quad p'_2 \quad p'_3 \cdots\cdots p'_\mu$$

gli $(mn-1)-\varphi(mn)=\mu$ numeri intieri minori del prodotto *mn*, *non primi* col prodotto medesimo.

Coi numeri (7), (9) e con quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi i numeri (8), si può formare il seguente quadro:

$$(10) \left\{ \begin{array}{llll} \multicolumn{4}{c}{(\alpha)} \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{\varphi(mn)} \\ p_1+mn & p_2+mn & \cdots & p_{\varphi(mn)}+mn \\ p_1+2mn & p_2+2mn & \cdots & p_{\varphi(mn)}+2mn \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1+(r-1)\,mn & p_2+(r-1)\,mn & \cdots & p_{\varphi(mn)}+(r-1)\,mn \\ \multicolumn{4}{c}{(\beta)} \\ p'_1 & p'_2 & \cdots & p'_\mu \\ p'_1+mn & p'_2+mn & \cdots & p'_\mu+mn \\ p'_1+2mn & p'_2+2mn & \cdots & p'_\mu+2mn \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p'_1+(r-1)\,mn & p'_2+(r-1)\,mn & \cdots & p'_\mu+(r-1)\,mn \end{array} \right.$$

che si può immaginare diviso in due parti (α) e (β), nella prima delle quali si trovano i numeri (7) e quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi i numeri (8), e nella seconda si

trovano invece i numeri (9) e quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi gli stessi numeri (8).

È chiaro che il minore dei numeri (10) è 1, mentre il maggiore è

$$p_{\phi(mn)} + (r - 1)mn = mnr - 1.$$

Risulta, inoltre, evidente che il quadro (10) comprende tutti i numeri intieri da 1 ad $(mnr - 1)$, eccezione fatta dei multipli del prodotto mn, secondo i numeri 1, 2, 3 ····· $(r - 1)$, cioè, eccezione fatta dei numeri:

(11) $\qquad mn \qquad 2mn \qquad 3mn \cdots\cdots (r-1)mn.$

Allora, tra i numeri (10) si debbono trovare anche i multipli di r secondo i numeri 1, 2, 3 ···· $(mn - 1)$, che sono:

(12) $\qquad r \qquad 2r \qquad 3r \cdots\cdots (mn-1)r$

cioè tra i numeri (10) si debbono trovare anche i multipli di r secondo i numeri (7) e (9), giacchè nessuno dei numeri (12) può essere uguale ad uno dei numeri (11), come si può facilmente dimostrare; inoltre, il valore maggiore dei numeri (7) e (9) è $(mn - 1)$, ed essendo $(mnr - 1)$ il maggiore dei numeri (10), tra questi si debbono trovare solamente i multipti di r minori del prodotto mnr, cioè si debbono trovare i numeri (12); i numeri (10) contengono quindi tutti i multipli di r secondo i numeri (7) e (9).

Per dimostrare però la prima parte del teorema, occorre provare che tutti i multipli di r secondo i numeri (7) sono compresi tra i numeri (α) del quadro (10), e tutti i multipli di r secondo i numeri (9) sono invece compresi tra i numeri (β) del quadro medesimo.

Ed invero, un multiplo di r secondo uno dei numeri (9), che indichiamo con $p'_i r$, non può trovarsi tra i numeri (α), poichè tutti i numeri (α) sono primi col prodotto mn, mentre i numeri $p'_i r$ non sono primi col prodotto medesimo.

Similmente, un multiplo di r secondo uno dei numeri (7), che indichiamo con $p_v r$, non può trovarsi tra i numeri (β), poichè nessuno dei numeri (β) è primo col prodotto mn, mentre i numeri $p_v r$ sono primi col prodotto medesimo.

Tra i numeri (α) si debbono trovare quindi tutti i multipli di r secondo i numeri (7).

Resta ora a dimostrare che se dai numeri (α) scartiamo i multipli di r secondo i numeri (7), i rimanenti sono primi col prodotto mnr.

Infatti, se non lo fossero, dovrebbero essere multipli o di m, o di n, o di r, il che è impossibile, poichè tutti i numeri (α) sono, come abbiamo visto, primi col prodotto mn, ed i multipli di r sono stati scartati.

Da quanto precede risulta quindi chiaro che i numeri (α) del quadro (10) contengono tutti i multipli di r secondo i numeri (7), e tutti i numeri primi col prodotto mnr, non superiori al prodotto medesimo, come volevasi dimostrare.

Osservazione. — Dal teorema 2° segue subito che scartando dai numeri (α) del quadro (10) i multipli di r secondo i numeri (7) si hanno tutti i numeri primi col prodotto mnr, non superiori al prodotto medesimo, e che questi numeri sono in tutto $(m-1)(n-1)(r-1)$, risulta cioè che *se* m, n, r *sono numeri primi diversi tra loro, si ha la nota relazione*:

$$(13)\qquad \varphi(mnr) = (m-1)(n-1)(r-1) = \varphi(m)\cdot\varphi(n)\cdot\varphi(r).$$

È superfluo osservare inoltre che, applicando al prodotto mnr la proprietà commutativa, il teorema 2° è sempre vero, come si può facilmente dimostrare.

***

4. Se invece di tre, come nel teorema 2°, i numeri primi diversi tra loro fossero quattro, cioè m, n, r, v, considerando il prodotto $mnrv$ come formato dai due fattori mnr e v, si potrebbe provare, con dimostrazione analoga a quella precedente, che i numeri primi col prodotto $mnrv$, non superiori al prodotto medesimo, sono dati dai numeri primi col prodotto mnr, non superiori ad mnr, che indichiamo con

$$(14)\qquad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \cdots\cdots p_{\varphi(mnr)}$$

e da quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi

$$mnr \quad 2mnr \quad 3mnr \cdots\cdots (v-1)\,mnr$$

eccezione fatta dei multipli di v secondo i numeri (14).

Risulta anche facilmente la relazione

$$(15) \qquad \varphi(mnrv) = (m-1)(n-1)(r-1)(v-1) = \\ = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \cdot \varphi(r) \cdot \varphi(v).$$

Analoghe dimostrazioni si potrebbero fare per un numero qualunque di fattori primi diversi tra loro.

OSSERVAZIONE. — Se indichiamo con $p'_1\ p'_2 \cdots\cdots p'_m\ p'_{m+1}$ i primi $(m+1)$ numeri primi, che supponiamo noti, e poniamo

$$n' = p'_1 \cdot p'_2 \cdots\cdots p'_m$$

è chiaro che qualunque numero primo con n' e minore di p'^2_{m+1} è un numero primo. Nel quadro quindi che contiene tutti i numeri primi con n', non superiori ad n', quelli minori di p'^2_{m+1} (eccezione fatta di 1) sono numeri primi. Essi, insieme con i numeri p'_1 $p'_2 \cdots\cdots p'_m$ formano *la serie dei numeri primi minori di* p'^2_{m+1}.

Esempio numerico. — Supponiamo di voler calcolare tutti i numeri primi col prodotto $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ e non superiori a 210.

Applicando quanto abbiamo esposto precedentemente, possiamo calcolare prima i numeri primi col prodotto $2 \times 3 = 6$, non superiori a 6, indi quelli primi col prodotto $2 \times 3 \times 5 = 30$, non superiori a 30, e così via.

L'operazione si può disporre nel seguente modo:

1	(+ 2)
3	
5	

1	**5**	(+ 6)
7	11	
13	17	
19	23	
25	29	

1	**7**	11	13	17	19	23	29	+ (30)
31	37	41	43	47	**49**	53	59	
61	67	71	73	**77**	79	83	89	
91	97	101	103	107	109	113	**119**	
121	127	131	**133**	137	139	143	149	
151	157	**161**	163	167	169	173	179	
181	187	191	193	197	199	**203**	209	

Quest'ultimo quadro [1] contiene quindi tutti i numeri primi con 210, non superiori a 210. In esso, ad eccezione di 1, tutti quelli minori di 11^2 sono *numeri primi*, ed insieme ai numeri 2, 3, 5 e 7 costituiscono la serie dei numeri primi minori di 121.

5. Teorema 3° — *Se* d *è un fattore primo del numero* n, *tutti i numeri primi col prodotto* d n, *non superiori al prodotto medesimo sono dati:*

1° *Da tutti i numeri primi con* n, *non superiori ad* n;

2° *Dai numeri che si ottengono aggiungendo a ciascuno dei precedenti:*

$$n \quad 2n \quad 3n \cdots\cdots (d-1)n. \tag{16}$$

Infatti, supponendo

$$n = a^\alpha b^\beta \cdots d^m \cdots l^\lambda \qquad (m \geqq 1) \tag{17}$$

risulta

$$dn = a^\alpha b^\beta \cdots d^{m+1} \cdots l^\lambda. \tag{18}$$

Indichiamo ora con

$$p_1 \quad p_2 \cdots\cdots p_{\varphi(n)} \tag{19}$$

tutti i numeri primi con n, non superiori ad n, disposti in ordine crescente, e con

$$p'_1 \quad p'_2 \cdots\cdots p'_\rho \tag{20}$$

tutti gli altri $(n-1)-\varphi(n)=\rho$ numeri intieri minori di n, *non primi* con n.

Coi numeri (19), (20) e con quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi i numeri (16), si può formare il seguente quadro:

---

[1] Senza tener conto dei numeri stampati con carattere *grassetto*.

$$
(21)\quad
\begin{cases}
\overbrace{\begin{array}{lll}
p_1 & p_2 & \cdots\cdots p_{\varphi(n)} \\
p_1 + n & p_2 + n & \cdots\cdots p_{\varphi(n)} + n \\
p_1 + 2n & p_2 + 2n & \cdots\cdots p_{\varphi(n)} + 2n \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
p_1 + (d-1)\,n & p_2 + (d-1)\,n & \cdots\cdots p_{\varphi(n)} + (d-1)\,n
\end{array}}^{(\alpha)} \\
\overbrace{\begin{array}{lll}
p'_1 & p'_2 & \cdots\cdots p'_\rho \\
p'_1 + n & p'_2 + n & \cdots\cdots p'_\rho + n \\
p'_1 + 2n & p'_2 + 2n & \cdots\cdots p'_\rho + 2n \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
p'_1 + (d-1)\,n & p'_2 + (d-1)\,n & \cdots\cdots p'_\rho + (d-1)\,n
\end{array}}^{(\beta)}
\end{cases}
$$

che si può immaginare diviso in due parti (α) e (β), nella prima delle quali si trovano i numeri (19) e quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi i numeri (16), e nella seconda si trovano invece i numeri (20) e quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi gli stessi numeri (16).

È chiaro che il minore dei numeri (21) è 1, mentre il maggiore è

$$p_{\varphi(n)} + (d-1)\,n = dn - 1.$$

Risulta, inoltre, evidente che il quadro (21) comprende tutti i numeri intieri da 1 a $(dn - 1)$, eccezione fatta dei multipli di n secondo i numeri $1, 2, 3 \cdots\cdots (d-1)$, i quali, non essendo primi con n, non possono esserlo col prodotto dn.

Tutti i numeri (α) del quadro (21) sono primi col prodotto dn, perchè $p_1\ p_2 \cdots\cdots p_{\varphi(n)}$ sono primi per ipotesi con n, e quindi lo sono anche col prodotto dn; inoltre tutti gli altri sono della forma

$$p_i + kn \qquad \begin{bmatrix} i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots \varphi(n) \\ k = 1, 2, \cdots\cdots (d-1) \end{bmatrix}$$

e se qualcuno di essi non fosse primo con dn, dovrebbe avere almeno un divisore primo ε, diverso da 1, comune con dn, e questo divisore ε dovrebbe essere, tenuto conto della (18), uno dei fattori $a,\ b, \cdots\ d, \cdots\ l$ cioè dovrebbe essere anche divisore di n, e perciò

di kn. Ma allora ε risulterebbe divisore di $(p_i + kn)$ e di kn, quindi dovrebbe anche essere divisore di p_i, il che è impossibile, perchè p_i e dn sono primi tra loro.

Tutti i numeri (β) del quadro (21) non sono invece primi col prodotto dn, perchè $p'_1\, p'_2 \cdots p'_\rho$, non essendo per ipotesi primi con n, non lo sono neanche con dn, e gli altri risultano della forma

$$p'_v + kn \qquad (v = 1, 2 \cdots\cdots \rho)$$

Risulta chiaro allora che i numeri (α) del quadro (21) sono tutti i numeri primi col prodotto dn, non superiori al prodotto medesimo, come volevasi dimostrare.

Osservazione. — Dal teorema 3° segue subito che *se* d *è un fattore primo del numero* n *si ha:*

$$\varphi(d \cdot n) = d \cdot \varphi(n) \tag{22}$$

***

6. Da quanto precede si deduce facilmente la seguente:

Regola generale. — *Se* n *è un numero primo, tutti i numeri primi con* n, *non superiori ad* n, *sono*:

$$1 \quad 2 \quad 3 \cdots\cdots (n-1)$$

Se n *non è primo, si scomponga in prodotto di fattori primi, e sia*

$$n = a^\alpha\, b^\beta \cdots\cdots l^\lambda,$$

si trovino (§ 4) *i numeri primi col prodotto* ab$\cdots$l *e non superiori al prodotto medesimo, e poi si applichi* $(\alpha-1) + (\beta-1) + \cdots\cdots + (\lambda-1)$ *volte il teorema 3°.*

Esempi numerici — 1° Supponiamo di voler calcolare i numeri primi con $n = 343 = 7^3$, non superiori a 343.

I numeri primi con 7, non superiori a 7, sono:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \tag{23}$$

quindi, applicando il teorema 3°, si ha che i numeri primi con

$7^2 = 7 \times 7$, non superiori a 7^2, sono dati dai numeri (23) e da quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi:

$$7 \times 1 = 7 \qquad 7 \times 2 = 14 \qquad 7 \times 3 = 21 \cdots\cdots 7 \times 6 = 42$$

sono cioè:

$$(24)\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 \end{matrix}\right.$$

Applicando di nuovo il teorema 3°, si ha che i numeri primi con $7^3 = 49 \times 7$, non superiore a 7^3, sono tutti i numeri (24) e quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi

$$49 \times 1 = 49 \quad 49 \times 2 = 98 \quad 49 \times 3 = 147 \cdots\cdots 49 \times 6 = 294$$

Lasciamo al lettore la cura di trovarli.

2° Proponiamoci ora di calcolare tutti i numeri primi con

$$n = 1323 = 3^3 \times 7^2$$

non superiori a 1323. Ricordando il teorema 1°, risulta che i numeri primi con $3 \times 7 = 21$, non superiori a 21, sono:

$$(25) \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 8 \quad 10 \quad 11 \quad 13 \quad 16 \quad 17 \quad 19 \quad 20.$$

Applicando allora il teorema 3°, si possono calcolare tutti i numeri primi col prodotto $3^2 \times 7 = 21 \times 3 = 63$, non superiori a 63. Essi sono i numeri (25) e quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi:

$$21 \times 1 = 21 \qquad\qquad 21 \times 2 = 42$$

sono cioè:

$$(26)\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 8 & 10 & 11 & 13 & 16 & 17 & 19 & 20 \\ 22 & 23 & 25 & 26 & 29 & 31 & 32 & 34 & 37 & 38 & 40 & 41 \\ 43 & 44 & 46 & 47 & 50 & 52 & 53 & 55 & 58 & 59 & 61 & 62 \end{matrix}\right.$$

Applicando di nuovo il teorema 3°, si possono calcolare tutti i numeri primi col prodotto $3^3 \times 7 = 63 \times 3 = 189$, non superiore a 189. Essi sono i numeri (26) e quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi

$$63 \times 1 = 63 \qquad\qquad 63 \times 2 = 126$$

Infine, i numeri primi col prodotto $3^3 \times 7^2 = 189 \times 7 = 1323$, non superiori a 1323, sono dati dai numeri primi con 189, non superiori a 189, di già calcolati, e da quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi

$$189 \times 1 = 189 \qquad 189 \times 2 = 378 \cdots\cdots 189 \times 6 = 1134$$

Il lettore, se crede, potrà calcolarli per suo conto; a noi basta di aver solamente dato un cenno del procedimento.

*
* *

7. Da quanto precede si può dedurre subito il valore della funzione $\varphi(n)$ di GAUSS, dimostrando il seguente

Teorema 4°. — *Se*

$$n = a^\alpha \cdot b^\beta$$

in cui a *e* b *sono numeri primi diversi tra loro, si ha:*

$$\varphi(n) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} (a-1)(b-1) \tag{27}$$

Infatti, dalle relazioni (6) e (22) si deducono successivamente le seguenti:

$$\varphi(a^2 \cdot b) = a \cdot \varphi(ab) = a(a-1)(b-1)$$
$$\varphi(a^3 \cdot b) = a \cdot \varphi(a^2 b) = a^2 (a-1)(b-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(a^\alpha \cdot b) = a \cdot \varphi(a^{\alpha-1} b) = a^{\alpha-1} (a-1)(b-1)$$

Similmente

$$\varphi(a^\alpha \cdot b^2) = b \cdot \varphi(a^\alpha b) = a^{\alpha-1} b (a-1)(b-1)$$
$$\varphi(a^\alpha \cdot b^3) = b \cdot \varphi(a^\alpha b^2) = a^{\alpha-1} b^2 (a-1)(b-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(a^\alpha \cdot b^\beta) = b \cdot \varphi(a^\alpha b^{\beta-1}) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} (a-1)(b-1)$$

come volevasi dimostrare.

È superfluo osservare che, con analoga dimostrazione, per

$$n = a^\alpha b^\beta \cdots l^\lambda$$

si otterrebbe la nota relazione:

$$\varphi(n) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \cdots l^{\lambda-1} (a-1)(b-1) \cdots (l-1) \tag{28}$$

II. — **Sui numeri primi con un dato numero** n.

8. Nei paragrafi precedenti ci siamo limitati a stabilire una regola generale per calcolare tutti i numeri primi con un dato numero n, non superiori ad n, perchè abbiamo voluto rivolgere il nostro studio solamente alla funzione $\varphi(n)$ di Gauss.

Notiamo subito, però, che da tale regola se ne può dedurre un'altra, assai semplice anch'essa, per calcolare i numeri primi con un dato numero n, *maggiori* di n.

È appunto di tale regola e di alcune notevoli conseguenze che da essa derivano, che ora ci occuperemo.

Avvertiamo, intanto, che in ciò che segue supporremo sempre

$$n > 1$$

***

9. Teorema 1° — *Se*

$$(1) \qquad p_1 \quad p_2 \cdots\cdots\cdots p_{\varphi(n)}$$

sono tutti i numeri primi con un dato numero n, *minori di* n, *aggiungendo a ciascuno di essi i multipli di* n, *cioè:*

$$(2) \qquad n \quad 2n \quad 3n \cdots\cdots kn \cdots\cdots$$

si ottengono i numeri primi con n, *maggiori di* n.

Indichiamo, infatti, con p_i uno dei numeri (1), e con kn un multiplo di n, cioè uno dei numeri (2).

Aggiungendo ad uno dei numeri (1) un multiplo di n, si ottiene un numero della forma:

$$p_i + kn$$

il quale, evidentemente, è maggiore di n, ed è primo con n.

Reciprocamente, se un numero N, maggiore di n, è primo con n, dovrà essere della forma:

$$N = p_i + kn \qquad (k = 1,\ 2,\ 3 \cdots\cdots)$$

in cui p_i è un numero primo con n, minore di n,

Infatti, dividendo N per n, ed indicando con r il resto della divisione, si ha:

$$N = kn + r$$

Se r non fosse primo con n, dovrebbe ammettere almeno un divisore primo ε, diverso dall'unità, comune con n; allora questo divisore ε dividerebbe anche N, e quindi n ed N ammetterebbero il divisore ε comune, il che è impossibile.

Che r sia minore di n, è evidente.

Il teorema rimane così dimostrato.

Osservazione. — Nel caso particolare in cui n sia primo, i numeri (1) si trovano subito; se n non è primo, si possono calcolare facilmente con la regola stabilita al § 6, e poi, applicando il teorema precedente, si possono calcolare i numeri primi con n, maggiori di n, sino a quel limite che si vuole.

***

10. I numeri (1), disposti in ordine crescente, e quelli che si ottengono aggiungendo a ciascuno di essi i numeri (2), disposti pure in ordine crescente, formano la seguente successione di numeri primi con n, disposti in ordine crescente:

$$(3)\left\{\begin{array}{llllll}
(1) & p_1 & p_2 & p_3 & \dots\dots p_{\varphi(n)-1} & p_{\varphi(n)} \\
(2) & p_1+n & p_2+n & p_3+n & \dots\dots p_{\varphi(n)-1}+n & p_{\varphi(n)}+n \\
(3) & p_1+2n & p_2+2n & p_3+2n & \dots\dots p_{\varphi(n)-1}+2n & p_{\varphi(n)}+2n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(k) & p_1+(k-1)n & p_2+(k-1)n & p_3+(k-1)n & \dots\dots p_{\varphi(n)-1}+(k-1)n & p_{\varphi(n)}+(k-1)n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right.$$

Dal quadro (3) risulta molto facilmente che, indicando con $P_h(n)$ un numero primo con n, si ha:

$$(4)\quad \sum_{h=(k-1)\varphi(n)+1}^{h=k\varphi(n)} P_h(n) = \frac{n\cdot\varphi(n)}{2} + (k-1)n\cdot\varphi(n) = \frac{2k-1}{2}n\cdot\varphi(n)$$

***

Valore del numero, di posto h, della successione dei numeri primi con un dato numero n, disposti in ordine crescente.

11. In ciò che segue supporremo sempre che i numeri primi con un dato numero n siano disposti in ordine crescente, a cominciare da 1, e ci proponiamo di stabilire una regola per calcolare il valore del numero, di posto h, di tale successione.

Osservando il quadro (3) si scorge facilmente che i numeri primi con n di posti:

$$\varphi(n) \quad 2\varphi(n) \quad 3\varphi(n) \cdots\cdots k\cdot\varphi(n)\cdots\cdots$$

sono rispettivamente

$$p_{\varphi(n)} \quad n+p_{\varphi(n)} \quad 2n+p_{\varphi(n)}\cdots\cdots(k-1)n+p_{\varphi(n)}\cdots\cdots$$

indicando, cioè, con $P_h(n)$ un numero di posto h della successione dei numeri primi con n, disposti in ordine crescente, a cominciare da 1, e ricordando che $p_{\varphi(n)}=n-1$, si ha

$$\underset{h=k\varphi(n)}{P_h(n)}=kn-1. \tag{5}$$

Dallo stesso quadro (3) risulta anche che i numeri primi con n, di posti:

$$(k-1)\varphi(n)+1 \quad (k-1)\varphi(n)+2 \quad (k-1)\varphi(n)+3\cdots\cdots k\varphi(n)-1$$

sono rispettivamente:

$$(k-1)n+p_1 \quad (k-1)n+p_2 \quad (k-1)n+p_3\cdots\cdots(k-1)n+p_{\varphi(n)-1}$$

nel caso, cioè, in cui h non sia multiplo di $\varphi(n)$, ponendo

$$h=k\varphi(n)+r$$

ove r può assumere i valori intieri minori di $\varphi(n)$, si ha:

$$\underset{h=k\varphi(n)+r}{P_h(n)}=kn+p_r. \tag{6}$$

Da quanto precede risulta che conoscendo i numeri primi con n, minori di n (che, con la regola stabilita al § 6, si possono facil-

mente calcolare) si può trovare il valore del numero primo con n di posto $h > \varphi(n)$.

Volendo anche includere il caso di $h \leq \varphi(n)$, la regola si può formulare brevemente nel seguente modo:

Indicando con

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \cdots\cdots p_{\varphi(n)} \tag{7}$$

i numeri primi con n, *minori di* n, *disposti in ordine crescente, e con* $P_h(n)$ *un numero primo con* n *di posto* h, *per*

$$h = k\varphi(n) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3 \cdots\cdots)$$

si ha:

$$\underset{h=k\cdot\varphi(n)}{P_h}(n) = kn - 1 \tag{8}$$

e per

$$h = k \cdot \varphi(n) + r \qquad \begin{bmatrix} k = 0,\ 1,\ 2 \cdots\cdots \\ r = 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots, \varphi(n) - 1 \end{bmatrix}$$

risulta invece

$$\underset{h=k\cdot\varphi(n)+r}{P_h}(n) = kn + p_r \tag{9}$$

***

12. Nel caso in cui n sia *primo*, risultando

$$p_r = r \qquad \varphi(n) = n - 1$$

la relazione (8) e (9) si semplificano di molto. Infatti, per

$$h = k(n-1) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3 \cdots\cdots)$$

si ha:

$$\underset{h=k(n-1)}{P_h}(n) = kn - 1 \tag{10}$$

e per

$$h = k(n-1) + r \qquad \begin{bmatrix} k = 0,\ 1,\ 2 \cdots\cdots \\ r = 1,\ 2,\ 3 \cdots\cdots (n-2) \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$\underset{h=k(n-1)+r}{P_h}(n) = kn + r \tag{11}$$

Esempi numerici. — 1° Essendo $246 = 41(7-1)$, dalla (10) risulta subito:

$$P_{246}(7) = 286$$

2° Analogamente, risultando $184 = 10(19 - 1) + 4$, dalla (11) si ottiene:

$$P_{184}(19) = 194$$

***

13. Osservazione. — Supponendo $n = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda$, poniamo

$$n' = ab \cdots l$$

e consideriamo la funzione $\varphi(n')$.

Se h non è multiplo di $\varphi(n)$, potrebbe esserlo di $\varphi(n')$, ed in questo caso si potrebbe risparmiare il calcolo del numero p_r che comparisce nella (9). Ponendo, infatti

$$h = k' \cdot \varphi(n')$$

risulta la seguente relazione, analoga alla (8):

$$P_{\substack{h \\ h=k'\cdot\varphi(n')}}(n) = k' n' - 1 \tag{12}$$

Se invece h non è multiplo di $\varphi(n')$, ponendo

$$h = k' \cdot \varphi(n') + r' \tag{13}$$

ed indicando con

$$p_1' \quad p_2' \cdots\cdots p'_{r'} \tag{14}$$

i primi r' numeri primi col prodotto $ab \cdots l$, minori del prodotto medesimo, la (9) si trasforma nella

$$P_{\substack{h \\ h=k'\cdot\varphi(n')+r'}}(n) = k' n' + p'_{r'} \tag{15}$$

Esempi numerici. — 1° Supponiamo di voler calcolare il valore del numero primo con $n = 45$ di posto $h = 240$. Risultando $45 = 3^2 \times 5$, $\varphi(3 \times 5) = 8$ e $240 = 30 \cdot \varphi(3 \times 5)$, dalla (12) si ha subito:

$$P_{240}(45) = 449$$

2°. Risultando invece $235 = 29 \cdot \varphi(3 \times 5) + 3$, e ricordando che in questo caso è $p_3' = 4$, dalla (15) si ricava:

$$P_{235}(45) = 439$$

E così via

***

Somma dei primi $k \cdot \varphi(n)$ numeri della successione dei numeri primi con un dato numero n, disposti in ordine crescente.

14. Supponendo sempre i numeri primi con un dato numero n disposti in ordine crescente, a cominciare da 1, ci proponiamo di calcolare la somma dei primi $k \cdot \varphi(n)$ numeri di tale successione, dimostrando il seguente

TEOREMA 2°. — *La somma dei primi*

$$k \cdot \varphi(n) \qquad (k = 1, 2, 3 \cdots\cdots) \tag{16}$$

numeri primi con un dato numero n *è uguale a*

$$k^2 \cdot \frac{n \cdot \varphi(n)}{2} \tag{17}$$

Ricordando, infatti, la (4) del § 10, si ha:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{h=1}^{h=\varphi(n)} P_h(n) = \dfrac{n \cdot \varphi(n)}{2} \\ \sum\limits_{h=\varphi(n)+1}^{h=2\cdot\varphi(n)} P_h(n) = \dfrac{n \cdot \varphi(n)}{2} + n \cdot \varphi(n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \sum\limits_{h=(k-1)\cdot\varphi(n)+1}^{h=k\cdot\varphi(n)} P_h(n) = \dfrac{n \cdot \varphi(n)}{2} + (k-1)\, n \cdot \varphi(n) \end{array}\right. \tag{18}$$

dalle quali si ottiene

$$\sum_{h=1}^{h=k\cdot\varphi(n)} P_h(n) = k \frac{n \cdot \varphi(n)}{2} + [1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + (k-1)]\, n \cdot \varphi(n)$$

ossia

$$\sum_{h=1}^{h=k\cdot\varphi(n)} P_h(n) = k^2 \frac{n \cdot \varphi(n)}{2} \tag{19}$$

come volevasi dimostrare

*
* *

15. È superfluo rilevare che dalle relazioni (18) e (19) si possono dedurre importanti conseguenze. Noi, per ora, ci limitiamo ad indicarne qualcuna, riserbandoci di esporne altre in seguito.

Così, per esempio, ponendo

$$k = \left[\frac{n \cdot \varphi(n)}{2}\right]^{\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, 2 \cdots) \tag{20}$$

risulta

$$\sum_{h=1}^{h=\varphi(n)\cdot\left[\frac{n\cdot\varphi(n)}{2}\right]^{\alpha}} P_h(n) = \left[\frac{n \cdot \varphi(n)}{2}\right]^{2\alpha+1} \tag{21}$$

dalla quale si ottiene che *la somma dei primi*

$2 \qquad 2 \cdot 6 \qquad 2 \cdot 6^2 \qquad 2 \cdot 6^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

numeri primi con 6 *è uguale rispettivamente a*

$6 \qquad 6^3 \qquad 6^5 \qquad 6^7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

mentre *la somma dei primi*

$4 \qquad 4 \cdot 20 \qquad 4 \cdot 20^2 \qquad 4 \cdot 20^3 \ldots\ldots\ldots$

numeri primi con 10 *è uguale rispettivamente a*

$20 \qquad 20^3 \qquad 20^5 \qquad 20^7 \ldots\ldots\ldots$

e così via di seguito.

*
* *

16. Nel caso in cui n sia un numero *primo*, la (19) diventa

$$\sum_{h=1}^{h=k(n-1)} P_h(n) = k^2 \frac{n(n-1)}{2} \tag{22}$$

Assegnando a k particolari valori, e scegliendo i numeri n in modo che $\varphi(n)$ soddisfi a determinate condizioni, dalle (18), (19) e (22) si possono dedurre importanti e svariate proprietà dei numeri intieri.

Così, per esempio, per $n = 2$, *si ha la nota proprietà dei primi* k *numeri dispari:*

$$(23) \qquad \sum_{h=1}^{h=k} P_h(2) = k^2$$

Per

$$k = n^\alpha \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \cdots\cdots)$$

dalla (22) risulta

$$(24) \qquad \sum_{h=1}^{h=(n-1)n^\alpha} P_h(n) = \frac{n-1}{2}\, n^{2\alpha+1}$$

dalla quale si ricava che *la somma dei primi*

2 6 18 54 ....

numeri primi con 3 è uguale rispettivamente a

$3 \quad 3^3 \quad 3^5 \quad 3^7 \cdots\cdots$

mentre *la somma dei primi*

4 20 100 500 ....

numeri primi con 5 è uguale rispettivamente a

$2 \times 5 \quad 2 \times 5^3 \quad 2 \times 5^5 \quad 2 \times 5^7 \cdots\cdots$

e così via.

Se nella (22) poniamo

$$k = (n-1)^\alpha \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \cdots\cdots)$$

risulta

$$(25) \qquad \sum_{h=1}^{h=(n-1)^{\alpha+1}} P_h(n) = \frac{n}{2}\,(n-1)^{2\alpha+1}$$

dalla quale si ricava che *la somma dei primi*

2 4 8 16 ....

numeri primi con 3 è uguale rispettivamente a

$3 \quad 3 \times 2^2 \quad 3 \times 2^4 \quad 3 \times 2^6 \cdots\cdots$

mentre *la somma dei primi*

4 16 64 256 ....

numeri primi con 5 è uguale rispettivamente a

$10 \quad 10 \times 4^2 \quad 10 \times 4^4 \quad 10 \times 4^6 \cdots\cdots$

E così via di seguito.

***

Somma dei primi h numeri della successione dei numeri primi con un dato numero n, disposti in ordine crescente, quando h non è multiplo di $\varphi(n)$.

17. Nel § 14 abbiamo calcolato la somma dei primi h numeri della successione dei numeri primi con un dato numero n, per h multiplo di $\varphi(n)$.

Qui ci proponiamo ora di risolvere la stessa questione, nel caso in cui h non sia multiplo di $\varphi(n)$, dimostrando il seguente

Teorema 3° — *La somma dei primi* h *numeri della successione crescente dei numeri primi con un dato numero* n, *è data dalla*

$$(26) \qquad \sum_{h=1}^{h=k\cdot\varphi(n)+r} P_h(n) = kn\left[\frac{k\cdot\varphi(n)}{2}+r\right] + (p_1+p_2+\cdots+p_r)$$

in cui k *rappresenta il quoziente intero di* h *per* φ(n), r *il resto di questa divisione, e* $p_1\ p_2 \cdots p_r$ *i primi* r *numeri primi con* n, *minori di* n.

Ponendo, infatti

$$h = k\cdot\varphi(n) + r$$

si ha

$$(27) \qquad \sum_{h=1}^{h=k\cdot\varphi(n)+r} P_h(n) = \sum_{h=1}^{h=k\cdot\varphi(n)} P_h(n) + \sum_{h=k\cdot\varphi(n)+1}^{h=k\cdot\varphi(n)+r} P_h(n)$$

Dalla (19) del § 14 si ha inoltre:

$$(28) \qquad \sum_{h=1}^{h=k\cdot\varphi(n)} P_h(n) = k^2\cdot\frac{n\cdot\varphi(n)}{2}$$

e dalla (9) del § 11 risulta:

$$(29) \qquad \sum_{h=k\cdot\varphi(n)+1}^{h=k\cdot\varphi(n)+r} P_h(n) = rkn + (p_1+p_2+\ldots+p_r).$$

Sostituendo allora nella (27) i valori dati dalle (28) e (29), si ha la relazione (26), come volevasi dimostrare.

Corollario. — Se n è *primo*, risultano

$$\varphi(n) = n - 1 \qquad p_1 = 1 \qquad p_2 = 2 \ldots . p_r = r$$

e quindi dalla (26) si ha:

La somma dei primi h *numeri della successione crescente dei numeri primi con un dato numero* n, *primo anch' esso, è data dalla*

$$\sum_{h=1}^{h=k(n-1)+r} P_h(n) = \frac{(kn+r)^2 - k^2 n + r}{2} \tag{30}$$

in cui k *rappresenta il quoziente intero della divisione di* h *per* (n — 1), *ed* r *il resto di tale divisione.*

Esempi numerici. — 1°. Supponiamo di voler calcolare la somma dei primi 40 numeri della successione dei numeri primi con $n = 11$, disposti in ordine crescente. Risultando $40 = 4(11 - 1)$, dalla (30) si ha subito:

$$\sum_{h=1}^{h=40} P_h(11) = 880$$

2°. Similmente, essendo $32 = 2(13 - 1) + 8$, dalla (30) si ha:

$$\sum_{h=1}^{h=32} P_h(13) = 556$$

E così via di seguito.

*
* *

18. Osservazione. — Supponendo $n = a^\alpha b^\beta \cdots l^\lambda$, poniamo

$$n' = a \cdot b \cdots l$$

e consideriamo la funzione $\varphi(n')$.

Se h non è multiplo di $\varphi(n)$, potrebbe esserlo di $\varphi(n')$, ed in questo caso si potrebbe risparmiare il calcolo dei numeri $p_1 p_2 \ldots . p_r$ che compariscono nella (26). Ponendo, infatti

$$h = k' \cdot \varphi(n') \qquad (k' = 1, 2, 3 \ldots .)$$

risulta la seguente relazione analoga alla (19):

$$\sum_{h=1}^{h=k' \cdot \varphi(n')} P_h(n) = k'^2 \cdot \frac{n' \cdot \varphi(n')}{2} \tag{31}$$

Se invece h non è multiplo di $\varphi(n')$, indicando con r' il resto della divisione di h per $\varphi(n')$, e con

$$p_1' \quad p_2' \quad \ldots \ldots \quad p'_{r'}$$

i primi r' numeri primi col prodotto $a \cdot b \ldots l$, minori del prodotto medesimo, si ottiene:

$$(32) \qquad \sum_{h=1}^{h=k\cdot\phi(n)+r} P_h(n) = \sum_{h=1}^{h=k'\cdot\phi(n')} P_h(n) + \sum_{h=k'\cdot\phi(n')+1}^{h=k'\cdot\phi(n')+r'} P_h(n)$$

Ma dalla (15) del § (13) risulta

$$(33) \qquad \sum_{h=k'\cdot\phi(n')+1}^{h=k'\cdot\phi(n')+r'} P_h(n) = r'k'n' + (p_1' + p_2' + \ldots + p'_{r'})$$

quindi, sostituendo nella (32) i valori dati dalle (31) e (33), si ottiene:

$$(34) \qquad \sum_{h=1}^{h=\phi(n)+r} P_h(n) = k'n' \left[\frac{k'.\varphi(n')}{2} + r'\right] + (p_1' + p_2' + \ldots + p'_{r'}).$$

Esempi numerici. — 1°. Supponiamo di voler calcolare la somma dei primi 30 numeri primi con 24. Risultando $24 = 2^3 \times 3$, $\varphi(2 \times 3) = 2$ e $30 = 15 . \varphi(2 \times 3)$, dalla (31) si ricava immediatamente:

$$\sum_{h=1}^{h=30} P_h(24) = 1350$$

2°. Risultando invece $21 = 10 . \varphi(2 \times 3) + 1$, e ricordando che è $p_1' = 1$, dalla 34 si ottiene

$$\sum_{h=1}^{h=21} P_h(24) = 661$$

E così via di seguito.

*
* *

19. I risultati ottenuti precedentemente sono, senza dubbio, fecondi di numerose applicazioni.

È di tali applicazioni che ci riserbiamo di occuparci in un altro nostro lavoro.

Le ripartizioni semplici

SILVIO MINETOLA (Bari)

In questa Nota, generalizzando e semplificando ad un tempo le dimostrazioni, raccolgo alcuni dei principali risultati da me esposti in un altro lavoro [1]), nel quale presentai il concetto com-combinatorio di ripartizione.

In un secondo momento, approfondendo l' analisi, studio alcune relazioni che legano le ripartizioni alle permutazioni ed alle disposizioni. A tale studio mi ha condotto principalmente il desiderio di dimostrare, servendomi del concetto di ripartizione, una formola, di cui da tempo vi è traccia nei lavori di alcuni *Autori* francesi.

1. **Definizione delle ripartizioni.** — Chiamiamo *ripartizioni* di m oggetti distinti in n gruppi, o della classe n^{ma}, i modi differenti secondo cui è possibile dividere (partire) gli oggetti dati in n parti o gruppi. Indicheremo con $R_{m,n}$ il numero delle ripartizioni di m oggetti differenti in n gruppi.

Così ad es., se si considerano i 4 oggetti a_1, a_2, a_3, a_4, le ripartizioni di essi in 2 gruppi sono:

$$\begin{array}{ll} a_1 - a_2\ a_3\ a_4 & \qquad a_1\ a_2 - a_3\ a_4 \\ a_2 - a_1\ a_3\ a_4 & \qquad a_1\ a_3 - a_2\ a_4 \\ a_3 - a_1\ a_2\ a_4 & \qquad a_1\ a_4 - a_2\ a_3 \\ a_4 - a_1\ a_2\ a_3 & \end{array}$$

e si ha quindi:

$$R_{4,2} = 7.$$

Se gli m oggetti da ripartirsi negli n gruppi si supponessero eguali fra loro, si ricadrebbe nella partizione dei numeri, poten-

[1]) *Principî di analisi combinatoria con applicazioni a problemi di decomposizione e di partizione dei numeri.* (Gior.le di *Battaglini*, Vol. 45°, 1907, e 47°, 1909).

dosi gli ordinari numeri razionali considerare come aggregati di elementi eguali [2]). Ma per quanto riguarda questo caso e l' altro, di gran lunga più complicato, nel quale si suppongono solo in parte distinti gli m oggetti dati, rimandiamo per ora al citato nostro lavoro

2. **Espressione di $R_{m,n}$ mediante le ripartizioni fra meno di m oggetti e di classe inferiore ad n.** Supponiamo determinate tutte le $R_{m,n}$ e consideriamone una di esse. Se in questa si separano k gruppi, rimane una ripartizione della classe $(n-k)^{ma}$ fra meno di m oggetti. Intanto, k gruppi possono separarsi in $\binom{n}{k}$ maniere differenti, cosicchè dalla ripartizione che si considera possono ottenersi $\binom{n}{k}$ ripartizioni della classe $(n-k)^{ma}$. Se lo stesso ragionamento si ripete per ciascuna delle $R_{m,n}$, si arriva a concludere che sono $\binom{n}{k} R_{m,n}$ le ripartizioni della classe $(n-k)^{ma}$, fra meno di m oggetti, contenute in esse.

Possiamo peraltro avere una nuova espressione dello stesso numero.

Su $n-k$ gruppi di ciascuna ripartizione delle $R_{m,n}$, trovasi ripartita una combinazione qualsiasi di $m-k$, o di $m-k-1$, $m-k-2$, . . . , $n-k$ oggetti.

---

[2]) Che la partizione dei numeri, caso particolare del problema generale della ripartizione di elementi qualsiasi, possa considerarsi come un problema combinatorio, è fatto da tempo osservato. I matematici inglesi in ispecie, con *Cayley*, *Sylvester* e *Mac-Mahon* fra i primi, la hanno quasi sempre considerata da un tal punto di vista. Non è stato però mai messo in luce il concetto combinatorio contenuto, direi, nello stesso significato della parola *ripartizione* o *partizione*, ed i problemi sulla partizione dei numeri si sono fatti dipendere da altri concetti combinatorii, come, ad es., dalle combinazioni sottoposte a determinate condizioni. Sta di fatto, invece, che il concetto combinatorio di ripartizione, fecondo di nuovi e semplici risultati, può stare onorevolmente accanto ai concetti classici di disposizione, combinazione, ecc. Quel poco che è esposto in questa Nota, mi pare già sufficiente a giustificare tale asserto.

Ora, $m-k$ oggetti si ripartono in $n-k$ gruppi in $R_{m-k,\,n-k}$ modi differenti, cosicchè essendo $\binom{m}{m-k}$ il numero delle combinazioni di m oggetti $m-k$ ad $m-k$, nelle $R_{m,n}$ vi saranno $\binom{m}{m-k} R_{m-k,\,n-k}$ ripartizioni della classe $(n-k)^{ma}$, composte ciascuna di $m-k$ oggetti. Similmente, le $R_{m,n}$ conterranno $\binom{m}{m-k-1} R_{m-k-1,\,n-k}$ ripartizioni della classe $(n-k)^{ma}$, composte ciascuna di $m-k-1$ oggetti, e lo stesso può ripetersi successivamente sino alle $\binom{m}{n-k} R_{n-k,\,n-k}$.

Il numero totale delle ripartizioni della classe $(n-k)^{ma}$ contenute nelle $R_{m,n}$ è dunque anche espresso da

$$\binom{m}{m-k} R_{m-k,n-k} + \binom{m}{m-k-1} R_{m-k-1,\,n-k} + \dots + \\ + \binom{m}{n-k} R_{n-k,\,n-k},$$

epperò si ha:

$$\binom{n}{k} R_{m,n} = \binom{m}{m-k} R_{m-k,\,n-k} + \binom{m}{m-k-1} R_{m-k-1,\,n-k} + \dots + \\ + \binom{m}{n-k} R_{n-k,\,n-k},$$

da cui

$$R_{m,n} = \frac{1}{\binom{n}{k}} \left[\binom{m}{m-k} R_{m-k,\,n-k} + \binom{m}{m-k-1} R_{m-k-1,\,n-k} + \dots + \\ + \binom{m}{n-k} R_{n-k,\,n-k} \right]^{(1)},$$

(1) Questa formola, per $k=1$, è riportata nei *Principii* ecc. l. c. n. 3, § 3°.

e per $k = 1$,

$$R_{m,n} = \frac{1}{n}\left[\binom{m}{m-1} R_{m-1,n-1} + \binom{m}{m-2} R_{m-2,n-1} + \dots + \right.$$

$$\left. + \binom{m}{n-1} R_{n-1,n-1}\right].$$

3. **Una formola di ricorrenza e sua applicazione alla costruzione delle tavole dei valori di** $R_{m,n}$. — Daremo una formola ricorrente, notevole per semplicità ed anche per la sua indipendenza da altri concetti combinatorii.

Fissato un certo elemento, ad es. a_1, fra $a_1, a_2, \dots a_m$, distinguiamo le $R_{m,n}$ in due classi, assegnando in una quelle che contengono a_1 isolato in un gruppo, e nell'altra quelle che contengono a_1 insieme ad altri elementi in qualche gruppo.

Se dalle $R_{m,n}$ della prima classe togliamo a_1, restano le ripartizioni dei rimanenti oggetti $(a_2, a_3, \dots, a_m)$ in $n-1$ gruppi; si hanno perciò $R_{m-1,n-1}$ ripartizioni della prima classe.

Se consideriamo una ripartizione della seconda classe, togliendo da essa l'elemento a_1 dal gruppo che lo contiene, si ottiene una ripartizione degli $m-1$ elementi $a_2, a_3, \dots, a_m$ in n gruppi; questa intanto può ottenersi in tutto n volte, dapoichè l'elemento a_1 può trovarsi in ciascuno dei suoi n gruppi differenti. Corrispondono dunque n ripartizioni delle $R_{m,n}$ ad ognuna delle $R_{m-1,n}$, cosicchè si hanno in tutto $nR_{m-1,n}$ ripartizioni della 2ª classe.

Si arriva così alla formola

$$R_{m,n} = nR_{m-1,n} + R_{m-1,n-1} \quad (1)$$

[1]

La (1) permette di potere costruire rapidamente una tavola dei valori di $R_{m,n}$. Nel quadro seguente il valore di $R_{m,n}$ è nell'incrocio della m^{ma} verticale con la n^{ma} orizzontale. Per calcolare nell'm^{ma} verticale l'elemento n^{mo}, basta considerare nella mede-

(1) Cfr. *Principii* ecc. l. c. n. 4, § 1°.

sima orizzontale il numero precedente e moltiplicarlo per n, ed a tale prodotto bisogna poi aggiungere il numero che precede quello moltiplicato lungo la verticale.

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8 [1]	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	....
2		1	3	7	15	31	63	127	....
3			1	6	25	90	301	966	...
4				1	10	65	350	1701	...
5					1	15	140	1050	....
6						1	21	266	...
7							1	28	....
8								1	...

4. **Relazioni fra le ripartizioni e le permutazioni.** — Le ripartizioni in n gruppi di m elementi distinguiamole in simili e dissimili. Diremo simili quelle che nei singoli gruppi conterranno uno stesso numero di elementi.

Così, sono simili le ripartizioni

$$a - bc - defh$$
$$a - cd - befh$$
$$b - acfh - de$$

e dissimili le altre seguenti:

$$a - bc - defh$$
$$ab - cd - efh.$$

Ora, raccogliendo in una stessa classe tutte le ripartizioni tra loro simili, quante classi possono formarsi con tutte le $R_{m,n}$?

È noto che esse sono tante, quanti sono i modi differenti secondo cui il numero m può considerarsi come somma di n numeri interi e positivi, e che può stabilirsi una corrispondenza

---

[1] Con questi numeri, che si presentano del tutto naturalmente in analisi combinatoria, si è incontrato di recente L. Galvani, e ne ha determinato la relazione ricorrente (1). (*Bollettino di Matematica* N. 5-6-7-8 - 1911). Lo stesso Autore preannunzia uno studio su di essi. Un altro Autore che anche recentemente si è incontrato con questi stessi numeri, preannunziando di volersene occupare di proposito, è V. Melfi-Molè (*Periodico di Matematica*, Fas. 3°, Novembre-Dicembre, 1910).

biunivoca fra le classi delle ripartizioni di m oggetti in n gruppi e le partizioni del numero m in n numeri [1].

Indicando allora con $R_{m,n}^{(\overset{(1)}{\alpha},\ldots,\overset{(p)}{\alpha},\overset{(1)}{\beta},\ldots,\overset{(q)}{\beta}\ldots)}$ il numero delle ripartizioni simili con α, β,... elementi rispettivamente in p, q,... gruppi, avremo:

$$R_{m,n} = \Sigma\, R_{m,n}^{(\overset{(1)}{\alpha},\ldots,\overset{(p)}{\alpha},\overset{(1)}{\beta},\ldots\overset{(q)}{\beta}\ldots)} \qquad (2)$$

intendendo di estendere la Σ a tutti i sistemi degli n numeri $\overset{(1)}{\alpha}, \overset{(2)}{\alpha}, \ldots \overset{(p)}{\alpha}, \overset{(1)}{\beta} \ldots \overset{(q)}{\beta} \ldots$ la cui somma è m.

Cerchiamo ora un' espressione di $R_{m,n}^{(\overset{(1)}{\alpha},\ldots\overset{(p)}{\alpha},\overset{(1)}{\beta},\ldots\overset{(q)}{\beta},\ldots)}$.

Consideriamo dunque una ripartizione con p gruppi contenenti ciascuno α elementi, e successivamente con altri q gruppi di β elementi ciascuno, ecc.

Tutti gli elementi della ripartizione formano una permutazione qualsiasi degli m elementi ripartiti. Permutando in tutti i modi possibili gli α elementi di un gruppo, si avranno in tutto $\alpha!$ permutazioni distinte. Ed operando nello stesso modo successivamente sugli altri gruppi con α, β, ... elementi, in tutte le permutazioni già ottenute e su quelle che man mano si ottengono, se ne avranno in tutto

$$\underset{(1)}{\alpha}!\;\underset{(2)}{\alpha}!\ldots\underset{(p)}{\alpha}!\;\underset{(1)}{\beta}!\ldots\underset{(q)}{\beta}!\ldots = (\alpha!)^p\,(\beta!)^q\ldots$$

Permutando infine fra di loro i p gruppi con α elementi, e poi gli altri q,... si otterranno dalla ripartizione in esame

$$(p!\;q!\ldots)\,(\alpha!)^p\,(\beta!)^q\ldots$$

permutazioni distinte degli m elementi.

A questo punto, per ottenere tutte le rimanenti permutazioni delle $m!$, bisognerebbe permutare in tutti i modi possibili gli elementi di ciascun gruppo con quelli degli altri gruppi, e dopo ogni scambio di due elementi, ripetere, come prima, le permutazioni nei singoli gruppi e dei gruppi fra loro.

---

[1] Cfr., ad es., la mia Nota « *Sulle combinazioni con elementi non tutti distinti* » n. 2 (Giornale di *Battaglini*, 1909), dove, sostanzialmente, trovasi una dimostrazione di quanto è quì affermato.

Queste rimanenti permutazioni però si otterranno operando, come sulla ripartizione considerata, sulle altre ad essa simili, le quali differiscono tra loro e dalla prima proprio per lo scambio degli elementi (avvenuto in tutti i modi possibili) che compongono i gruppi. Da ognuna di queste si otterranno

$$(p!\ q!\dots)\ (\alpha!)^p\ (\beta!)^q\dots$$

permutazioni distinte fra loro e da quelle già ottenute, ed in conclusione quindi si avrà:

$$(p!\ q!\dots)\ (\alpha!)^p\ (\beta!)^q\dots\ R_{m,n}^{(\overset{(1)}{\alpha},\dots\overset{(p)}{\alpha},\ \overset{(1)}{\beta},\dots\overset{(q)}{\beta}\dots)} = m!,$$

da cui

$$R_{m,n}^{(\overset{(1)}{\alpha},\dots\overset{(p)}{\alpha},\ \overset{(1)}{\beta},\dots\overset{(q)}{\beta}\dots)} = \frac{1}{p!\ q!\dots}\ \frac{m!}{(\alpha!)^p\ (\beta!)^q\dots}.$$

Questa formola permette di calcolare, fra le $R_{m,n}$, il numero di quelle fra loro simili.

Tenendo poi conto della (2) si ottiene:

$$R_{m,n} = m!\ \Sigma \frac{1}{p!\ q!\dots}\ \frac{1}{(\alpha!)^p\ (\beta!)^q\dots}. \tag{3}$$

Per dare un esempio, applicheremo la (3) al calcolo di $R_{8,5}$.

Tenendo presenti i sistemi di 5 numeri la cui somma è 8 si ha:

$$R_{8,5} = R_{3,5}^{(1,1,1,1,4)} + R_{8,5}^{(1,1,1,2,3)} + R_{8,5}^{(1,1\ 2,2,2)}.$$

Successivamente:

$$R_{8,5}^{(1,1,1,1,4)} = \frac{1}{4!\ 1!}\ \frac{8!}{(1!)^4\ (4!)^1} = 70;$$

$$R_{8,5}^{(1,1,1,2,3)} = \frac{1}{3!\ 1!\ 1!}\ \frac{8!}{(1!)^3\ (2!)^1\ (3!)^1} = 560;$$

$$R_{8,5}^{(1,1,2,2,2)} = \frac{1}{2!\ 3!}\ \frac{8!}{(1!)^2\ (3!)^3} = 420.$$

Consegue:

$$R_{8,5} = 70 + 560 + 420 = 1050.$$

5. **Relazione fondamentale fra le ripartizioni e le disposizioni con ripetizione.** — Richiamiamo [1] che per combinazioni semplici di n oggetti m ad m, per $n<m$, intendiamo i diversi modi secondo cui con tutti gli n oggetti, ripetendoli tutti o in parte, si possono occupare m posti, ritenendo però come identici due modi, che differissero solo per l'ordine degli oggetti.

Dati, ad es., i 3 oggetti a, b, c, le $C_{3,5}$ sarebbero date da

$$abccc\ ,\ abbbc\ ,\ aaabc\ ,\ abbcc\ ,\ aabbc\ ,\ aabcc\ .$$

È facile riconoscere peraltro che le $C_{n,m}$ così definite, sono, tra le combinazioni con ripetizione di n oggetti m ad m, quelle che contengono n oggetti differenti, cosicchè, indicando il numero di quest' ultime con $C'^{(n)}_{n,m}$, si ha:

$$C_{n,m} = C'^{(n)}_{n,m}\ , \text{ per } n<m\ .$$

Richiamiamo anche che tra i sistemi di n numeri interi e positivi la cui somma è m ed i sistemi di n oggetti distinti che si ripetono, tutti o in parte, in modo da formarne in tutto m, esiste una corrispondenza biunivoca, ed infine che si ha:

$$C_{n,m} = C'^{(n)}_{n,m} = \Sigma \frac{n!}{p!\, q! \ldots}\ ,$$

intendendo di estendere la Σ a tutti i sistemi degli n numeri $\overset{(1)}{\alpha}, \ldots, \overset{(p)}{\alpha}, \ldots \overset{(1)}{\beta}, \ldots \overset{(q)}{\beta}, \ldots$ la cui somma è m [2].

Ora, se nelle $C'^{(n)}_{n,m}$ eseguiamo tutte le permutazioni possibili, otteniamo le disposizioni con ripetizione di n oggetti m ad m, che contengono n oggetti differenti.

---

[1] Per quanto riguarda tutti i richiami che facciamo in questo numero (un po' ampiamente per la maggiore intelligenza della dimostrazione), si vegga la Nota « *Sulle combinazioni con elementi non tutti distinti* » (Giornale di *Battaglini*. Vol. 47°, 1909, n.ri 1, 2 e 3), dove è studiato nel modo più generale il problema delle combinazioni con elementi qualsiasi.

[2] I numeri $p, q, \cdots$ indicano dunque quanti sono i numeri rispettivamente eguali fra di loro nei detti sistemi. Si ha evidentemente

$$1 \leqq p \leqq n\ ;\ 1 \leqq p \leqq n\ ;\ \cdots$$

$$p + q + \cdots = n$$

$$\alpha p + \beta q + \cdots = m$$

Intanto, al sistema degli n numeri $\overset{(1)}{\alpha}, .. , \overset{(p)}{\alpha}, \overset{(1)}{\beta}, . , \overset{(q)}{\beta}, ...$ corrisponde una combinazione nella quale p degli oggetti distinti si ripetono α volte ciascuno, altri q si ripetono β volte ciascuno, ecc., dimodochè da essa si otterranno:

$$\frac{m!}{\underset{(1)}{\alpha}! \ldots \underset{(p)}{\alpha}! \underset{(1)}{\beta}! .. \underset{(q)}{\beta}! ..} = \frac{m!}{(\alpha!)^p (\beta!)^q \ldots}$$

disposizioni, e da tutte le $C'^{(n)}_{n,m}$ se ne avranno quindi:

$$\Sigma \frac{n!}{p!\, q! \ldots} \; \frac{m!}{(\alpha!)^p (\beta!)^q ..}$$

ossia, per la (3),

$$n!\, R_{m,n}.$$

Può enunciarsi dunque:

Nelle disposizioni con ripetizione di n *oggetti* m *ad* m, *il numero di quelle che contengono* n *oggetti differenti è dato da* $n!\, R_{m,n}$.

E se queste $n!\, R_{m,n}$ disposizioni con ripetizione le chiamiamo, per analogia a quanto si è fatto per le combinazioni, disposizioni semplici di n oggetti m ad m per $n < m$, ed indichiamo il loro numero col noto simbolo $D_{n,m}$, si avrà:

$$D_{n,m} = n!\, R_{m,n} \;, \text{ per } n < m \tag{4}$$

Per $n = m$, da essa si ritorna al noto risultato

$$D_{n,n} = n!\, R_{n,n} = n!.$$

Il simbolo $D_{n,m}$ ha dunque ora significato per $n \gtreqless m$.

6. **Le disposizioni con ripetizione espresse mediante le ripartizioni.** — Consideriamo le n^m disposizioni con ripetizione di n dati oggetti m ad m, che denoteremo con $D'_{n,m}$. Supporremo altresì, per ora, che sia $n \leq m$.

Se si pongono in uno stesso gruppo quelle disposizioni che contengono uno stesso numero di oggetti differenti, da tutte le n^m si ricavano n gruppi, che comprendono rispettivamente le disposizioni con $n, n-1, . , n-h, ... 2, 1$ oggetti differenti. Quelle con certi $n - h$ oggetti distinti assegnati, per quanto si è visto

al n^{ro} precedente, sono date da $D_{n-h,m}$, e potendosi da n oggetti ricavare $\binom{n}{n-h}$ combinazioni differenti di $n-h$ oggetti, si conclude che saranno

$$\binom{n}{n-h} D_{n-h,m}$$

tutte le disposizioni delle n^m, che contengono $n-h$ oggetti distinti ciascuna. Facendo variare h da 0 ad $n-1$, si ricava:

$$D'_{n,m} = \binom{n}{n} D_{n,m} + \binom{n}{n-1} D_{n-1,m} + \binom{n}{n-2} D_{n-2,m} + \dots +$$
$$+ \binom{n}{2} D_{2,m} + \binom{n}{1} D_{1,m}$$

da cui, per la (1),

$$D'_{n,m} = \binom{n}{n} n!\, R_{m,n} + \binom{n}{n-1} (n-1)!\, R_{m,n-1} + \dots +$$
$$+ \binom{n}{2} 2!\, R_{m,2} + \binom{n}{1} 1!\, R_{m,1}.$$

Per $n > m$, e propriamente per $m = n - k$ ($k \geqq 1$), la formula precedente si sarebbe ottenuta, evidentemente, priva dei suoi primi k termini.

Si sarebbe avuto, cioè;

$$D'_{n,n-k} = \binom{n}{n-k} (n-k)!\, R_{n-k,n-k} +$$
$$\binom{n}{n-k-1} (n-k-1)!\, R_{n-k,n-k-1} + \dots + \binom{n}{1} 1!\, R_{n-k,1}.$$

7. **Sopra un' altra espressione di $R_{m,n}$** — Una ricerca che a noi spettava fare, era quella di vedere se nell' analisi esistesse un' espressione che fosse equivalente al valore di $R_{m,n}$.

Per risolvere il problema di determinare in quanti modi differenti un numero, decomponibile in m fattori primi distinti,

si può decomporre nel prodotto di n fattori, è nota l'espressione

$$\frac{1}{n!}\left[n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \ldots\ldots \pm \binom{n}{n-1}\right].$$ [1]

Ora, come noi vedremo al n.^{ro} 8, tale numero di modi differenti è dato da $R_{m,n}$; rimane dunque per ciò stesso stabilita la formola

$$R_{m,n} = \frac{1}{n!}\left[\binom{n}{n}n^m - \binom{n}{n-1}(n-1)^m + \binom{n}{n-2}(n-2)^m - \right.$$

$$\left. - \ldots \pm \binom{n}{1}1^m\right], \tag{5}$$

di cui però ne diamo qui una seconda dimostrazione.

Per il teorema fondamentale del n.^{ro} 5, è dato da $n!\,R_{m,n}$ il numero delle disposizioni con ripetizione di n oggetti m ad m, che contengono n oggetti differenti.

Dimostreremo che questo stesso numero è dato da

$$\binom{n}{n}n^m - \binom{n}{n-1}(n-1)^m + \ldots \pm \binom{n}{n-h}(n-h)^m \mp \ldots \pm$$

$$\pm \binom{n}{n-k}(n-k)^m \mp \ldots \pm \binom{n}{1}1^m. \tag{6}$$

Innanzi tutto è chiaro che le disposizioni con ripetizione con n oggetti differenti si trovano numerate nel solo 1° termine della (6).

D'altra parte, in ciascuno dei primi $k+1$ termini della stessa (6), e solo in essi, sono numerate, fra le altre, delle dispo-

---

[1] Cfr. *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* (Tomo I, vol. I, fas. I, pag. 78), dove sono richiamati, a proposito di questa espressione, il « *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* » di Lacroix ed alcuni lavori di L. D. H. Picquet. Nella citata opera di S. F. Lacroix (2ª Ed., 1819) non siamo riusciti però a trovare alcuna *traccia* dell'espressione in discorso.

sizioni con ripetizione composte ciascuna con $n-k$ oggetti differenti ($k = 1, 2, \dots, n-1$).

Siano

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-k} \tag{7}$$

certi $n-k$ elementi degli n dati. Consideriamo ora un termine qualsiasi della (6) d'ordine non superiore a $k+1$, e sia, ad es., il termine $(h+1)^{mo}$, che è $\binom{n}{n-h}(n-h)^m$, e stabiliamo quante volte la combinazione composta dagli oggetti (7) è contenuta nelle combinazioni $n-h$ ad $n-h$ di tutti gli n oggetti. Fissati gli oggetti $a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$, i rimanenti k possono combinarsi sui restanti $n-h-(n-k) = k-h$ posti, in un numero di modi differenti dato da $\binom{k}{k-h}$, cosicchè può dirsi che la combinazione (7) è contenuta $\binom{k}{k-h}$ volte in tutte le $\binom{n}{n-h}$ combinazioni, e che quindi nelle $\binom{n}{n-h}(n-h)^m$ disposizioni con ripetizione m ad m di tutte le combinazioni di $n-h$ oggetti, ve ne sono $\binom{k}{k-h}(n-k)^m$ degli oggetti $a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$.

Facendo ora variare h da 0 a k, si ricava che nei primi $k+1$ termini della (6) vi sono

$$\left[\binom{k}{k} - \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k-2} - \dots \pm \binom{k}{0}\right](n-k)^m = 0 \,.\, (n-k) = 0$$

disposizioni con ripetizione, che contengono $n-k$ oggetti differenti ciascuna ($k = 1, 2, \dots, n-1$.

Dopo ciò resta stabilita la formula

$$n!\, R_{m,n} = n^m - \binom{n}{n-1}(n-1)^m + \binom{n}{n-2}(n-2)^m - \dots \pm \binom{n}{1} 1^m,$$

da cui si ricava la (5).

8. **Applicazioni varie.** — 1. La più importante applicazione dei numeri $R_{m,n}$ la si ha indubbiamente nel problema di decomposizione dei numeri [1], ossia nel problema di

---

[1] *Principii* ecc. *l. c.*, § 1, n. 7.

Determinare il numero dei modi distinti secondo cui un numero intero M *può considerarsi come prodotto di* n *numeri interi.*

Supponiamo che, decomposto M in fattori primi, si sia avuto:

$$M = a_1\, a_2 \ldots a_m\,,$$

essendo $a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_m$.

Gli m numeri distinti $a_1, a_2, \ldots, a_m$ possono ripartirsi in n gruppi, in $R_{m,n}$ modi differenti; intanto, determinata che sia una delle ripartizioni, eseguendo in ognuno dei suoi n gruppi il prodotto dei numeri di cui essi si compongono, si otterranno n numeri il cui prodotto è M, ed in tutto quindi il numero M potrà considerarsi in $R_{m,n}$ modi distinti come prodotto di n numeri.

Si può dunque enunciare:

Un numero, decomponibile in m *fattori primi differenti, si può decomporre in* n *fattori, in* $R_{m,n}$ *maniere distinte, e si può decomporre in fattori in un numero totale di modi distinti dato dalla somma*

$$R_{m,m} + R_{m,m-1} + \ldots + R_{m,2} + R_{m,1}\,.$$

2. Applicheremo ora la notevole formula (1) per determinare nuove espressioni di $R_{m,n}$.

Si ha successivamente:

$$R_{m,n} = n\, R_{m-1,n} + R_{m-1,\, n-1}$$
$$n\, R_{m-1,n} = n^2 R_{m-2,n} + n\, R_{m-2,n-1}$$
$$n^2\, R_{m-2,n} = n^3 R_{m-3,n} + n^2\, R_{m-3,\, n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^{m-n-1}\, R_{n+1,n} = n^{m-n}\, R_{n,m} + n^{m-n-1}\, R_{n,\,n-1}\,.$$

Sommando, ed osservando che $R_{n,n} = R_{n-1,\,n-1}$, si ricava:

$$R_{m,n} = n^{m-n}\, R_{n-1,\,n-1} + n^{m-n-1}\, R_{n,n-1} + n^{m-n-2}\, R_{n+1,n-1} + \\ + \ldots + n\, R_{m-2,n-1} + n^0\, R_{m-1,n-1}\,.$$

Facendo in essa $n = 2$, si ottiene:

$$R_{m,2} = 2^{m-2} + 2^{m-3} + 2^{m-4} + \ldots + 2^1 + 2^0 = \sum_0^{m-2} 2^x\,,$$

e cioè:

Il numero $R_{m,2}$ *è eguale alla somma delle prime* m — 1 *potenze di 2, a cominciare da quella di esponente 0.*

Se nella (1), che è

$$R_{m,n} = n R_{m-1,n} + R_{m-1,n-1},$$

si applica essa stessa al termine $R_{m-1,n-1}$, si ha:

$$R_{m,n} = n R_{m-1,n} + (n-1) R_{m-2,n-1} + R_{m-2,n-2},$$

e continuando analogamente sui termini della forma $R_{n-k,n-k}$ delle successive espressioni che si ottengono, si perviene alla formula:

$$R_{m,n} = n R_{m-1,n} + (n-1) R_{m-2,n-1} + (n-2) R_{m-3,n-2} + \\ + \ldots + 2 R_{m-n+1,2} + R_{m-n,1}.$$

ADDIZIONE ALLA NOTA

Una semplice proprietà delle serie di potenza etc. (1)

LUIGI GALVANI (Cagliari)

1. — Si è dimostrato che essendo

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

una serie di potenze convergente entro un determinato cerchio di convergenza, anche la serie di potenze che se ne ottiene moltiplicando ordinatamente i termini per i numeri

$$p^q,\ (p+1)^q,\ (p+2)^q, \ldots \quad (p \text{ intero})$$

è convergente entro lo stesso cerchio della prima, ed è inoltre:

$$(4) \qquad p^q a_0 + (p+1)^q a_1 x + \ldots + (p+n)^q a_n x^n + \ldots = \\ = p^q f + g_{q+1,2}\, x f' + g_{q+1,3}\, x^2 f'' + \ldots + g_{q+1,q+1}\, x^q f^{(q)}$$

dove i coefficienti $g_{r,s}$ si possono facilmente calcolare mediante una relazione ricorrente.

Ora, che la serie primo membro della (4) ammettesse lo stesso cerchio di convergenza della (1) si poteva asserire a priori ricordando che *se φ_n è una quantità che cresce indefinitamente con* n *e per la*

---

(1) Cfr. questo *Bollettino* N.i 5-6-7-8 dell'Annata X (1911). Le uguaglianze che già comparvero nella Nota ricordata, vengono quì riprese con gli stessi numeri (1), (4), (27) ecc.

quale il modulo del rapporto $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$ *tende all'unità al crescere indefinito di* n, *la serie* $\Sigma \varphi_n a_n x^n$ *ha lo stesso cerchio di convergenza della serie* $\Sigma a_n x^n$ (1).

Naturalmente la (4) esprime qualche cosa di più che la sola convergenza della serie al primo membro, in quanto fornisce la somma di tale serie.

2. — Poichè il processo di dimostrazione della formula (4) consiste essenzialmente nell'eseguire successivamente ed alternativamente sulla (1) le seguenti operazioni: moltiplicazione per x e derivazione rispetto ad x, così si conclude che la serie primo membro della (4) potrebbe anche non convergere in quei punti della circonferenza di convergenza in cui pure convergesse eventualmente la (1). Perciò si è enunciato il teorema al § 1, che forma l'oggetto principale della Nota, dicendo giustamente che la serie primo membro della (4) converge *nello* stesso cerchio della serie (1).

Il teorema del § 9 deve dunque rettificarsi dicendo che *la serie*

$$p^q + (p+1)^q \binom{m}{1} x + (p+2)^q \binom{m}{2} x^2 + \dots$$

è convergente entro lo stesso cerchio di convergenza della serie binomiale etc., e non « in tutti quei casi in cui lo sia la serie binomiale ». Conseguentemente, non sarebbe rigoroso concludere che, nell'ipotesi di $m > o$, le serie

$$(27)\quad 1 + 2\binom{m}{1} + 3\binom{m}{2} + \dots = 2^m + m 2^{m-1}$$

$$(28)\quad 1 - 2\binom{m}{1} + 3\binom{m}{2} - \dots = 0$$

$$(29)\quad 1 + 2^2\binom{m}{1} + 3^2\binom{m}{2} + \dots = 2^m + 3m 2^{m-1} + m(m-1) 2^{m-2}$$

$$(30)\quad 1 - 2^2\binom{m}{1} + 3^2\binom{m}{2} - \dots = 0$$

siano convergenti ed abbiano le somme indicate dai secondi

(1) Dini: *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Pisa 1907, vol. 1°, pag. 70.

membri, deducendolo per $x = \pm 1$ dalle serie

$$(25) \quad 1 + 2\binom{m}{1}x + 3\binom{m}{2}x^2 + \ldots = (1+x)^m + mx(1+x)^{m-1}$$

$$(26) \quad 1 + 2^2\binom{m}{1}x + 3^2\binom{m}{2}x^2 + \ldots =$$

$$= (1+x)^m + 3mx(1+x)^{m-1} + m(m-1)x^2(1+x)^{m-2},$$

poichè di queste, a priori, si può soltanto dire che convergono per $|x| < 1$. Ma si può nondimeno dimostrare che le (27), (28), (29), (30) sono effettivamente convergenti ed hanno le somme indicate purchè si supponga nelle (27) e (28) $m > 1$, e nelle (29) e (30) $m > 2$. Difatti, ricordando (Cesàro: *Analisi alg.*, pag. 277) che per $n > 0$ si ha (convergenza assoluta):

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots$$

si concluderà che:

$$\left.\begin{aligned} 2^m &= 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \ldots\ldots \\ m\,2^{m-1} &= \qquad m + m\binom{m-1}{1} + m\binom{m-1}{2} + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} m > 1.$$

e di qui sommando per colonne risulterà appunto la (27). Similmente, dalle

$$\left.\begin{aligned} 2^m &= 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \ldots \\ 3m\,2^{m-1} &= \qquad 3m + 3m\binom{m-1}{1} + 3m\binom{m-1}{2} + \ldots \\ m(m-1)\,2^{m-2} &= \qquad\qquad m(m-1) + m(m-1)\binom{m-2}{1} + \ldots \end{aligned}\right\} m > 2$$

sommando per colonne si avrà la (29).

Le serie precedenti, prese coi termini a segni alternati costituiranno, nelle stesse ipotesi per m, altrettanti sviluppi dello zero;

per esempio:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \ldots. \\ -m0 &= -m + m\binom{m-1}{1} - m\binom{m-1}{2} + \ldots. \end{aligned}\right\} m > 1$$

e quindi, addizionate per colonne daranno le (28) e (30)

3. — Finalmente al § 12 deve intendersi che nella serie

$$p^q x - (p+2)^q \frac{x^3}{3} + (p+4)^q \frac{x^5}{5} - \ldots$$

sia $|x| < 1$.

Cagliari, novembre 1911.

Osservazioni sui principii della geometria esposti secondo il trattato del Faifofer

CARLO LEONI (Chiavari)

Di fronte all'importante lavoro di revisione che la critica filosofica ha accumulato sui fondamenti della geometria, l'insegnante di matematica non può non sentirsi perplesso circa alla conservazione di quei vecchi libri di testo, quali il Faifofer, che sono ispirati a metodi assai discussi dalla critica moderna. Io mi propongo di esaminare i punti principali di divergenza fra l'esposizione del Faifofer e le moderne vedute, affine di vedere se gl'inestimabili pregi didattici dell'opera possano tuttavia consigliarne la conservazione come testo per l'insegnamento razionale della geometria, passando in rapida rassegna gli argomenti fondamentali, che furono oggetto dei recenti studi critici.

Concetto di eguaglianza e postulato del movimento. — Al n. 20 (ediz. 1909 del trattato pei licei e istituti tecnici) due figure si definiscono *uguali* nel senso logico, e al n. 25 si dichiara che tale eguaglianza verrà riconosciuta quando sia possibile ottenere la congruenza delle figure mediante il movimento senza deformazione, postulato al n. 21. Indi intro-

dotta la retta (28) con opportuni postulati, si prova l'eguaglianza delle rette (33); introdotto il piano (52), si prova mediante il movimento l'esistenza e l'unicità del piano passante per tre punti non allineati (53) e quindi l'eguaglianza dei piani. Col movimento pure è riconosciuta l'eguaglianza dei segmenti e degli angoli; il cerchio (90) si considera generato dalla rotazione piana di un segmento intorno ad un suo estremo; il teorema fondamentale sulla eguaglianza di 2 triangoli è provato colla sovrapposizione (129) e così l'eguaglianza dei poligoni (199), quella dei cerchi di egual raggio (208) e quella degli archi di una circonferenza (221). Con lo stesso principio sono studiate le proprietà fondamentali dei diedri, e viene constatata la non sovrapponibilità degli angoloidi simmetrici; il 1° caso di eguaglianza dei triedri, l'eguaglianza dei prismi retti, l'equivalenza dei prismi triangolari, infine il cilindro, il cono e la sfera sono definiti come solidi di rotazione. È da notarsi però che l'A. dichiara a pag. 12 che intende far uso del postulato del movimento soltanto nei casi fondamentali, e che ricorrerà a via diversa negli altri casi, per quanto possa risultarne una dimostrazione meno semplice.

Ora è ormai riconosciuto che la definizione di eguaglianza mediante il movimento è logicamente difettosa, e si preferisce oggi di assumere come primitivo il concetto di congruenza, caratterizzandolo con opportuno sistema di postulati. Così il Pasch ammette come primitiva la nozione di congruenza per figure qualsiasi, l'Hilbert la richiede solo per i segmenti e gli angoli, e postula il 1° caso di eguaglianza dei triangoli, e il Veronese l'ammette soltanto per i segmenti, e definisce come eguali due figure quando fra i punti di esse esiste una corrispondenza biunivoca, per la quale i segmenti corrispondenti risultino uguali.

Stabilita la grave discordanza fra il metodo del trattato qui discusso e quello oggi prevalente, dovremo per essa rinunciare al trattato stesso, così pregevole per tante altre ragioni, quali la chiarezza e l'ordine delle dimostrazioni, e la facilità di assimilazione per le giovani menti, provata da un trentennio di esperienza?

« Sans doute il est dur (osserva il Poincaré) pour un maître d'enseigner ce qui ne le satisfait pas entièrement, mais la satisfaction du maître n'est pas l'unique objet de l'enseignement; on doit d'abord se préoccuper de ce qui est l'esprit de l'elève et de ce qu'on veut qu'il devienne ».

In conformità a queste auree parole dell'illustre filosofo francese cioè per la finalità che deve informare l'insegnamento, io credo che si possa conservare il testo del compianto geometra, *postulando tutte le proposizioni* sopracitate, nelle quali è fatto uso del postulato del movimento come strumento di deduzione, riducendo questo a un principio fisico, e quindi le dimostrazioni basate su di esso a verifiche sperimentali, come nel trattato del Veronese. Tali proposizioni sono d'altronde

di evidenza intuitiva, nè si può obbiettare che la loro ammissione possa scuotere l'edificio logico, poichè, come osserva la Commissione Reale per il riordinamento degli studî secondarî, il rigore di una dimostrazione non dipende dal numero dei presupposti o delle ammissioni di cui in essa si fa uso, ma dal modo con cui queste vi si trovano adoperate. E fa pure notare che per educare l'attitudine dell'alunno al ragionare preciso e rigoroso importa solo che le ammissioni, cui si faccia appello, siano chiaramente riconosciute e formulate in modo esplicito, quali siano del resto le ragioni che possano avere indotto l'insegnante ad assumerle come punto di partenza del ragionamento. E così non importa (Enriques: *Questioni sulla Geometria elementare*, pag. 29) che esista una relazione di dipendenza fra le premesse, questo potrà essere sindacabile in un corso superiore, ma non implica una condizione necessaria di rigore, importa solo che mai un nuovo dato dell'intuizione, dimenticato nelle premesse, si insinui nel ragionamento.

Concetto di linea. — Il Faifofer considera come primitivo il concetto di linea e definisce il punto come l'ente che divide o limita la linea (5, pag. 8), anzi in nota aggiunge che non possiamo pensare che una linea sia composta di punti. È noto che ora prevale un diverso indirizzo, che muove dal punto, considerato come concetto fondamentale, e riguarda la linea come un sistema di punti ordinati secondo due versi opposti. Secondo l'antico riguardo il punto è un ente che serve a fissare o tagliare la linea, preesistente ad esso, e sotto il riguardo moderno la linea è una classe di punti considerati preesistenti ad essa. Direi quasi che mentre prima, dai vecchi trattatisti, si considerava la linea come un tutto divisibile indefinitamente, ora essa appare come una collettività composta di infiniti elementi.

Vediamo quale delle due concezioni si presenti più spontaneamente alla intuizione dei giovinetti. La materia fisica, che cade sotto il dominio dei nostri sensi, si presenta a noi con apparenza di continuità, cioè priva di pori visibili (eccettuate poche sostanze, così dette porose, che non possono aiutare l'intuizione geometrica per la loro grossolana irregolarità), e la sua costituzione molecolare ed atomica è ignorata dai giovani principianti di matematica, perciò, mentre l'osservazione di fili tenuissimi può condurre quelli, per astrazione, ad immaginare linee geometriche, nulla esiste in natura che possa guidarli alla concezione di gruppo di punti. Veramente gli autori moderni (vedi Veronese) disegnano delle successioni di punti vicini, e immaginano di intercalarne altri tra essi, e così via. Ma gli alunni osservano che, per quanto piccoli siano i segni disegnati per rappresentare i punti, si arriverà ad un momento in cui l'intercalazione sarà impossibile a meno di ricoprire i vecchi coi nuovi, e vedranno così ripresentarsi ai loro occhi quel tratto

unito, che chiamano linea, senza rendersi ragione di un così lungo giro per arrivarvi: si sa che il *continuo* fisico [1] conduce precisamente alla contraddizione che due elementi di esso possono essere indiscernibili da un terzo ma discernibili fra loro, mentre il *continuo* matematico non cade in tale contraddizione, poichè i suoi elementi sono creazione del nostro spirito, ed è sempre possibile interpolare nuovi punti fra i precedenti, senza che gli uni ricoprano gli altri; ma io non credo che il debole potere di astrazione dei giovinetti basti per assurgere dal *continuo* fisico a quello matematico. Conchiudiamo quindi che, ammessa l'origine sperimentale delle cognizioni geometriche (che alcuni filosofi moderni negano), si debba in un primo studio preferire la definizione del Faifofer a quella dei trattati più recenti, perchè più rispondente alla prima intuizione degli alunni [2].

Concetto di piano e di angolo. — Sopra questi concetti si possono fare considerazioni analoghe alle precedenti. Il concetto di superficie è presentato dal Faifofer come quello di un ente capace di separare le parti di un corpo o di limitarlo, mentre oggi si preferisce presentarlo come quello di un gruppo di linee, ossia come continuo a due dimensioni. Il piano è introdotto dal Faifofer, postulandone le principali proprietà relative alle sue rette e al suo movimento, sulle quali viene basata la dimostrazione dell'esistenza e unicità del piano passante per tre punti dati non allineati (853), e l'angolo è definito come la parte di piano limitata da due raggi uscenti da uno stesso punto. Così l'angolo assume carattere di ente a due dimensioni, mentre noi preferiamo attribuirgli quello di ente ad una dimensione, per cui gli autori moderni chiamano angolo la parte di un fascio di raggi limitata da due raggi del fascio. Per rendere intuitiva tale nozione, essi disegnano un fascio di rette divergenti, uscenti dal vertice, le quali debbono far acquistare agli alunni il concetto di angolo, inteso nel senso suddetto; ma queste rette, che si addensano verso il vertice, lasciano interstizi crescenti fra loro, man mano che si allontanano da esso, e senza la nozione del *continuo*, non è possibile agli alunni concepire che anche quest'interstizi si possono immaginare attraversati da altre rette, giacchè queste dovrebbero ricoprirsi (nel disegno) presso il vertice. Ci pare quindi che anche questo concetto d'angolo non possa chiaramente

---

[1]) POINCARÈ: *La valeur de la science.*

[2]) Anche il COUTURAT: (*Les principes des mathématiques*, pag. 90) dice non essere il continuo geometrico oggetto d'intuizione, e l'ENRIQUES (*Problemi della scienza*, pag. 234) esclude che l'associazione delle immagini sensoriali di una linea fisica possa condurre a postulare che l'intercalazione di un punto fra altri due possa proseguirsi indefinitamente.

presentarsi alla mente dei ragazzetti, e che l' antica definizione, data dal Faifofer, malgrado i suoi inconvenienti scientifici, sia didatticamente da preferirsi.

Concetto di equivalenza. — L' A. dà due definizioni di superfici equivalenti, una in senso lato (387), basata sulla nozione intuitiva di area, per cui chiama equivalenti due superfici finite le cui aree siano uguali, l' altra in senso stretto (396) basata sulla equiscomponibilità, colla quale chiama equivalenti *manifestamente* 2 superfici finite che si possono scomporre in parti rispettivamente congruenti. Colla prima definizione l' A. intende di considerare le superfici come grandezze, poichè applica subito ad esse le relazioni logiche inerenti al concetto fondamentale di grandezza, come la proprietà transitiva dell'equivalenza, e le proprietà della somma e differenza (è strano però che Egli parli di differenza al n. 388, mentre la somma vien definita dopo, cioè al n. 392). Basandosi poi sulla seconda definizione (scomponibilità in parti congruenti) *dimostra* la proprietà transitiva, e della somma, e su di essa fonda le dimostrazioni dei teoremi sull' equivalenza dei poligoni. Premesso poi il postulato dell' area (principio di De Zolt) prova che due poligoni equivalenti nel senso più largo (1ª definizione) lo sono pure nel senso più ristretto (2ª definizione).

Ed ora facciamo alcune osservazioni sopra il metodo seguito dall'autore.

Ci pare anzitutto che il premettere le considerazioni intuitive sul concetto di area per poi restringersi al concetto minore di equiscomponibilità (equivalenza manifesta secondo il Faifofer), indi nuovamente riprendere il primo concetto, dopo avere sfruttato il secondo, non sia un procedimento molto ordinato. Sarebbe stato preferibile cominciare dal concetto più ristretto, e dopo di averne tratto tutte le possibili deduzioni, allargarlo per le ulteriori necessità, senza che il lettore, il quale ha già acquistato le nozioni connesse al concetto più largo (le quali logicamente valgono pure pel minore), debba farne astrazione durante la trattazione delle proprietà contenute nel concetto più ristretto.

Inoltre, mentre l'enunciazione del postulato dell' area (principio di De Zolt) è necessaria per certe deduzioni relative al concetto minore (equiscomponibilità) ossia per stabilire l' idea di *non* equivalenza, e di sottrazione di poligoni in conformità alla nostra intuizione, non lo è per quanto riguarda l' idea generale di area, giacchè assegnando le superfici tra le grandezze (come certamente intende l' A. nei num. 486 e seg.) si debbono attribuire alle prime tutte le proprietà delle seconde, e fra queste proprietà è compreso il postulato dell'area, che afferma l' incompatibilità della disuguaglianza colla uguaglianza. Volendolo poi esplicitamente enunciare, dovrà farsi prima di parlare delle proprietà della

sottrazione (388), che logicamente dipendono dal postulato stesso, come l'A. stesso ha fatto nel capitolo sull' equivalenza dei solidi, nel quale il postulato corrispondente (postulato del volume) precede le proprietà della sottrazione.

È evidente che le precedenti osservazioni di ordine puramente logico non tolgono alcun merito ai capitoli discussi, e che gl' inconvenienti rilevati sono facilmente evitabili, invertendo l'ordine di alcuni paragrafi nel senso sopra esposto.

RASSEGNA DELLE RIVISTE

Nel decorso anno è stata fondata a Madrid una nuova Società matematica spagnola: ne è organo una speciale rivista, di cui nel 1911 sono stati pubblicati cinque fascicoli. La Prof.ª LUISA RUBINI, *che d'ora innanzi avrà particolare cura di questa Rubrica* « delle Riviste » *riferisce su quello che v' è di più interessante nei fascicoli finora comparsi; pertanto la Direzione del* Bollettino *è lieta di fare i maggiori auguri alla nuova Associazione e alla Rivista che ne è organo e il cui programma è molto affine a quello col quale questo* Bollettino è *sorto e a cui ha cercato di mantenersi fedele, già per un intero decennio.*

LA DIREZIONE

Rivista della Società Spagnuola di Matematica

(Annata 1911 - N. 1, 2, 3, 4, 5)

Sezione biografica.

(*G. Galan*) FERMAT. — Breve biografia di Pietro Fermat (nato a Beaumont di Lomagne nel 1601 e morto a Parigi nel 1665), illustre matematico ed anche eminente giureconsulto e uomo politico. Tutte le sue diverse opere matematiche, la sua corrispondenza ed i suoi scritti in latino hanno visto ultimamente la luce in tre grandi volumi, pubblicati da Tannery e Carlo Henry sotto gli auspici del Ministero dell' istruzione pubblica francese.

(*C. Jimenez Rueda*) PEDRO NUNEZ. — Nacque ad Alcacer do Sal (Portogallo) nel 1502 e morì nel 1578. Fu uno dei più illustri geometri del suo tempo, collaborò con fede ed entusiasmo al progresso della matematica ed alla preparazione delle grandi conquiste del secolo seguente.

(*Julio Rey-Pastor*) P. GOMES TEIXEIRA. — Nato nel 1851: è un insigne analista portoghese. I suoi scritti superano il numero di 100. La sua caratteristica, come investigatore, è il suo spirito generalizzatore che gli permette indurre sopra formole o proprietà note per ottenere la legge generale donde emanano quei risultati e molti altri nuovi. Come espositore possiede come doti particolari la chiarezza ed il rigore col quale presenta le più difficili questioni. Il suo *Corso di analisi infinitesimale* è uno dei più stimabili fra quelli scritti modernamente.

(*Josè A. Sànchez Pérez*) CHÈBER BENAFLAH (di Siviglia). — Si vorrebbe celebrarlo immortale come inventore dell'algebra e come architetto. L'autore però della nota conclude col dimostrare come Chéber Benaflah visse verso la metà del secolo XII mentre l'algebra fu introdotta nell'Islam nel secolo IX e come non esistano documenti che provino pienamente ch'egli fosse architetto ed avesse costruita o diretta la famosa torre della Giralda di Siviglia.

(*Venturo-Reyes y Prósper*) JUAN MARTINEZ SILICEO. — Nato nel 1477 in Villagarua villaggio della provincia di Badajoz e morto a Toledo nel 1557. La sua famiglia era così povera che corre ancora in Toledo tra il popolo tutta una leggenda. Si narra che essendo egli studente e non potendo pagare un paio di scarpe, disse al calzolaio che egli avrebbe pagato il suo lavoro quando fosse pervenuto al grado di arcivescovo di Toledo.

Arrivato in forza dei suoi meriti e della sua laboriosità a questo posto eminente volle mantenere la sua parola ed essendo ormai morto quell'onorato artigiano prese a proteggerne gli orfani, collocandoli in un collegio da lui fondato. Questo sapiente cardinale pubblicò diverse opere su differenti rami della matematica.

Questioni proposte.

Ci limitiamo a riportare gli enunciati di alcune fra le più interessanti.

1. — Dimostrare che se in un triangolo il semiperimetro è uguale alla somma del raggio del cerchio inscritto col diametro del cerchio circoscritto, il triangolo è rettangolo.

2. — Dimostrare che

$$p^n! \text{ è divisibile per } (p!)^{\frac{p^n-1}{p-1}}.$$

3. — Data una conica ϕ e un quadrangolo $ABCD$ di un piano, determinare geometricamente le coniche tangenti alla data e circoscritte al quadrangolo. Discussione.

4. — Inscrivere un quadrato in un settore.

5. — Dimostrare (senza l'aiuto delle aree) che la somma algebrica delle distanze di un punto qualunque del piano di un poligono regolare, dai suoi lati, è costante.

6. — Trovare tre numeri razionali i cui quadrati si differenziano di cinque unità.

Si dia la soluzione dimostrando che è unica.

7. — Costruire con la riga e il compasso una circonferenza che passa per due punti e che dista da una retta data di una lunghezza uguale al suo raggio.

8. — Dimostrare che se in un trapezio isoscele l'altezza è media proporzionale tra le basi, ciascun lato rimanente è medio aritmetico tra le medesime e la proiezione dell'altezza sopra queste, è media armonica fra esse.

9. — Eliminare α, β, γ, δ, ε tra le equazioni

$$\begin{aligned} & a \cos\alpha \cos\beta + b \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \\ = & a \cos\beta \cos\gamma + b \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma = \\ = & a \cos\gamma \cos\delta + b \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\delta = \\ = & a \cos\delta \cos\varepsilon + b \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\varepsilon = \\ = & a \cos\varepsilon \cos\alpha + b \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}\alpha = K \end{aligned}$$

$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \varepsilon$.

10. — Trovare il limite di

$$y = x^{\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1-\operatorname{sen}(x-1)}} \text{ per } x = 1.$$

11. — Date due circonferenze con il punto comune A, trovare il luogo dei punti medi dei segmenti BC determinati dai punti di intersezione con qualunque secante che passa per A.

12. — Trovare i massimi e i minimi della funzione

$$y = \operatorname{tang}^m x \cdot \operatorname{tang}^n (a - x)$$

Sezione dottrinale.

E. Terradas: *Sopra la figura geometrica generata da un filo in movimento stazionario piano.* Premesso che un filo si dirà in movimento stazionario quando segni una curva fissa rispetto ad assi animati da un movimento qualunque, l'A. studia il caso particolare nel quale gli assi di riferimento si trovano animati da una rotazione con velocità angolare uniforme intorno all'asse delle z. Il filo si suppone nel piano xy costituito da una corda o catena chiusa suscettibile di applicarsi senza scivolare sopra la superfice del cilindro retto circolare il cui asse coincide con quello delle z.

Julio Rey Pastor: *Sopra la somma delle serie.* L'oggetto di questa nota è di esporre un nuovo metodo che permette di trasformare in binomia o monomia la espressione S_n ottenendo così la somma di un gran numero di serie, e, ciò che è più importante, di dedurre tipi o formole generali alle quali è applicabile il procedimento.

Cecilio Jimenez Rueda: *Sopra il numero dei poligoni semiregolari.* Sappiamo che poligoni semiregolari equiangoli sono quelli che hanno tutti gli angoli eguali e i lati alternativamente uguali e che sono iscrittibili in un cerchio. Analoga definizione per i semi regolari equilateri (circoscrivibili al cerchio). Così per costruire una di queste figure si divide la circonferenza in n parti uguali mediante i punti $1, 2, 3, \cdots n$; alla destra di ciascuno di questi punti e ad una distanza costante si segnano altri n punti $1', 2', 3', \cdots, n'$. Poi per avere gli equiangoli si unisce un punto della prima divisione con uno della seconda e questo con uno della prima così successivamente nel medesimo senso da sinistra a destra per esempio, intorno al circolo fino a ritornare al punto di partenza. Analogamente per ottenere gli equilateri si traccia una tangente in un punto della prima divisione etc. Facilmente si trova che il numero dei poligoni semiregolari che si ottengono è

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

L'autore della nota trova che:

1° A ciascuna specie p di poligoni regolari di n lati corrispondono n specie distinte di poligoni semiregolari di $2n$ lati;

2° Il numero totale dei poligoni semiregolari di $2n$ lati è la somma dei numeri primi con n contenuti nella serie naturale dei numeri da 1 fino ad n.

Miguel Vegas: *Generalizzazione del circolo dei nove punti.* Si sa che il circolo dei nove punti di un triangolo è un circolo che passa per i punti medi dei lati del triangolo, per i piedi delle altezze, e per i punti medi delle distanze dei vertici dall'ortocentro. Ora l'Autore della nota, dopo aver osservato che uno dei mezzi più poderosi di investigazione nella Geometria è la legge della correlazione si propone di offrirne un esempio interessante stabilendo per questa via un teorema che comprende, come caso particolare, quello relativo al circolo di Eulero, dal quale, a sua volta, può dedursi applicando la citata legge della correlazione.

La Sezione dottrinale comprende, inoltre, altri interessanti articoli di E. Leon Ortiz: *Sull'arco di meridiano ellittico*; di L. Octavio di Toledo: *Sulle proprietà del Wronskiano* e sulla *Storia della matematica pura*

nella Spagna; di G. Galan: *Su alcuni concetti matematici applicati alla statistica*; di J. Angulo e Morales: *Sopra alcune forme indeterminate*; di J. Diaz Coronado: *Sull'area della corona circolare*; di G. Teixeira: *Sopra una nuova proprietà della cissoide e su una generalizzazione di questa curva*; di R. Araujo: *Sull'omologia delle superfice di secondo ordine*; di R. Ayza: *Sul modo di riconscere se un numero è divisibile per un altro della forma* $a \cdot 10^n \pm 1$.

La Rivista ha poi una Sezione *bibliografica*, un'altra Sezione di *Cronaca*, una particolare Sezione pel « *Vocabolario matematico* » e una Sezione intermediario.

Luisa Rubini (Roma)

***

UNA NUOVA RIVISTA PEDAGOGICA

La Coltura dello spirito *(Rivista mensile di problemi educativi)* Diretta dal prof. F. P. Japichino.

[Direzione e Amministrazione: Catanzaro, Villa Menichini 62 - Abbonamento annuo L. 5].

Col 1912 ha incominciato le sue pubblicazioni questa nuova *Rivista*, alla quale ci è assai gradito fare i migliori auguri: si presenta subito simpaticamente collo scopo precipuo di agire per l'ideale della verità nella cultura, e di scuotere la cappa di piombo che ancora aduggia la vita della scuola richiamandola a quel culto della spiritualità, senza della quale essa vien meno al compito suo. Vuole essere un organo di battaglia, che, diffondendosi fra gli insegnanti, mostri tutto il vacuo di tante generalità astratte che sono riconosciute inutili nella pratica della scuola.

La *Rivista* conterrà le seguenti rubriche: *problemi teorici*, *problemi storici, problemi di educazione nazionale, bollettino bibliografico, varietà.* Il primo numero ha un pregevole articolo del Direttore sul « *fatto educativo* » e di R. Gaudio su « *Estetica e Pedagogia* »; interessantissimo è inoltre un articolo del Direttore stesso prof. Japichino sul *Ginnasio magistrale* ed in particolare sul programma di pedagogia e sulle relative istruzioni, di cui viene chiaramente lumeggiato il cieco e grossolano empirismo a cui programma e istruzioni sono ispirati.

La Direzione

Biblioteca del Pitagora

Il chiaro collega prof. Fazzari, Direttore del noto periodico « Il Pitagora » *ha annunziato, con la Circolare che segue, l'inizio di una serie di volumetti, che, ne siamo sicuri, troveranno la più favorevole accoglienza da parte dei docenti di matematica d'ogni ordine di scuole. Ci congratuliamo con l'operoso Collega, e ne riproduciamo per intero la Circolare rammentata.*

C. de Freycinet: **Dell'esperienza in Geometria**

(Traduzione Italiana)

Inizio con la traduzione di quest'opera dell'illustre membro dell'Istituto di Francia, autore del *Saggio sulla Filosofia delle Scienze*, la pubblicazione di una serie di volumetti di matematica elementare di indole varia. Questi volumetti comprenderanno la traduzione di opere di antichi matematici e di opere straniere di matematici moderni; la ripubblicazione di opere rare; pubblicazioni d'indole storica, di teorie elementari non comprese negli ordinari libri di testo delle scuole medie, di metodi per la risoluzione di problemi, di costruzioni geometriche con dati istrumenti, di questioni pedagogiche, dei fondamenti della scienza, ecc.

Pubblico per primo la traduzione dell'opera del de Freycinet, perchè credo che questo volume possa essere letto con utilità anche dai giovani che frequentano le nostre scuole medie, Licei, Istituti Tecnici, Scuole Normali, pur non condividendo tutte le opinioni manifestate dall'Autore. Spero in altre pubblicazioni di riprendere le questioni pedagogiche e quelle sui fondamenti della Geometria, qui sollevate.

Ringrazio il prof. G. Scorza che cortesemente ha accolta la preghiera di scrivere una prefazione per la traduzione italiana, permessa dall'Autore.

Spero che i Colleghi mi vorranno essere larghi di loro aiuto, se riconosceranno che questa pubblicazione possa riuscire di qualche utilità all'insegnamento della matematica nelle Scuole Secondarie.

G. Fazzari.

Palermo (Via Polara, 6) Febbraio 1912.

N.B. — Il volume sarà pubblicato nel prossimo mese di aprile, e sarà posto in vendita al prezzo di lire due: i sottoscrittori che inviano anticipatamente il prezzo, pagheranno lire 1,50.

Finito di stampare il giorno 12 marzo 1912.

Alberto Conti: *Direttore Responsabile.*

I lavori devono essere originali, inediti o stampati nel triennio 1910-12.

I concorrenti devono dichiarare di non aver presentato e di non presentare prima del giorno della proclamazione dei premiati il loro lavoro a concorso presso qualunque altro istituto scientifico.

Per maggiori schiarimenti, consultare il Bollettino ufficiale del Ministero della P. I. (gennaio 1912).

Un Istituto superiore scientifico di magistero.

A Genova, per iniziativa di un gruppo di professori, e coll'appoggio degli Enti locali è sorto un *Istituto Superiore scientifico di magistero* (**promiscuo**). L'Istituto è diviso in tre sezioni:

A) *Sezione scienze fisiche e matematiche;*
B) *Sezione scienze fisiche e naturali;*
C) *Matematica e Ragioneria.*

Ciascuna sezione comprende un quadriennio di studî. Riportiamo lo schema delle materie indicate pel quadriennio della Sezione *A*).

Anno I. - Complementi d'Algebra e di Trigonometria. — Complementi di geometria. — Disegno geometrico. — Chimica inorganica. — Biologia generale. — Lingue straniere.

Anno II. - Analisi matematica. — Geometria. — Disegno geometrico. — Fisica generale. — Chimica organica. — Geografia fisica e fisica terrestre. — Lingue straniere.

Anno III. - Analisi matematica. — Geometria. — Fisica generale. — Fisicochimica. — Mineralogia. — Esercitazioni di fisica. — Esercitazioni di chimica. — Lingue straniere.

Anno IV. - Meccanica razionale e fisica matematica. — Esercitazioni e magistero di Fisica. — Esercitazioni e magistero di Chimica. — Magistero di matematica. — Tirocinio.

Sono ammessi al 1° anno i licenziati dalle Scuole Normali Maschili e dalle Scuole Normali Femminili e dalle altre Scuole medie di 2° grado.

Le lezioni sono incominciate col gennaio di quest'anno, nei locali del R. Istituto tecnico di Genova, il cui Preside prof. Macchiati è Direttore di questo nuovo Istituto.

Ci affrettiamo a manifestare tutto il nostro compiacimento pel sorgere di questo nuovo Istituto e a far voti che altri Istituti simili sorgano in altre città, e che si riformino gli Istituti di magistero femminile di Firenze e di Roma, anzitutto dichiarandoli promiscui, per modo che possano accedervi anche i licenziati dalle Scuole normali maschili, e istituendovi una Sezione scientifica sul tipo dell'Istituto sorto a Genova, diguisachè i licenziati dalle Scuole normali possano conseguire i diplomi per l'insegnamento delle materie scientifiche nelle Scuole medie, senza l'obbligo, cui ora soggiacciono, di fornirsi della licenza liceale o d'istituto tecnico, e di frequentare gli ordinari corsi universitarî.

La crisi magistrale è certamente un fenomeno di natura prevalentemente economica ed è anche un effetto del cosidetto « urbanismo »; *ma essa è pure un fenomeno di natura morale, conseguente dallo stato d'inferiorità in cui la legislazione vigente pone i licenziati dalle Scuole normali in confronto coi licenziati dal liceo o dall'Istituto tecnico. Eppure, nonostante tutti i mali e difetti che la travagliano, la Scuola normale dà una preparazione tale da consentire che i licenziati da essa abbiano essi pure dischiuse le porte di un Istituto superiore, letterario o scientifico!*

I coraggiosi promotori di Genova meritano tutto il plauso per l'iniziativa loro e l'augurio più fervido d'un pieno successo!

Mathesis - Società Italiana di Matematica

L'opera del Consiglio direttivo prosegue illuminata ed assidua, a tutto vantaggio della Società.

Di recente si è costituita una nuova Sezione alla Spezia con un forte numero di Soci, tra cui molti cultori e « amici » della matematica che pur non professandone l'insegnamento, sono davvero i benvenuti a rinforzare sempre più le file della Mathesis, per modo che essa acquisti autorità sempre maggiore e abbia peso nelle decisioni, che i poteri pubblici siano per prendere, cosicchè non sia più lecito tornare a nuove offese al decoro della nostra disciplina, che vogliamo resti a fondamento della cultura, mentre in seno alla Mathesis medesima continuiamo a studiare le riforme dei programmi e dei metodi, e sopratutto di questi, col fine di accrescere l'efficacia del nostro insegnamento e di portarlo ad un maggior contatto con la realtà e coi bisogni dei nuovi tempi, pur conservandogli il carattere peculiare di strumento educativo del raziocinio.

La Sezione lunense ha acclamato a Presidente il prof. Cesare Arzelà, ed ha eletti Vice presidente il Comandante Verde, Segretario il prof. Manaira, e Vice-segretario il prof. Pianezza. Ogni nuova Sezione che sorge, conforta, nel fatto, la tesi da noi sostenuta circa dieci anni fa: allora ci dissero sognatori e peggio, ma i fatti ci hanno dato piena ragione, e noi vivamente ci compiacciamo della vitalità sempre maggiore di cui la Mathesis va dando prova.

Il C. D. ha tenuto nel massimo conto il parere manifestato dai Soci nel referendum che il Consiglio stesso aveva indetto intorno al Congresso, con la sua circolare del 15 dicembre. Pare infatti che il C. D. non insista nell'idea che aveva affacciata — e che pure a noi appariva ottima per varie ragioni — di tenere il Congresso a Roma nelle vacanze pasquali e che invece si sia deciso di tenerlo a *Genova*, nell'ultima decade d'ottobre, nell'occasione del Congresso della Società Italiana del Progresso delle Scienze, che, come è noto, sarà inaugurato pure a Genova il 17 d'ottobre. Mancherà così, prima del Congresso internazionale di Cambridge, una larga discussione sulle relazioni preparate dalla Sottocommissione italiana per l'insegnamento matematico; ma queste relazioni sono state ormai tutte pubblicate, sicchè la loro discussione può svolgersi ugualmente sul Bollettino della Mathesis, come anche sul nostro Bollettino, che, come avemmo già a dichiarare, poniamo a disposizione di tutti coloro che intendono portare il contributo della propria esperienza e della propria dottrina per la risoluzione delle varie questioni svolte nelle predette Relazioni. Del resto è quasi sicuro, data la mole del lavoro, che a Cambridge avverrà la semplice presentazione delle relazioni elaborate dai Delegati dei vari Stati e dalle singole Sottocommissioni nazionali; la discussione vera e propria sarà quindi differita al successivo Congresso internazionale (Stocolma 1916), onde nel quadriennio intercedente fra i due Congressi, la Mathesis avrà modo, nella solennità d'un vero e proprio Congresso, di discutere a fondo le proposte concrete riguardanti l'insegnamento della matematica nei vari ordini e gradi di scuole, e di manifestare nettamente la propria opinione.

Intanto prendiamo atto delle notizie cortesemente favoriteci dal valoroso e attivo Segretario della Mathesis prof. Fontebasso, che tanto degnamente coadiuva l'illustre Presidente prof. Castelnuovo, e registriamo con piacere che i Soci della Mathesis sono ormai in numero di *quattrocento*.

Notizie sui concorsi

Concorso dei Ginnasi.

Commissione giudicatrice: Pascal E. Presidente, Bagnera G., Baroni E. segretario relatore.

La Commissione attuale sostituiva l'altra dimessasi dopo dato il tema scritto e composta di Pincherle S. Presidente; Mezzana Nic., Niccoletti O. segretario relatore.

Concorrenti n. 100 circa.

Presentatisi all'esame scritto n. 73.

Ammessi alle prove orali n. 26.

Tema della prova scritta:

a) Il candidato dimostri facendo uso delle sole teorie geometriche che fanno parte del programma ginnasiale, i teoremi relativi ai rettangoli dei segmenti determinati da una circonferenza sulle rette condotte per un punto.

b) Ne faccia applicazione alle questioni seguenti: Sian dati una retta r ed un punto O; detto A un punto qualunque della retta r, e preso sulla retta OA un punto A' tale che il rettang. dei segmenti OA, OA' sia equivalente ad un rettangolo dato, si determini il luogo geometrico del punto A'. Si determini il luogo analogo, quando invece della retta r si consideri un cerchio C'.

c) Facoltativamente, il candidato aggiunga quelle proprietà che conosce della trasformazione del piano (o dello spazio) cui sono subordinate le trasformazioni della retta e del cerchio indicate nelle questioni precedenti, ed accenni a quanto sa intorno a trasformazioni che contengono quella indicata come caso particolare.

Graduatorie - *Eleggibili:* 1. Cherubino Salvatore - 2. Licopoli Guglielmo - 3. Iodi Carlo Felice - 4. Scala Angelo - 5. Ceccherini Francesco - 6. Pampana Gino - 7. Fortunato Ernesto - 8. Chillemi Giuseppe - 9. Beggi Ezio - 10. Botto Costantino - 11. Pistelli Guido - 12. Insolera Filadelfo - 13. Rosi Cornelio - 14. Mari Tommaso.

Idonei: 15. Riva Francesco - 16. Carrese Pietro - 17. Cianflone Antonio - 18. Sangiorgio Luca - 19. Ungaro Nicola - 20. Bruzzone Giacomo.

Concorso per le Scuole Tecniche.

È stato espletato anche il concorso generale per le cattedre delle Scuole tecniche, che fu giudicato dalla Commissione composta dai professori Montesano, Lauricella e Bonaventura.

Pei posti maschili (90 messi a concorso) sono stati dichiarati 22 vincitori e 3 idonei; pei posti femminili (10 messi a concorso) 10 vincitrici e 2 idonee.

Concorsi speciali.

Devono essere ancora formate le relative Commissioni giudicatrici.

Movimento del personale

Per effetto dell'ultimo concorso per le cattedre di matematica delle Scuole Normali sono avvenute le nomine seguenti:

Cherubino Salvatore a Siena - Nalli Pia ad Avellino - Bonetti Carlo a Vercelli - Cattaneo Paolo a Pistoia - Scrosoppi Pietro a Cremona -

Puccini Ada a Forlì - Repetto Giuseppe a Sassari - Minetola Silvio a Bari - Amato Vincenzo a Bari - Bandini Silvio a Forlì - Miotti Andrea ad Ascoli Piceno - Usai Giuseppe a Bobbio - Giraud Giulio a Mondovì - Artom Emilio ad Aosta - Fiorentini Pietro a Cremona - Pampana Gino a Grosseto - Gramegna Maria ad Avezzano - Pellizzari Nelda ad Aquila - Toffoletti Carlo a Lecce - Da Rios Sante Luigi a S. Pietro al Natisone, in missione a Padova - Pistorio Giovanni a Reggio Calabria - Annibale Ernesto a Nuoro.

Ispettorato di circolo delle Scuole medie

Pel corrente anno scolastico 1911-1912 sono stati nominati ispettori di circolo per la matematica, i professori universitarî e di scuole medie, di cui seguono i nomi, insieme con l'indicazione della sede e del respettivo Circolo.

(Torino) Berzolari (Presidente) - Vitali; (Genova) Bortolotti (Vice-Presidente) - Scarpis; (Milano) Fano - Predella Lia - Bettazzi; (Pavia) Tedone - Rosati; (Parma) Severi Presidente) - Ferrari; (Brescia) Bordiga - Retali; (Padova) Vivanti - Legrenzi; (Venezia) Vivanti - Piazza; (Bologna) Lauricella (Vice-Presidente) Bonardi; (Pisa) Loria (Presidente) Gremigni; (Firenze) Pincherle - Gazzaniga; (Perugia) Castelnuovo - Roccella; (Macerata) Lazzeri - Amaldi; (Aquila) Nicoletti - Calò: (Roma) Montesano - Amodeo; (Napoli) Pittarelli (Presidente) - Fazzari - Giuliani; (Bari) Severini - Ciamberlini; (Catanzaro) Martinetti - Alagna; (Cagliari) Montesano (Vice-Presidente) Bonaventura; (Palermo) Marcolongo (Vice-Presidente) - Cifarelli; (Catania) Bagnera - Mazzanti.

Associazione Mathesis

Il C. D., con apposita circolare, ha annunziato che il 21 ottobre 1912 sarà inaugurato a Genova un nuovo Congresso dell' Associazione, e ne ha così fissate le linee generali:

Si terranno anzitutto alcune conferenze su questioni che interessano le matematiche elementari. Inoltre varie sedute saranno dedicate:

1.° a discutere temi di carattere didattico prendendo come base le relazioni pubblicate dalla Sottocommissione italiana per l'insegnamento matematico;

2.° all'esame di alcune proposte fatte dalla Sezione lombarda intorno alle condizioni giuridiche degli insegnanti di matematica;

3.° allo studio di questioni riguardanti direttamente la Società, e in particolare l'organizzazione del *Bollettino* e della Biblioteca.

Il programma particolareggiato del Congresso verrà comunicato in seguito. Per la iscrizione al Congressso (con diritto al volume degli Atti) è fissata una quota di lire 5 destinata a coprire, almeno in parte, le spese di organizzazione e di stampa. Con una successiva Circolare verrà indicato il modo di pagamento.

***

La Sezione Romana ha tenuto tre importanti riunioni: l'8 gennaio, il 17 marzo e il 26 maggio, sotto la presidenza del prof. Pittarelli e con

SOMMARIO :

Ricevuta delle quote *(sulla terza pagina della copertina).*

g) Rassegna delle principali riviste di Matematica, italiane e straniere.

h) Resoconto dei Congressi di matematica, italiani e stranieri.

i) Relazioni e graduatorie dei Concorsi per cattedre di matematica; notizie del personale insegnante.

l) Una rubrica (*rubrica intermediario*) destinata ad accogliere da tutti i lettori domande intorno a qualsiasi argomento compreso nel programma del periodico, e che accoglierà altresì le risposte via via date alle dette domande dai lettori medesimi o dalla Direzione.

La quota d'abbonamento è di L. 6,50 per l'Italia (L. 7,50 per l'Estero).

L'abbonamento può esser preso in qualunque momento dell'anno, ma termina coll'anno stesso; e la Direzione non garantisce di potere inviare tutti i numeri dell'annata a partire dal primo, a coloro che assumono l'abbonamento dopo il febbraio.

L'ammontare della quota d'abbonamento dev'essere pagato in una sola volta e anticipatamente.

La ricevuta delle quote vien data sulla copertina del *Bollettino*, a meno che non si tratti di Enti, (Istituti, Comuni, Biblioteche ecc.) che ne facciano speciale richiesta.

I fascicoli del " BOLLETTINO DI MATEMATICA „ portano la numerazione, d'anno in anno, da 1 a 12, ma escono di regola ogni due mesi. La Direzione si riserva il diritto di raccogliere in un sol fascicolo due o più numeri, all'intento di dare un proporzionato sviluppo a tutte le principali rubriche. In ogni caso l'annata comprende almeno 20 fogli (di 16 pagine ciascuno) di testo e 24 pagine almeno di copertina colorata interna,

---

AVVERTENZA PEI NUOVI SOCI

Non è più disponibile alcuna collezione completa, essendo esaurita l'annata II e l'annata VII. Sono però disponibili alcune copie (*ben poche ormai*) delle annate I, III, IV, V, VI, VIII, IX e X a prezzi da convenirsi, di volta in volta, a seconda della richiesta.

ESTRATTI

Per gli estratti dei loro articoli, gli Autori devono farne l'ordinazione direttamente alla *Tipografia Cuppini* (*Bologna, Via Castiglione 8*), e non più tardi del giorno in cui essi hanno rispedito le bozze.

CESARE ARZELÀ

(1847-1912)

Il 15 marzo ci giunse una notizia tristissima: l'annunzio della morte di

CESARE ARZELÀ

Sapevamo che, purtroppo, le condizioni di salute dell'illustre Scienziato e Maestro erano andate sempre peggiorando in questi ultimi tre anni, da quando incominciarono a manifestarglisi i sintomi della malattia, che l'ha inesorabilmente condotto alla tomba. Ma sempre ci sorreggeva la speranza che potesse trionfare la fibra gagliarda dell'Uomo, che, fino a quattro o cinque anni fa, aveva conservato un aspetto veramente giovanile!.....

Cesare Arzelà è morto a S. Stefano di Magra, ove era nato l'11 marzo 1847 ed è morto circondato dall'affetto e dalla stima di quanti lo ebbero per condiscepolo, per Collega, per Maestro, di quanti lo conobbero personalmente e di altri innumerevoli, che non ebbero il piacere di conoscerlo di persona, ma pur tanto lo apprezzarono pel vivido ingegno suo e per la grande perizia didattica, brillantemente testimoniati da tutti i lavori Suoi, dai quali e la Scienza e la Scuola trassero notevolissimo vantaggio.

Dell'illustre Estinto, della luminosa opera Sua scientifica e didattica, fu da noi diffusamente parlato, cinque anni fa, nelle colonne di questo stesso *Bollettino*, (1) nell'occasione del massimo premio conferitogli dalla Reale Accademia dei Lincei.

Cesare Arzelà meritò tale premio, sopratutto pei suoi lavori sulle *serie di funzioni*, comparsi nelle Memorie della R. Accademia di Bologna, fra il 1898 e il 1904, lavori di importanza fondamentale, come fu rilevato dai più illustri analisti del mondo, lavori che gli fecero conseguire la massima altezza nel campo scientifico.

Egli aveva sortito da natura un'intensa predisposizione e un vivissimo amore per l'insegnamento; è noto che nella Scuola, e per la Scuola, si svolse in massima parte la Sua vita e che sempre gli fu motivo di massimo compiacimento il ricordo degli anni trascorsi nell'insegnamento medio, e che ogni buon esame, ogni buona prova nell'insegnamento non gli procurarono minor compiacenza dei saggi di produzione scientifica e di attitudine alla ricerca originale.

Egli fu dunque e Scienziato e Maestro, nel senso più bello e più largo di questi termini, e per la Sua repentina scomparsa, e la Scienza e la Scuola hanno sofferto una grave perdita.

Il *Bollettino di Matematica*, fino dalla fondazione lo ebbe tra i più assidui Lettori e fu pure onorato dalla Sua collaborazione e da frequenti e care parole di incoraggiamento, ed il *Bollettino*, facendo eco al sentimento suscitato ovunque dalla Sua irreparabile perdita, invia il più reverente omaggio alla Sua Memoria.

Roma, 15 maggio 1912.

Alberto Conti

---

(1) Anno VI, N. 5-6-7, Pag. 81 e seguenti.

Sulla classificazione delle isomerie

A. BINDONI (Reggio Emilia)

Premesse:

1. *Df.* — Una corrispondenza fra una classe *a* e una classe *b* si dice *reciproca* quando:

1° trasforma un elemento della classe *a* in uno ed unico della classe *b*.

2° elementi distinti della classe *a* vengono trasformati in elementi distinti della classe *b*.

3° vi è sempre un elemento della classe *a* che viene trasformato in un elemento qualsivoglia della classe *b*.

2. *P.* — La corrispondenza inversa di una corrispondenza reciproca è pur essa reciproca.

3. *P.* — Il prodotto di più corrispondenze reciproche è una corrispondenza reciproca.

*
* *

4. *Df.* — Isomeria [1] è un nome comune a tutte quelle corrispondenze reciproche fra (tutti) i punti e (tutti) i punti che trasformano ogni coppia di punti in una coppia congruente.

5. *P.* — La corrispondenza inversa di una isomeria è pure una isomeria.

6. *P.* — Il prodotto di più isomerie è una isomeria.

7. *P.* — Una isomeria trasforma segmenti in segmenti, raggi in raggi, rette in rette, semipiani in semipiani, piani in piani, ecc.

8. *P.* — Se una isomeria trasforma due punti distinti in sè stessi, trasforma pure in sè stesso ogni altro punto della retta passante per essi.

---

[1] Nome proposto da Ch. MÊRAY nei suoi *Nouveaux éléments de Géométrie* (Paris, 1874).

9. *P.* — Se due isomerie trasformano una coppia di punti distinti in una stessa coppia di punti, esse trasformano ogni altro punto della retta della prima coppia in uno stesso punto della retta della seconda.

10. *P.* — Se una isomeria trasforma tre punti non collineari in sè stessi, trasformerà in sè stesso ogni altro punto del piano determinato dai primi tre.

11. *P.* — Se due isomerie trasformano tre punti non collineari in una stessa terna di punti, trasformeranno ogni altro punto del piano dei primi tre punti in uno stesso punto del piano della detta terna.

12. *P.* — Se una isomeria trasforma quattro punti non complanari in sè stessi, trasformerà ogni altro punto in sè stesso; sarà cioè l'identità.

13. *P.* — Se due isomerie trasformano quattro punti non complanari in una stessa quaterna di punti, esse trasformeranno ogni altro punto in uno stesso punto; saranno cioè, come suol dirsi, *equivalenti.*

14. *P.* — Se due isomerie trasformano una coppia di punti distinti in una stessa coppia di punti, allora: le distanze dei trasformati di uno stesso punto dalla retta della detta coppia sono eguali ed hanno i piedi coincidenti.

*
* *

15. *P.* — Se una isomeria trasforma un triedro in un triedro equiverso, trasformerà ogni altro triedro in un triedro equiverso [1].

16. *Df.* — Una isomeria si dice equiversa quando trasforma triedri in triedri equiversi; si dirà invece contraversa quando trasforma triedri in triedri contraversi.

17. *P.* — Un prodotto di isomerie sarà una isomeria equiversa o contraversa secondo che sarà pari o dispari il numero dei fattori che sono isomerie contraverse.

---

[1] Veronese: *Fondamenti di Geometria*, pag. 353. — « Per la teoria dei versi »: Cfr. un recente ed esauriente articolo di E. Veneroni. — *Periodico di Matematica*, anno XXVI.

18. *P.* — Una simmetria assiale è una isomeria equiversa [1].

19. *P.* — Una simmetria planare è una isomeria contraversa.

20. *Df.* — Due isomerie si diranno della stessa specie se sono entrambe equiverse o entrambe controverse; si diranno invece di specie contraria se sono l'una equiversa e l'altra contraversa.

20.^{bis} — L'inversa di una isomeria è una isomeria della stessa specie.

20.^{ter} — Il prodotto di due isomerie della stessa specie è una isomeria equiversa.

21. *P.* — Se due isomerie della stessa specie trasformano tre punti non collineari in una stessa terna di punti, esse sono equivalenti.

22. *P.* — Se due isomerie di specie contraria trasformano tre punti non collineari in una stessa terna di punti, basterà moltiplicare una di esse per la simmetria rispetto al piano della detta terna per avere una isomeria equivalente all'altra.

* * *

23. *P.* — Il prodotto di più isomerie gode della proprietà associativa.

24. *P.* — Il prodotto di più isomerie non gode in generale della proprietà commutativa.

25. *Df.* — Come è stato detto nel N. 13 due isomerie si dicono equivalenti quando trasformano ogni punto in punti coincidenti.

E per indicare che le isomerie I_1, I_2 sono equivalenti si scriverà $I_1 \doteq I_2$.

26. *P.* — Moltiplicando membro a membro delle equivalenze tra isomerie si ottiene una nuova equivalenza.

27. *P.* — In un prodotto di isomerie si possono sostituire isomerie equivalenti ad alcuni fattori.

* * *

28. *Df.* — Se A, B sono punti, allora: *coppia di punti equipollente alla coppia* $(A ; B)$ è denominazione comune a tutte le

---

(1) Cfr. A. Borriero: « Sulla congruenza e simmetria delle figure ». *Periodico di Matematica.* Vol. XX. Fasc. VI.

coppie di punti $(X; Y)$, tali che: il punto medio tra A e Y coincide col punto medio tra B ed X.

***

29. *Df.* [1] — Se π è un piano, la simmetria rispetto a π si indica con $/\pi$; e se P è un punto, il simmetrico di P rispetto a π si indicherà con P/π.

30. *Df.* — Se S è una retta la simmetria rispetto ad S si indicherà con $/S$; e se P è un punto, il simmetrico di P rispetto ad S si indicherà P/S.

PARTE PRIMA

Isomerie equiverse.

§ 1. — Rotazioni.

1. *Df.* — *Rotazione di asse* r è nome comune ad ogni isomeria equiversa che lascia fermi due punti (e quindi tutti i punti) della retta r.

2. *P.* — Se R è una rotazione di asse r e π_1, un piano per r, esiste un altro piano π_2 per r tale che R equivale al prodotto $/\pi_1 \cdot /\pi_2$; ed esiste anche un piano π_0 tale che R equivale al prodotto $/\pi_0 \cdot /\pi_1$.

[Se P è un punto fuori di r e π_2 il piano assiale del segmento $(P/\pi_1, RP)$, il piano π_2 passa per r. E infatti le isomerie $/\pi_1$, R hanno uniti i punti di r e per ciò se dai trasformati secondo esse di uno stesso punto si abbassano le perpendicolari ad r, i piedi di queste coincideranno.

Sia O il piede comune delle perpendicolari da P/π_1 e da RP alla retta r; poichè i segmenti $(O, P/\pi_1)$, (O, RP) sono congruenti segue che il piano π_2 passa per O. Se M è il punto medio del segmento $(P/\pi_1, RP)$ ed H un punto della retta r, la retta HM sarà perpendicolare alla retta $(P/\pi_1, RP)$ e perciò giace nel

---

[1] Queste notazioni sono tolte dalla Memoria: *La geometria elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera,* del prof. M. Pieri.

piano π_2. Dopo ciò, poichè π_2 contiene i punti O, H, consegue che π_2 passa per r.

Allora il prodotto $/\pi_1 \cdot /\pi_2$ ed R sono isomerie equiverse che trasformano i punti O, H, P non collineari nei punti $O, H, P/\pi_2 = RP$; e perciò sono equivalenti.

Ricorrendo alla isomeria inversa ad R si dimostra la seconda parte].

3. P. — Se π_1, π_2 sono piani non paralleli, il prodotto $/\pi_1 \cdot /\pi_2$ è una rotazione.

[Anzitutto è una isomeria equiversa perchè è il prodotto di due isomerie contraverse.

In secondo luogo i punti della intersezione dei piani π_1, π_2 sono trasformati in sè stessi tanto da $/\pi_1$, che da $/\pi_2$ e perciò anche dal prodotto $/\pi_1 \cdot /\pi_2 \cdot$].

4. P. — Se π_1, π_2 sono piani perpendicolari, il prodotto $/\pi_1 \cdot /\pi_2$ equivale alla simmetria che ha per asse la loro intersezione.

[Sia P un punto fuori dei piani π_1, π_2. Il piano $(P, P/\pi_1, (P/\pi_1)/\pi_2)$ poichè è perpendicolare ai piani π_1, π_2 sarà anche perpendicolare alla loro intersezione in un punto M. D'altra parte l'angolo $(P, M, (P/\pi_1)/\pi_2)$ è doppio dell'angolo sezione normale del diedro (π_1, π_2) che è retta. e perciò PM ed $M\ (P/\pi_1)/\pi_2$ sono per diritto. E poichè i segmenti (PM), $(M, (P/\pi_1)/\pi_2$ sono uguali, si conclude che i punti P, $(P/\pi_1)/\pi_2)$ sono simmetrici rispetto l'intersezione dei due piani π_1, $\pi_2 \cdot$].

4.^{bis} — Il prodotto di due simmetrie rispetto a piani perpendicolari è commutativo.

5. P. — Il prodotto di due simmetrie assiali, i cui assi S_1, S_2 sono incidenti equivale ad una rotazione.

[Se r è la perpendicolare comune alle rette S_1, S_2, e i piani $S_1 S_2$, $r S_1$, $r S_2$ si indicano rispettivamente con π, π_1, π_2, si ha $/S_1 \cdot /S_2 \doteq /\pi_1 \cdot /\pi \cdot /\pi \cdot /\pi_2 \doteq /\pi_1 \cdot /\pi_2$, che è una rotazione].

6. P. — Se R è una rotazione di asse r, ed S_1 una retta perpendicolare ad r in un punto O, esiste una retta S_2 per O e perpendicolare ad r tale che $/S_1 \cdot /S_2 \doteq R$; ed una retta S_0 tale che $/S_0 \cdot /S_1 \doteq R$.

[Infatti se π_1 è il piano $r S_1$, esiste un piano π_2 tale che $/\pi_1 \cdot /\pi_2 \doteq R$; e perciò, se S_2 è intersezione di π_2 col piano nor-

male ad r per O, sarà pure — come si deduce dalla precedente dimostrazione — $/S_1 \cdot /S_2 \doteq R$].

7. *P.* — Se due isomerie I_1, I_2 della stessa specie trasformano una coppia di punti distinti in una stessa coppia di punti, allora esiste una rotazione R, il cui asse passa per la seconda coppia di punti, tale che $I_1 \cdot R \doteq I_2$.

[Siano M, N punti distinti, ed $I_1 M = I_2 M = M^1$, $I_1 N = = I_2 N = N^1$. Se $I_1 P$, $I_2 P$ sono punti non collineari coi punti M', N', esiste una rotazione R di asse $M'N'$ tale che $R(I_1 P) = I_2 P$ [1]. Allora le isomerie $I_1 \cdot R$, I_2 trasformano la terna di punti M, N, P negli stessi punti, sono anche della stessa specie e perciò sono equivalenti].

§ 2. — Traslazioni.

8. *Df.* — Se A, B sono punti, allora: $\begin{Bmatrix} B \\ A \end{Bmatrix}$ rappresenterà la corrispondenza che trasforma ogni punto P in un punto Q tale che la coppia (P ; Q) è equipollente alla coppia (A ; B).

9. *P.* — Una traslazione equivale:

1.° al prodotto di due simmetrie planari rispetto a due piani perpendicolari alla direzione della traslazione;

2.° al prodotto di due simmetrie assiali; ed è perciò una isomeria equiversa.

[1.° Sia $\begin{Bmatrix} B \\ A \end{Bmatrix}$ la traslazione: π_1, π_2 piani perpendicolari alla direzione della traslazione e tali che la distanza tra π_1 e π_2 sia congruente a metà del segmento (A, B).

Il prodotto delle simmetrie rispetto ai piani π_1, π_2 equivale alla traslazione $\begin{Bmatrix} B \\ A \end{Bmatrix}$.

2.° Sia π' un piano perpendicolare ai piani π_1, π_2. Si ha evidentemente che $/\pi_1 \cdot /\pi_2 \doteq /\pi_1 \cdot /\pi' \cdot /\pi' \cdot /\pi_2 \doteq (\pi_1', \cdot \pi') \cdot (\pi' \cdot \pi_2)$ cioè (siccome $/\pi_1 \cdot /\pi'$ equivale alla simmetria rispetto alla retta intersezione dei piani π_1, π' e $/\pi' \cdot /\pi_2$ alla simmetria rispetto

---

[1] $R = I_1^{-1} \cdot I_2$ (è una rotazione perchè è una isomeria equiversa e lascia fermi i due punti M', N').

alla retta intersezione dei piani π^1, π_2) al prodotto di due simmetrie assiali].

§ 3. — **Spostamento elicoidale.**

10. *P.* — Se a, b sono rette esistono due rette S_1, S_2 (fra loro perpendicolari) tali che le rette a, b sono simmetriche rispetto a ciascuna di esse.

Una coppia di punti della retta a viene trasformata mediante $/S_1$, $/S_2$ in due coppie di punti della retta b che sono contraverse (1).

[1.° *Le rette* a, b *sono sghembe.* — Siano A, B le intersezioni delle rette a, b colla comune perpendicolare ad esse; a' la parallela ad a per B, b' la parallela a b per A; m, n le bisettrici della coppia a, b'; π_m, π_n i piani delle rette m, AB; n, AB rispettivamente; infine π il piano perpendicolare alla AB nel punto medio M del segmento (A, B). Il prodotto $/\pi_m \cdot /\pi$ (e così pure $/\pi_n \cdot /\pi$) trasforma la retta a nella retta b. Ma il prodotto $/\pi_m \cdot /\pi$ equivale alla simmetria $/S_1$ essendo S_1 la intersezione dei piani π_m, π; e il prodotto $/\pi_n \cdot /\pi$ equivale alla simmetria $/S_2$, essendo S_2 la intersezione dei piani π_n, π. Le rette S_1, S_2 sono le bisettrici degli angoli formati dalla coppia delle rette per M parallele alle a, b.

2.° *Le rette* a, b *sono incidenti.* — Esse sono simmetriche rispetto alle bisettrici dei loro angoli.

3.° *Le rette* a, b *sono parallele.* — Esse sono simmetriche rispetto alla bisettrice S_1 della loro striscia e rispetto alla perpendicolare S_2 al loro piano per un punto di S_1].

11. *Df.* — Il prodotto di una rotazione per una traslazione parallela (all' asse di rotazione) si chiama *spostamento elicoidale.*

12. *P.* — Una rotazione, una simmetria assiale, una traslazione sono (casi particolari di) spostamenti elicoidali.

13. *P.* — Se H è uno spostamento elicoidale, esistono due rette r_1, r_2 tali che H equivale al prodotto $/r_1 \cdot /r_2$ (una di queste è arbitraria, purchè perpendicolare all' asse della rotazione).

[Sia AB l' asse della rotazione R; $(A; B)$ la traslazione, ed M il punto medio di A, B; r_1, r' le rette tali che $/r_1 \cdot /r'$ equivale

---

(1) Cfr. A. Bindoni: *Sulla simmetria rispetto ad un asse di due rette sghembe.* (Pitagora, anno 1905).

ad R ([1]) ed r_2 la parallela ad r' per M ([2]). Sia P un punto, $P_1 = P/r_1$, $P^1 = P_1/r'$, e la coppia $(P' ; P_2)$ equipollente alla coppia $(A ; B)$. Sia N il punto medio del seg. (P_1, P_2), allora $(R' ; N)$ è equipollente ad $(A ; B)$ e quindi MN parallela ad r', cioè MN coincide con r_2. D'altra parte r' è perpendicolare alla $P_1 P'$ ed alla $P_2 R$ (pel teorema delle tre perpendicolari ([3])), e perciò è perpendicolare al piano $P_1 P' P_2$. Ma r_2 è parallela ad r', e perciò anche r_2 è perpendicolare al piano $P_1 P' P_2$ e quindi alla retta $P_1 P_2$. Consegue che è $P_2 = P_1 / r_2$. (Ovvero: Sia $P_2 = P_1/r_2$, allora $P_2 P'$ è parallela alla RN, dove N è il piede della perpendicolare da P_1 alla r_2. D'altra parte NR' è perpendicolare alla r_2 — per il reciproco del teorema delle tre perpendicolari: il piano è quello delle rette r, r', la prima perpendicolare è la $P_1 R'$, la seconda è la $R'N$, la terza la $P_1 N$ — e quindi (la NR') parallela alla AB. Segue che la coppia $(P' ; P_2)$ è equipollente alla coppia $(A ; B)$)].

14. *P.* — Il prodotto di due simmetrie assiali di assi r_1, r_2 equivale ad uno spostamento elicoidale.

[Siano r_1, r_2 le due rette ed A, M le intersezioni delle rette r_1, r_2 colla perpendicolare comune ad esse; r' la parallela alla r_2 per A; e sia $P_1 = P/r_1$, $P_2 = P_1/r_2$, $P_1 = P/r'$.

Con ragionamento simile a quello fatto per la precedente *P* si conclude che $/r_1 \cdot /r_2$ coincide con il prodotto della rotazione $(/r_1 \cdot /r')$ per la traslazione $(P' ; P_2)$ parallela alla AM asse della rotazione. Consegue che $/r_1 \cdot /r_2$ equivale ad uno spostamento elicoidale].

15. *P.* ([4]) — Se μ_1, μ_2 sono spostamenti elicoidali, esiste uno spostamento elicoidale equivalente a $\mu_1 \cdot \mu_2$.

[Siano r_1, r_2 gli assi degli spostamenti elicoidali ed r_3 la loro perpendicolare comune.

([1]) r', è arbitraria.

([2]) Partendo da r_2 si può assumere questa arbitrariamente e allora non lo è r'.

([3]) Si tenga conto del fatto che $P_2 P'$ è parallela alla AB, che questa è perpendicolare al piano delle r_1, r' e quindi che $P_2 P'$ è perpendicolare allo stesso piano $r_1 r'$.

([4]) Da una nota di G. Darboux nel *Traité de cinématique* di G. Koenigs, Paris, 1897.

Lo spostamento μ_1 equivale al prodotto di due simmetrie assiali (le cui rette sono perpendicolari ad r) e l'asse della seconda è arbitrario, sia r_3, ed S_1 l'asse della prima. Lo spostamento μ_2 equivale al prodotto della simmetria di asse r_3 per la simmetria rispetto ad un'altra retta S_2. Sicchè il prodotto $\mu_1 \cdot \mu_2$ equivale al prodotto $/S_1 \cdot /r_3 \cdot /r_3 \cdot /S_2$, cioè al prodotto $/S_1 \cdot /S_2$, e questo equivale ad uno spostamento elicoidale].

16. *P.* — Il prodotto di due rotazioni i cui assi sono incidenti equivale ad una rotazione.

[Infatti le rette S_1, r_3, S_2 della precedente dimostrazione passano per uno stesso punto: l'intersezione degli assi delle rotazioni].

17. *P.* — Una isomeria equiversa μ equivale ad uno spostamento elicoidale.

[Siano M, N, P punti non collineari. Esiste una simmetria assiale che trasforma la retta M, N nella retta (μM, μN) e in modo che la coppia M/S_1, N/S_1 sia equiversa alla coppia μM, μN.

La traslazione $\left\{ \begin{matrix} \mu M \\ M/S_1 \end{matrix} \right\} = I$ trasforma i punti M/S_1, N/S_1 nei punti μM, μN.

Infine una rotazione R avente per asse la retta $\mu M, \mu N$ trasformerà $I\,(P/S_1)$ in μP.

Allora il prodotto $/S_1 \cdot (I \cdot R)$ trasforma M, N, P in $\mu M, \mu N, \mu P$, e siccome $/S \cdot (I \cdot R)$ e μ sono isomerie equiverse, si conclude che si equivalgono. Ma $/S \cdot (I \cdot R)$ è il prodotto di due spostamenti elicoidali e perciò equivale ad uno spostamento elicoidale].

18. *P.* — Una isomeria equiversa con un punto unito equivale ad una rotazione, il cui asse passa per il detto punto,

[Sia O punto unito di una isomeria equiversa. Se sulla precedente dimostrazione il punto M si assume identico ad O, allora l'asse della simmetria è incidente a quello di rotazione, e la traslazione è nulla. Perciò la isomeria equivale al prodotto di due rotazioni, e perciò ad una sola rotazione].

19. *P.* — Una isomeria equiversa non può avere un sol punto unito.

[Infatti una isomeria equiversa con un punto unito equivale ad una rotazione, e perciò ha uniti tutti i punti dell'asse].

PARTE SECONDA

Isomerie contraverse.

1. *P.* — Il prodotto di una traslazione e di una simmetria rispetto ad un piano perpendicolare alla traslazione equivale ad una simmetria rispetto ad un piano perpendicolare alla traslazione.

[Sia π il piano della simmetria, ed $\left\{\begin{matrix}A'\\A\end{matrix}\right\}$ la traslazione, M il punto medio del segmento AA', O un punto del piano π, ed infine P il punto tale che la coppia $(O; P)$ è equipollente alla coppia $(A; M)$. Il piano per M parallelo a π è quello, la simmetria rispetto al quale equivale a $/\pi\cdot\left\{\begin{matrix}A'\\A\end{matrix}\right\}$].

2. *Df.* — Il prodotto di una simmetria planare per una traslazione parallela al piano di simmetria, si chiama *antitraslazione.*

3. *P.* — Il prodotto di una simmetria planare preceduta o seguita da una traslazione obliqua al piano di simmetria equivale a un'antitraslazione (1).

[Sia $\left\{\begin{matrix}A'\\A\end{matrix}\right\}$ la traslazione, π il piano di simmetria. Il piano π_1, parallelo a π per A', incontri la perpendicolare da A a π in A''. Allora la traslazione $\left\{\begin{matrix}A'\\A\end{matrix}\right\}$ equivale al prodotto delle traslazioni $\left\{\begin{matrix}A''\\A\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}A'\\A''\end{matrix}\right\}$. Poichè la retta AA'' è perpendicolare a π, il prodotto, $\left\{\begin{matrix}A''\\A\end{matrix}\right\}\cdot/\pi$ equivale alla simmetria rispetto ad un piano parallelo a π.

In definitiva, poichè la retta $A''A'$ è parallela a π, il dato prodotto equivale al prodotto della traslazione $\left\{\begin{matrix}A''\\A\end{matrix}\right\}$ per la simmetria rispetto ad un piano parallelo alla traslazione].

---

(1) Questa *P*, e quella del N. 5 nonchè le loro dimostrazioni sono tolte dalla citata memoria del Prof. Pieri.

4. *Df.* — Il prodotto di una simmetria planare per una rotazione, il cui asse è perpendicolare al piano della simmetria si chiama *antirotazione.*

5. *P.* — Il prodotto di una simmetria planare per una simmetria assiale, il cui asse incontra il piano della prima, equivale ad un' antirotazione [1].

[Sia π il piano della prima simmetria, S l' asse della seconda, O l' intersezione di π con S; σ il piano per S perpendicolare a π, ed r la perpendicolare per O a σ – la quale sarà in π. Detto τ il piano dette rette S, r, è τ perpendicolare a σ, e perciò si ha $/S \doteq /\sigma \cdot /\tau$, e quindi: $/S \cdot /\pi \doteq /\sigma \cdot (/\tau \cdot /\pi) \doteq /\sigma \cdot R$, dove R è una rotazione. intorno ad r, che è perpendicolare a σ; e per ciò $/\sigma \cdot R$ è un' antirotazione].

6. *P.* — Il prodotto di una rotazione per la simmetria rispetto ad un piano, passante per l' asse della rotazione, equivale alla simmetria rispetto ad un piano per lo stesso asse.

[Sia S l' asse della rotazione R, e π il piano della simmetria. Esistono due piani π_1, π_2 tali che $R \doteq /\pi_1 \cdot \pi_2$. Ma π_2 può assumersi coincidente con π, e perciò si ha: $R \cdot /\pi \doteq /\pi_1 \cdot /\pi \cdot /\pi \doteq /\pi_1$].

7. *P.* — Una isomeria contraversa equivale o ad un' antitraslazione, o ad un' antirotazione, o ad una simmetria planare.

[Sia I l' isomeria, π un piano qualunque. Il prodotto $/\pi \cdot I$ è una isomeria equiversa e perciò equivale ad uno spostamento elicoidale, che indicheremo con C. Dalla equivalenza $/\pi \cdot I = C$ si trae l' altra:

$/\pi \cdot /\pi \cdot I \doteq /\pi \cdot C$, ovvero $I = /\pi \cdot C$. Ma C equivale al prodotto di una traslazione τ per una rotazione φ, il cui asse è parallelo alla direzione della traslazione.

1° Se π è normale alla traslazione, allora il prodotto $/\pi \cdot \tau$ equivale alla simmetria rispetto ad un piano parallelo a π; e perciò I equivale ad un' antirotazione.

2° Se π non è normale alla traslazione, ricordiamo che: la traslazione equivale al prodotto delle simmetrie rispetto a due

---

[1] Altra dimostrazione: Sia π il piano, s l' asse. Esistono due piani perpendicolari — per S -- π_1, π_2, dei quali π_1 perpendicolare a π, tali che $/S = /\pi_1 \cdot /\pi_2$. Allora è $/\pi \cdot /s = /\pi \cdot /\pi_1 \cdot /\pi_2 = (/\pi \cdot /\pi_2) \cdot /\pi_1$. Ma $/\pi \cdot /\pi_2$ è una rotazione il cui asse è perpendicolare a π_1 (perchè π_1 è perpendicolare, ai piani π, π_2, e quindi alla loro integrazione).

piani π_1, π_2 normali alla traslazione; e che la rotazione equivale al prodotto delle simmetrie rispetto a due piani π_3, π_4 secanti. Per ciò si ha l'equivalenza $I \doteq /\pi \cdot /\pi_1 \cdot /\pi_2 \cdot /\pi_3 \cdot /\pi_4$. Per l'ipotesi fatta, i piani π, π_1 s' incontrano e per ciò il prodotto $/\pi \cdot /\pi_1$ equivale ad una rotazione. Questa alla sua volta, equivale al prodotto delle simmetrie rispetto a due piani π', π'_1 passanti per il suo asse, e tali che π'_1 passi per l' intersezione di π_2 con l'asse della rotazione φ. Dopo ciò si ha l'equivalenza $I \doteq /\pi' \cdot (\pi'_1 /\pi_2) \cdot$ $\cdot (/\pi_3 \cdot /\pi_4)$. Ma $(/\pi_1{}^1 \cdot /\pi_2)$, $(/\pi_3 \cdot /\pi_4)$ sono rotazioni con gli assi incidenti, e per ciò il loro prodotto equivale ad una sola rotazione φ_1. Ne consegue l'equivalenza $I \doteq \pi' \cdot \varphi_1$.

Distinguiamo tre casi:

a) *Il piano π' è parallelo all' asse di rotazione.*

La rotazione φ_1 si può scomporre in due simmetrie planari rispetto ai piani $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)}$ col piano $\pi^{(1)}$ parallelo al piano π^1. Allora I equivale al prodotto $(/\pi^1 \cdot /\pi^{(1)}) \cdot /\pi^{(2)}$; e poichè i piani sono paralleli si donclude che I equivale al prodotto di una traslazione per la simmetria planare $/\pi^{(2)}$. Se la traslazione è parallela al piano $\pi^{(2)}$ si conclude che I è una antitraslazione. Ma alla stessa conclusione si perviene anche se la traslazione è obliqua a $\pi^{(2)}$ per un precedente teorema. Se poi la traslazione è perpendicolare a $\pi^{(2)}$, allora I equivale ad una simmetria planare.

b) *Il piano π' contiene l' asse di rotazione.*

In questo caso, per un precedente teorema I equivale ad una simmetria planare.

c) *Il piano π' non è parallelo all' asse di rotazione e nemmeno lo contiene.*

Se l'asse della rotazione è perpendicolare al piano π' allora l' isomeria è un'antirotazione. Altrimenti siano $\pi_1{}^{(0)}$, $\pi_2{}^{(0)}$ due piani per l' asse della rotazione dei quali, il primo sia perpendicolare a π' e tali che $/\pi_1{}^{(0)} \cdot /\pi^{(0)}$ equivalga alla rotazione. Allora l' isomeria I equivale al prodotto $(/\pi' /\pi_1{}^{(0)}) \cdot /\pi_2{}^{(0)}$.

Ma $/\pi' \cdot /\pi_1{}^{(0)}$ equivale ad una simmetria assiale, il cui asse incontra $\pi_2{}^{(0)}$ e perciò I per un teorema precedente equivale ad una antirotazione].

IL PROBLEMA DELL'INFINITO

(a proposito di un articolo del prof. A. ALIOTTA in " Cultura Filosofica „ Anno V fasc. IV)

NATUCCI ALPINOLO (Potenza)

Il prof. Antonio Aliotta ha pubblicato nei fasc. 3° e 4° — Anno V. — della « Cultura filosofica » uno studio sul *Problema dell' Infinito* molto interessante per i matematici.

Egli si propone di dimostrare l'esistenza dei concetti d'*infinito attuale* e d'*infinitesimo attuale*.

È noto infatti che molti matematici e filosofi ritengono che l'infinito e l'infinitesimo possano considerarsi soltanto allo stato *potenziale*, non allo stato attuale, cioè ritengono che si possano considerare delle variabili tendenti all'infinito o a zero e non degli enti fissi di valore superiore o inferiore a qualsiasi quantità finita.

Veramente dopo i risultati degli studi di Cantor sui transfiniti e di Veronese sulla geometria non Archimedea, la quistione può sembrare oziosa, ed è effettivamente tale dal punto di vista matematico, poichè se questi Autori hanno dato una definizione precisa dell'infinito e dell'infinitesimo attuale, e ne hanno studiato le proprietà, discutere intorno all'esistenza di questi concetti, è un non senso.

Può essere utile tuttavia considerare la quistione anche sotto l'aspetto filosofico, e per questo può servire da utilissima guida lo studio del prof. Antonio Aliotta.

Il concetto dell'infinito attuale, secondo le vedute di Cantor, nasce dal considerare nella sua totalità una serie infinita, per esempio la serie dei numeri interi:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Il numero ω di Cantor serve appunto a rappresentare questa serie, o una qualunque ad essa equivalente. Ammettere la concepibilità di ω equivale ad ammettere il concetto di una serie infinita nella sua totalità.

È possibile questo? L'Aliotta risponde di sì e con ragione a nostro avviso. Consideriamo infatti una variabile che tende a un limite. « Come potremmo aver la certezza che per quanto la grandezza variando si approssimi ad esso, rimangono sempre altri valori della variabile, se non pensassimo che tra il punto a cui siamo arrivati e il limite vi è una serie infinita di valori della variabile? Se una tal serie non fosse idealmente presente nella nostra mente, se non potessimo in alcun modo abbracciarla nel nostro concetto, chi ci autorizzerebbe, dice l'Aliotta, a fare delle affermazioni intorno ad essa? ». S'intende che per abbracciare colla mente il concetto di una serie infinita non è necessaria l'enumerazione dei suoi termini (che è impossibile), ma basta conoscere la legge che serve alla determinazione di questi.

Ora, prosegue l'Aliotta, « la distinzione aristotelica fra potenza e atto ha un significato ove si consideri il pensiero in rapporto all'esistenza reale, perchè io posso concepire come possibile qualcosa che non esiste ancora empiricamente, ma quella distinzione non ha più senso, ove si prescinda, come deve farsi nella matematica, dall'esistenza empirica nel mondo delle cose reali. Qui noi non discutiamo se l'infinito esista o no, se si possa o no trovare nell'esperienza, ma se l'infinito sia concepibile come ente ideale, e nel campo ideale della matematica l'esser possibile coincide coll'essere attuale. L'attualità di cui noi parliamo e di cui si può solo legittimamente parlare in matematica, non vuol dire esistenza empirica ma presenza ideale nella mente ».

A coloro che, come il Vivanti e il Vecchietti, sono « dominati dal vecchio pregiudizio nominalistico che non ammette pensiero al di là della rappresentazione e il *concepire* identifica con l'*immaginare* », si può rispondere « che in realtà nessun ente geometrico neppur finito, si può rappresentare nella sua precisione. Siam capaci forse d'immaginare il circolo perfetto? Il segmento infinito non è immaginabile, ma lo è forse il segmento finito? È forse questo il filo teso davanti la vostra immaginazione? E se non è questo che cosa vi dà modo di correggere quell'intuizione imperfetta, se non l'idea precisa che della figura avete nella mente? Perchè esigeremo dall'infinito ciò che non è neppur possibile nel campo degli enti e delle grandezze finite? ». Bisogna ben ammettere che si possa concepire senza immaginare, altrimenti in che consisterebbero i concetti geometrici? « Per quanto

cerchiate di perfezionare le vostre immagini, sarete sempre ben lontani dal tipo ideale che è senza dubbio presente al vostro pensiero, se vi ragionate sopra e se in base ad esso giudicate imprecisi i dati intuitivi ».

Qui però si può bene osservare che nel caso del segmento, del circolo e di qualsiasi figura finita, un'immagine per quanto grossolana si ha sempre, ed è facile passare da essa al tipo ideale, mentre nel caso dell'infinito o dell'infinitesimo attuale manca una vera e propria immagine. Io però ritengo esatte in sostanza le conclusioni dell'Aliotta, per la ragione che un processo di astrazione ha sempre luogo tanto nel costruire i tipi delle figure finite, quanto per arrivare ai concetti d'infinito e d'infinitesimo attuali. Soltanto in questo secondo caso il processo d'astrazione è più complicato; si potrebbe chiamare, introducendo la terminologia matematica, di 2° ordine rispetto al primo considerato di 1° ordine. Questo giustifica in qualche modo le esitanze di molti ad ammettere i concetti di cui discutiamo, esitanze però irragionevoli inquantochè non c'è ragione di porre un limite alla potenza d'astrazione della mente umana.

Dimodochè pur ritenendo un po' assolute le conclusioni dell'Aliotta, possiamo accettarle e ritenere giustificato, anche dal punto di vista filosofico, il concetto d'infinito attuale. Considerazioni analoghe si possono fare per l'infinitesimo attuale, com'è definito per es. dal Veronese, nei suoi Fondamenti di Geometria, e che Cantor aveva escluso invece dalle sue considerazioni. Ma l'Aliotta dimostra l'esistenza dell'infinitesimo attuale in quest'altro modo non esente da critiche. Egli parte dalla proposizione: « I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri », che si dimostra considerando la serie dei poligoni regolari inscritti, in cui il numero dei lati vada sempre crescendo, e concludendo che la proprietà, vera per ognuno di questi poligoni deve esser vera anche per il cerchio, perchè fra tali poligoni e il cerchio vi è passaggio continuo. Quindi osserva: « Si ha un bel dire che il limite non si può pensar mai raggiunto perchè la differenza fra esso e la variabile può diminuire quanto si vuole ma annullarsi mai? » .... « Un corpo in movimento per es. non dovrebbe fermarsi mai, perchè nella serie decrescente delle velocità variabili non si dovrebbe mai raggiungere lo zero. Eppure il corpo si ferma a dispetto di tutte le teorie matematiche!

Come concepiremo il passaggio da uno qualsiasi dei valori della variabile allo zero? Non vi è forse tra essi una serie indefinita di valori? Non è possibile pensare dopo un valore qualsiasi della velocità, per quanto piccola, una velocità minore? E il mobile non deve aver percorso tutti questi infiniti valori nell'atto di fermarsi? Se volete pensare e formulare matematicamente questo fatto, non potete fare a meno di ricorrere all'idea di un limite attualmente raggiunto dopo una serie infinita. E se vi sforzate di concepire il valore della velocità immediatamente prima di annullarsi, non avete altra alternativa che pensarla infinitesima ».

Ore qui c'è da osservare prima di tutto, che nessun matematico si pensa, io credo, di negare che la velocità, che si può considerare come funzione continua del tempo, raggiunga un dato valore limite, zero o diverso da zero. In secondo luogo che la considerazione del valore immediatamente precedente a zero, ammesso pure che fosse possibile, darebbe luogo alle medesime obiezioni a cui dà luogo il concetto d'infinitesimo attuale, e quindi in ogni caso l'Aliotta non avrebbe fatto che spostare la difficoltà In terzo luogo tale valore immediatamente precedente il limite, non si può considerare, anche ammettendo il concetto d'infinitesimo, perchè non esiste. Se esistesse infatti un ultimo valore della variabile, la serie dei valori di questa sarebbe limitata e non illimitata come si suppone

Ma queste obiezioni al ragionamento dell'Aliotta, non tolgono valore al concetto d'infinitesimo attuale, che come si è già detto, può giustificarsi, partendo da una definizione esatta di esso con ragionamenti analoghi a quelli fatti per l'infinito. Concessa così piena cittadinanza nel dominio delle matematiche, ai concetti d'infinito e d'infinitesimo attuale, non condividiamo tuttavia l'opinione dell'Aliotta che i concetti stessi, che pure hanno e possono avere notevoli applicazioni, siano essenziali per il calcolo infinitesimale e che *il metodo dei limiti*, col quale i principi del calcolo hanno avuto, ed è gloria in gran parte italiana, un assetto rigoroso e definitivo, *non sia altro che un tentativo soddisfacente per eliminare dal calcolo differenziale e integrale l'idea dell'infinito attuale!*

La parte della teoria dei transfiniti che ha dato maggior appiglio alle critiche è il noto teorema: *Un insieme tsansfinito*

può essere equivalente ad una sua parte integrante. Esso sembra infatti contradire al vecchio assioma: Il tutto è maggiore di una sua parte. Ma in primo luogo c'è da notare che quest'assioma, che non ha senso, se prima non si definisce la parte, non è neppur valido per tutte le grandezze finite, come si può vedere facilmente per i numeri relativi, nei quali la somma di un positivo e di un negativo è minore del primo numero. In secondo luogo si deve osservare che non si dice: un insieme infinito è *uguale* (nel senso logico) a una sua parte integrante, ma che un insieme infinito può essere reso *equivalente* a una sua parte integrante, nel senso che fra tutto l'insieme e la parte che si considera si può stabilire una corrispondenza univoca. Così per es. ponendo la corrispondenza:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \ldots . n \ldots . \\ 2, & 4, & 6, \ldots . 2n \ldots . \end{matrix}$$

si vede che l'insieme dei numeri naturali è coordinabile e però equivalente a quello dei numeri pari che ne è parte integrante.

L'eguaglianza non può certamente aversi; basta togliere anche un solo elemento da un insieme infinito perchè esso non risulti più uguale alla parte rimanente.

Ma l'Aliotta che non ha ben posto mente alla differenza imporantissima fra uguaglianza (nel senso logico) e equivalenza (nel senso di Cantor) e crede che *equivalente* voglia dire *uguale*, non sa persuadersi (e in questo a ragione) come un insieme, sia pure infinito, possa essere *uguale* ad una sua parte, e per dimostrare che non sussiste il teorema citato cade in uno strano errore. Colpito dal fatto che fra un insieme infinito e una sua parte, oltre la corrispondenza univoca, si possono stabilire altre corrispondenze; per es. tra la serie dei numeri naturali e la serie dei quadrati, oltre la corrispondenza univoca:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots \\ 1, & 4, & 9, & 16 & 25, \ldots . ; \end{matrix}$$

si può stabilire la non univoca:

$$\begin{matrix} 1; & 4; & 9 \quad ; \ldots . \\ 1; & 2, \; 3, \; 4 \; ; & 5, \; 6, \; 7, \; 8, \; 9; \ldots . \end{matrix}$$

e altre ancora si possono immaginare; egli *nega* (!) l'equivalenza di un insieme infinito e di una sua parte integrante, cioè in altri termini nega che si possa stabilire una corrispondenza biunivoca.

Con ragionamento simile si può dimostrare che 4 per es. non è uguale a 3 + 1. Infatti fra il gruppo (A, B, C, D) rappresentato dal numero 4 e l'insieme dei gruppi (M, N, P), (Q) rappresentati dai numeri 3 e 1, oltre la corrispondenza univoca: $\begin{cases} A, B, C, D \\ M, N, P, Q \end{cases}$

si può stabilire la non univoca: $\begin{cases} A, \quad ; \quad B; \quad C; \quad D \\ M, N, P; \quad Q; \end{cases}$

In realtà la proprietà in quistione è inerente agli insiemi infiniti per il fatto che sono inesauribili, onde se si pone una corrispondenza fra i numeri naturali e i loro doppi, o i loro quadrati, o i loro cubi, ogni numero della prima serie ha sempre il corrispondente nella seconda Ed è strano, torno a dire, che il Prof. Aliotta che pure ha fatto questa giusta considerazione, sia caduto nell'errore citato.

SULLA CLASSE DELLE PERMUTAZIONI

nelle quali gli elementi occupano un posto diverso da quello occupato nella permutazione fondamentale.

PERNA ALFREDO (Napoli)

È noto [1] che il numero P'_n delle permutazioni i cui n elementi occupano un posto diverso da quello occupato nella permutazione fondamentale (permutazioni che diremo *non compagne della fondamentale*, o semplicemente *non compagne*), può trovarsi mediante la formola

$$P'_n = (n-1)(P'_{n-1} + P'_{n-2}),$$

con $P'_1 = o$, $P'_2 = 1$, o mediante l'altra

$$P'_n = n P'_{n-1} + (-1)^n,$$

con $P'_1 = o$.

---

(1) Cfr., p. es., MINETOLA: « *Sopra alcune classi di permutazioni* ». (*Giorn. di Matem.*, vol. XLIII, pag. 377). V. anche *Encycl. des Le Math.*, t. I, v. I, f. I, p. 71.

In questa piccola nota vogliamo determinare quante delle P'_n permutazioni non compagne sono di classe pari e quante di classe dispari. Dimostriamo perciò il seguente

TEOREMA. — *Delle* P'_n *permutazioni non compagne della fondamentale,* $\frac{P'_n + (n-1)}{2}$ *sono di classe pari e* $\frac{P'_n - (n-1)}{2}$ *sono di classe dispari, se* n *è dispari; al contrario se* n *è pari* (1),

Sieno $a_1, a_2, \cdots, a_n$ gli n elementi dati. Tutte le permutazioni non compagne possono distribuirsi nei tre gruppi

$$(A_1)\ a_2 \cdots\cdots \quad , \quad (A_1')\ a_i a_1 \cdots\cdots\ (i > 2),$$
$$(A_1'')\ a_i a_j \cdots\cdots\ (i \text{ e } j > 2,\ i \neq j)$$

dei quali il 3° si trasforma in sè stesso per lo scambio di a_1 con a_2, occupando questi elementi posti successivi al 2°. Mettendo ogni volta da parte gruppi di permutazioni nei quali quelle di classe pari sono tante quanto quelle di classe dispari, restano a considerarsi i gruppi (A_1) ed (A_1'). È facile vedere però che restano a considerarsi solo le permutazioni della forma (2)

$$(A)\ a_i a_1 \text{——} a_{i-2} \cdots\cdots\ (i \geqq 2),$$

convenendo di non segnare alcun elemento al posto di a_0 nel caso di $i = 2$.

Ed infatti le (A_1') danno luogo ai tre gruppi

$$(A_2)\ a_3 a_1 \cdots\cdots \quad , \quad (A_2')\ a_i a_1 a_2 \cdots\cdots\ (i > 3)$$
$$(A_2'')\ a_i a_1 a_j \cdots\cdots\ (i \text{ e } j > 3,\ i \neq j)$$

---

(1) Di questo teorema ho dato un'altra dimostrazione nella nota *Di alcune disposizioni e dell'Hessiano di una ennaria spezzata in fattori lineari* (*Annali* del R. Istituto Tecnico di Napoli, Anno scolastico 1910-1911). La dimostrazione che qui riportiamo è fondata sull'elementarissimo principio che: Scambiando fra loro due elementi di una permutazione, si ha un'altra permutazione di classe contraria.

(2) La lineetta, nella permutazione, sta a rappresentare l'allineamento degli elementi i cui indici vanno successivamente dall'indice dell'elemento che precede la lineetta a quello dell'elemento che la segue.

dei quali il terzo si trasforma in sè stesso per lo scambio di a_2 con a_3, occupando questi elementi posti successivi al 3°, mentre il 2° dà luogo, a sua volta, ai tre gruppi

$$(A_3)\ a_4 a_1 a_2 \cdots \quad , \quad (A_3')\ a_i a_1 a_2 a_3 \cdots \ (i > 4)$$
$$(A_3'')\ a_i a_1 a_2 a_j \cdots \ (i \text{ e } j > 4,\ i \neq j)$$

dei quali il 3° si trasforma in sè stesso per lo scambio di a_3 con a_4 e però può tralasciarsi.

In generale se son rimasti a considerarsi i gruppi

$$(A_1),\ (A_2),\ (A_3), \cdots, (A_{h-1}),\ (A'_{h-1}),$$

ad essi possiamo sostituire gli altri

$$(A_1),\ (A_2), \cdots, (A_h),\ (A_h'),$$

giacchè il gruppo (A'_{h-1}) dà luogo ai tre gruppi

$$(A_h)\ a_{h+1} a_1 \text{——} a_{h-1} \cdots \quad , \quad (A'_h)\ a_i a_1 \text{——} a_h \cdots \ (i > h+1)$$
$$(A_h'')\ a_i a_1 \text{——} a_{h-1} a_j \cdots \ (i \text{ e } j > h+1,\ i \neq j)$$

dei quali il 3° si trasforma in sè stesso per lo scambio di a_{h-1} con a_h, occupando questi elementi posti successivi all'$(h+1)^{imo}$, e però può mettersi da parte.

Restano dunque a considerarsi le permutazioni

$$(A_1),\ (A_2), \cdots, (A_{n-1}),$$

cioè quelle del gruppo (A), giacchè (A'_{n-3}) dà luogo solo ad (A_{n-2}) e ad $(A_{n-2}) \equiv (A_{n-1})$.

Dico ora che delle (A) resta il gruppo

$$(\alpha) \quad a_i a_1 \text{——} a_{i-2} a_{i+1} \text{——} a_n a_{i-1} \quad (i = 2, 3, \cdots, n).$$

Ed infatti per $i = n$, le (A) danno l'unica permutazione

$$a_n a_1 \text{——} a_{n-2} a_{n-1},$$

cioè quella che si ricava da (α) per $i = n$. Per $i < n$, le (A) possono assumere la forma

$$(B_1)\ a_i a_1 --- a_{i-1} a_j \cdots\ ,\ (B_2)\ a_i a_1 --- a_{i-2}\, a_{i+1} \cdots$$

$$(B_3)\ a_i a_1 --- a_{i-2} a_j a_{i-1} \cdots\ ,\ (B_4)\ a_i a_1 --- a_{i-2} a_j a_k \cdots$$

$$(k \text{ e } j > i+1,\ k \neq j),$$

ed evidentemente le (B_1) si scambiano con le (B_3) per lo scambio di a_{i-1} con a_j, mentre il gruppo (B_4) si trasforma in sè stesso per lo scambio di a_{i-1} con a_{i+1}, occupando questi elementi posti successivi all' $(i+1)^{imo}$. In generale delle

$$a_i a_1 --- a_{i-2}\, a_{i+1} --- a_{i+j} \cdots$$

restano le $a_i a_1 --- a_{i-2} a_{i+1} --- a_{i+j+1} \cdots$. Ed infatti le prime possono essere della forma

$$(B_1')\quad a_i a_1 --- a_{i-2} a_{i+1} --- a_{i+j} a_{i-1} a_k \cdots$$

$$(B_2')\quad a_i a_1 --- a_{i-2} a_{i+1} --- a_{i+j} a_{i+j+1} \cdots$$

$$(B_3')\quad a_i a_1 --- a_{i-2}\, a_{i+1} --- a_{i+j}\, a_k\, a_{i-1} \cdots$$

$$(B_4')\quad a_i a_1 --- a_{i-2} a_{i+1} --- a_{i+j}\, a_k\, a_l \cdots$$

$$(l \text{ e } k > i+j+1\ ,\ l \neq k),$$

delle quali, evidentemente, le (B_1') si mutano nelle (B_3'), e viceversa, per lo scambio di a_{i-1} con a_k, mentre il gruppo delle (B_4), si trasforma in sè stesso per lo scambio di a_{i-1} con a_{i+j+1}, occupando questi due elementi posti successivi all' $(i+j+1)^{imo}$.

In tal modo restano a considerarsi le permutazioni (α) che hanno $(i-1)+(n-i)=n-1$ inversioni.

Dunque delle P'_n permutazioni non compagne della permutazione fondamentale, le $(n-1)$ del gruppo

$$a_i\, a_1 --- a_{i-2}\, a_{i+1} --- a_n\, a_{i-1} \quad (i=2,3,\cdots,n)$$

sono di classe pari o dispari secondochè è $n-1$ pari o dispari, (ovvero n dispari o pari), mentre delle altre quelle di classe pari e quelle di classe dispari sono in egual numero. Ne segue senz'altro il teorema enunciato in principio.

Napoli, gennaio del 1912.

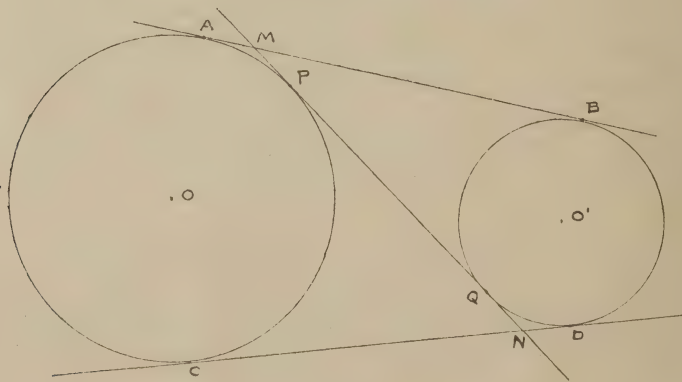
UNA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE

affinchè un poligono convesso di n lati sia circoscrittibile ad una circonferenza

MAGNANI TERESA (Milano)

Premettiamo i due seguenti teoremi:

Teorema 1. — Se due circonferenze sono esterne l'una all'altra, il segmento di una loro tangente interna comune, compreso fra uno dei punti di contatto di tale tangente e il punto d'intersezione di essa con una delle due tangenti esterne comuni alle ciconferenze date, è uguale al segmento compreso fra il rimanente punto di contatto e il punto d'intersezione con l'altra tangente esterna ».

Dimostrazione. — Sieno A, B; C, D; P, Q, rispettivamente, le coppie di punti di contatto delle circonferenze O e O' con le due tangenti esterne e con una delle tangenti interne; e M e N, rispettivamente, i punti d'intersezione delle tangenti esterne AB e CD con la tangente interna PQ.

Per la nota proprietà che i segmenti delle due tangenti ad una circonferenza uscenti da un punto esterno ad essa, compresi

fra il punto stesso e i punti di contatto, sono uguali, si ottiene:

$$AB = CD \text{ [1]}$$

ovvero:

$$AM + MB = CN + ND$$

od anche, sempre in forza della medesima proprietà:

$$AM + MQ = CN + NQ$$

od ancora:

$$MP + MQ = NP + NQ$$

ovvero:

$$2\,MP + PQ = 2\,NQ + PQ$$

da cui si deduce:

$$MP = NQ$$ c. v. d.

Teorema 2. — Reciprocamente: « Se due circonferenze, tangenti ad una medesima retta, sono situate da bande opposte di essa, e se sopra tale retta si stacca, a partire da uno dei punti di contatto, un segmento uguale al segmento compreso fra il rimanente punto di contatto e il punto d'intersezione della retta con una delle tangenti esterne comuni alle due circonferenze, la tangente condotta dall'estremo del primo segmento ad una delle circonferenze date è tangente anche all'altra ».

Dimostrazione. — Sieno P e Q i punti di contatto di due circonferenze O e O' con una medesima retta PQ, rispetto alla quale esse sieno situate da bande opposte; A e B i punti di contatto di una loro tangente esterna comune AB; M il punto d'intersezione di AB con PQ.

Si stacchi sul prolungamento di PQ un segmento $QN = MP$, e si conducano per N le rimanenti tangenti NC e ND alle circonferenze O e O', rispettivamente (C e D essendo i rispettivi punti di contatto). Il teorema sarà dimostrato se si dimostra che $\widehat{CND}$ è un angolo piatto, ovvero che $\widehat{ONO'}$ è un angolo retto.

---

[1] Nel caso particolare, in cui i raggi delle due circonferenze sieno uguali, e quindi sia AB parallela a CD, i segmenti AB e CD sono uguali, perchè entrambi uguali alla distanza dei centri delle circonferenze date.

1° caso. — Le due circonferenze abbiano raggio uguale. Allora, essendo per ipotesi:

$$MP = NQ$$

i due triangoli

$$OMP;\ O'NQ$$

risultano uguali, e perciò è:

$$O\widehat{M}P = O'\widehat{N}Q \qquad (1)$$

e così pure risultano uguali gli altri due triangoli

$$MO'Q;\ NOP$$

e perciò è anche:

$$O'\widehat{M}Q = O\widehat{N}P \qquad (2)$$

Onde, sommando membro a membro la (1) e la (2), si ottiene:

$$O\widehat{M}O' = O'\widehat{N}O$$

e poichè $O\widehat{M}O'$ è retto, perchè MO e MO' sono bisettrici di angoli adiacenti, è pure $O'\widehat{N}O$ un angolo retto c. v. d.

*2° caso. — Le due circonferenze abbiano raggio disegua*le. Imaginiamo allora tracciate nella figura le linee che servono a costruire le tangenti comuni AB e PQ : OH è la differenza tra i raggi delle due circonferenze date; OK è la somma dei raggi stessi; $O'H$ ed $O'K$ sono, rispettivamente, tangenti alle due circonferenze di raggi OH e OK; $O'Q$ è parallelo ad OK.

Sia poi F il punto d' incontro di OK con la circonferenza di raggio OH; onde, per la costruzione fatta, FP è segmento uguale al raggio della circonferenza O'. Si congiungano poi M e N con O, F, O'.

Essendo, per ipotesi:

$$MP = NQ$$

i triangoli

$$FMP;\ O'NQ$$

risultano uguali, e perciò è:

$$F\widehat{M}P = O'\widehat{N}Q \qquad (3)$$

e così pure sono uguali gli altri due triangoli

$$MO'Q;\ NFP$$

e perciò è anche:

$$O'\widehat{M}Q = F\widehat{N}P \qquad (4)$$

Ma

$$O\widehat{M}O' = O\widehat{M}F + F\widehat{M}P + O'\widehat{M}Q$$

è un angolo retto, perchè formato dalle bisettrici di due angoli, che sono adiacenti per ipotesi; onde, per le uguaglianze precedenti, si potrà pure affermare che

$$\widehat{ONO'} = \widehat{ONF} + \widehat{FNP} + \widehat{O'NQ}$$

è retto, quando si sia dimostrato:

$$\widehat{ONF} = \widehat{OMF}$$

E invero: detto E il punto d'intersezione della NF con la OM, nel triangolo EMN i due angoli $\widehat{EMN}$ ed $\widehat{ENM}$ risultano complementari in forza della (4); onde il terzo angolo $\widehat{MEN}$ è retto; cioè OM è perpendicolare ad NE. Allora i due triangoli

$$EOF\,;\; FNP$$

essendo rettangoli ed avendo una coppia di angoli acuti uguali, perchè opposti al vertice, hanno i lati proporzionali, e in particolare:

$$EF : PF = OE : NP. \tag{5}$$

Anche i due triangoli

$$OEF\,;\; OPM$$

essendo rettangoli ed avendo un angolo acuto comune, avranno i lati proporzionali, e in particolare:

$$EF : PM = OE : OP. \tag{6}$$

Dalle proporzioni (5) e (6) si deduce allora:

$$PF : NP = PM : OP$$

e perciò i due triangoli rettangoli

$$MPF\,;\; OPN$$

sono simili; onde è pure:

$$\widehat{FMP} = \widehat{NOP}.$$

Ma $\widehat{FMP}$ è complementare di $\widehat{OMF} + \widehat{O'MQ}$

e $\widehat{NOP}$ » » $\widehat{ONF} + \widehat{FNP}$

e poichè

$$\widehat{FNP} = \widehat{O'MQ} \qquad \text{(per la (4))}$$

è necessariamente:

$$\widehat{ONF} = \widehat{OMF} \qquad \text{c. v. d.}$$

Facciamo ora seguire le seguenti definizioni:

Definizione 1ª. — Per *segmenti tangenziali interni* di un lato di un poligono convesso s'intendono le due parti in cui il lato stesso è diviso dal suo punto di contatto con la circonferenza tangente ad esso e alle due semirette che escono dai suoi estremi e alle quali appartengono i due lati ad esso contigui.

Definizione 2.ª — Per *segmenti tangenziali esterni* di un lato di un poligono convesso s'intendono le due parti in cui il lato stesso è diviso dal suo punto di contatto con la circonferenza tangente ad esso e alle due semirette che escono dai suoi estremi e alle quali appartengono i prolungamenti dei lati ad esso contigui.

Chiameremo, in generale, con MM' e $M'N$, rispettivamente, il primo e il secondo segmento tangenziale interno del lato MN, e con MM'' e $M''N$ il primo e il secondo segmento tangenziale esterno del medesimo lato.

Ciò posto, possiamo enunciare il seguente:

Teorema 3. — « Condizione necessaria e sufficiente affinchè un poligono di n lati sia circoscrittibile ad una circonferenza è che il secondo segmento tangenziale interno del lato $m.^{mo}$ sia uguale al secondo segmento tangenziale esterno del lato $(m+1)^{mo}$ (e ciò per $m = 1; 2; 3 \cdots; n-3$).

Dimostrazione.

1) *La condizione è necessaria.*

Infatti: Sia $ABCD \cdots MNP \cdots$ un poligono circoscritto ad una circonferenza. Per il teorema 1° si ha appunto:

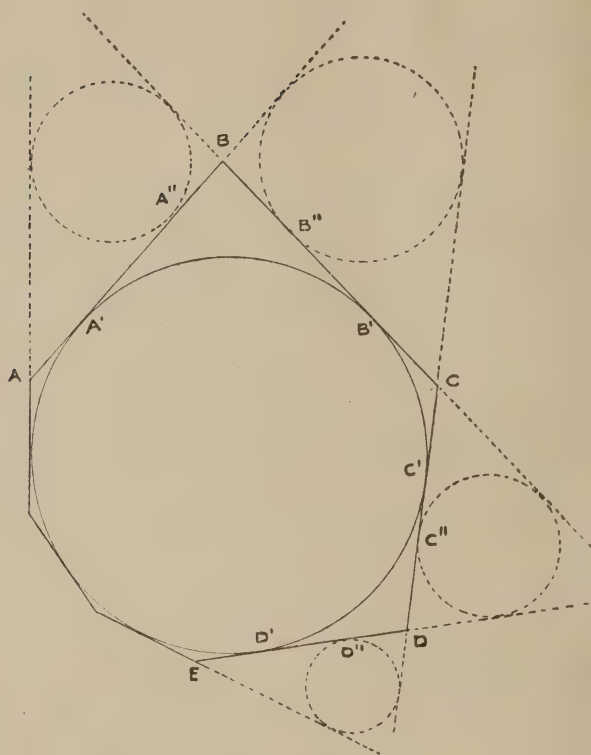
$$A'B = BB' = B''C$$

$$B'C = CC' = C''D$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

in generale:

$$M'N = NN' = N''P$$

. . . .

2) *La condizione è sufficiente.*

Infatti: sia $ABCD \cdots MNP \cdots QRST$ un poligono per il quale si verifichi:

$$A'B = B''C$$
$$B'C = C''D$$
$$\cdots\cdots$$
$$M'N = N''P$$
$$\cdots\cdots$$
$$Q'R = R''S.$$

Allora, essendo:

$$A'B = BB' = B''C$$

la circonferenza tangente ai lati m.^{mo} 1° e 2°, risulta, per il teorema 2°, tangente anche al 3°; essendo pure:

$$B'C = CC' = C''D$$

la circonferenza tangente ai lati 1°, 2° e 3°, risulta tangente anche al 4°; e così di seguito; infine, essendo:

$$Q'R = RR' = R''S$$

la circonferenza tangente ai lati $(n-4)^{mo}$, $(n-3)^{mo}$ e $(n-2)^{mo}$, è pure tangente al lato $(n-1)^{mo}$. Onde esiste una circonferenza tangente a tutti i lati del poligono.

Osservazione. — La condizione espressa dal precedente teorema è l'insieme di $n-3$ eguaglianze, le quali danno la condizione necessaria e sufficiente affinchè i lati di un poligono di n lati sieno equidistanti da un medesimo punto.

Per $n = 3$ è $n - 3 = 0$; onde nessuna condizione deve verificarsi affinchè un triangolo sia circoscrittibile.

Per $n = 4$ è $n - 3 = 1$; cioè, se $ABCD$ è il quadrilatero, è necessario e sufficiente, per la sua circoscrittibilità, che sia:

$$A'B = B''C \tag{7}$$

la quale uguaglianza addizionata membro a membro con le seguenti:

$$AA' = AD'$$

$$DC' = DD'$$

$$CC' = (CB') = BB''$$

dà

$$AB + CD = AD + BC \tag{8}$$

che è la ben nota proprietà caratteristica di un quadrilatero circoscritto; viceversa, dalla (8) si deduce la (7).

Quando poi il poligono sia regolare, i due segmenti tangenziali interni di ogni lato coincidono coi suoi segmenti tangenziali esterni, e tutti sono uguali alla metà del lato del poligono regolare; onde la condizione espressa dal teorema 3° è sempre verificata: cioè un poligono regolare è sempre circoscrittibile.

Sul triangolo ortico e su un trapezio speciale

DIONISIO GAMBIOLI (Roma)

1. — Innanzi tutto premettiamo due teoremi ben noti senza dimostrarli.

a) Dati due punti A e B [1] dalla stessa banda di una retta xy, il cammino più breve, che va da A a B, passando per un punto O della xy, è quello, onde si ha:

$$\widehat{AO}x = \widehat{BO}y.$$

b) Le altezze di un triangolo qualunque sono le bisettrici degli angoli del suo triangolo ortico.

2. — Nei « *Nova acta eruditorum*, anni MDCCLXXV pubblicati a Lipsia », l' arcidiacono Giovanni Francesco Fagnani (1715-1797), figlio dell' eminente matematico Giulio Fagnani (1782-1766) da Sinigallia, nella Nota intitolata: « *Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorun spectantia* » a pp. 281-303 e precisamente alla pag. 297 dimostra questo:

Teorema. — « In un triangolo isoscele il suo triangolo ortico ha il perimetro minimo fra tutti quelli inscritti in detto triangolo ». Questo teorema, ccme vedremo, si può facilmente estendere al triangolo ortico di un triangolo qualunque.

3. -- Ciò premesso veniamo al Teorema di Fagnani generalizzato.

« Il triangolo ortico di un triangolo qualunque ha il perimetro minimo fra tutti quelli inscritti nel triangolo primitivo ».

Consideriamo un triangolo qualunque ABC ed $A'B'C'$ il suo triangolo ortico. Per il Teorema *b*) del n. 1 si ha $A\widehat{A'}B' = A\widehat{A'}C'$, ed essendo $A\widehat{A'}C = A\widehat{A'}B$ si ha pure: $B'\widehat{A'}C = C'\widehat{A'}B$ e così $\widehat{BC'}A' = A\widehat{C'}B'$, $A\widehat{B'}C' = A'\widehat{B'}C$. Allora dal Teorema *a*) del n. 1 segue che:

---

[1] Le figure di questa Nota sono sì semplici, che il lettore può farsele da sè.

$A'B' + B'C'$ è la spezzata minima fra A' e C' passante per un punto di AC;

$B'C' + C'A'$ è la spezzata minima fra B' ed A' passante per un punto di AB;

$C'A' + A'B'$ è la spezzata minima fra C' e B' passante per un punto di BC.

D'onde si ha:

$$2(A'B' + B'C' + C'A'),$$

che è doppio del perimetro del triangolo $A'B'C'$, e perciò anche la sua metà $A'A' + B'C' + C'A'$ è minima fra i perimetri di tutti gli altri triangoli inscritti nel triangolo dato, essendo minimo il suo doppio, c. d. d.

Osservazione 1ª. — A pag. 300 dell'opera sopra citata il Fagnani dalla seconda dimostrazione del teorema enunciato a pag. 296 trae questo:

Corollarium. — « *Si ergo triangulum* BAD (l'isoscele considerato) *fuerit aequilaterum, triongulum inscriptum* CFS *maximum habebit aream, et minimum perimetrum* », cioè « Il triangolo ortico del triangolo equilatero ha la massima area ed il minor perimetro fra i triangoli inscritti nel triangolo equilatero ». Un tal corollario non è esatto, perchè il triangolo ortico di un triangolo equilatero ha bensì il perimetro minimo fra i triangoli inscritti in esso, ma non è vero che abbia l'area massima; poichè fra i triangoli inscritti in un triangolo (equilatero o no), quello di area massima è precisamente il triangolo stesso.

Osservazione 2ª. — Sia l il lato di un triangolo equilatero, e si prendano ad esempio, rispettivamente sui lati BC, CA, AB i segmenti $BA' = CB' = AC' = \frac{1}{n} \cdot l$, ove n è un N_1. Si consideri ora il triangolo $A'B'C'$, che è pur esso equilatero; sia $2p'$ il suo perimetro e s' la sua area, si ha facilmente:

$$(1) \qquad 2p' = \frac{3l}{n}\sqrt{n^2 - 3n + 3} = 3l\sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n^2}};$$

$$(2) \quad s' = \frac{\sqrt{3}}{4n^2}(n^2 - 3n + 3) \cdot l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n^2}} \cdot l^2.$$

Dalla (1) si vede che $2p'$ assume il valore minimo per $n=2$, per cui si ha:

$$(1)' \qquad 2p' = \frac{3l}{2},$$

$$(2)' \qquad s' = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l^2,$$

che sono rispettivamente il perimetro e l'area del triangolo ortico del triangolo equilatero di lato l.

Ora dalla (2) si vede che s' assume il valore massimo per $n=1$ e per $n=\infty$. Nel 1° caso si ha $BA' = CB' = AC = l$, cioè A' coincide con A, B' con B, C' con C; nel 2° caso è: $BA' = CB' = AC' = o$, cioè B coincide con A', C con B', A con C'; quindi in entrambi i casi si ha:

$$s' = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2.$$

4. — Dimostriamo ora che è:

$$AA' \times OA' = BA' \times A'C,$$

Dimostrazione. — Osservo che gli angoli $\widehat{BAA'}$, $\widehat{OCA'}$ hanno i lati rispettivamente perpendicolari; onde i triangoli rettangoli $AA'B$, $OA'C$ sono equiangoli, perciò sono simili; onde:

$$AA' : A'C = BA' : OA';$$

da cui:

$$AA' \times OA' = A'C \times BA'.$$

Corollario. — Se il triangolo BAC è rettangolo in A, allora O coincide con A; e quindi:

$$\overline{AA'}^2 = BA' \times CA'$$

5. Problema. — Se a, b, c sono le misure dei lati del triangolo ABC, calcolare le lunghezze dei lati del suo triangolo ortico.

Soluzione. — Siano h_a, h_b, h_c le lunghezze delle altezze del triangolo ABC corrispondenti rispettivamente ai lati a, b, c. Dai triangoli rettangoli $AA'B$, $AA'C$ si ha:

$$\overline{AA'}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BA'}^2 = \overline{AC}^2 - (BC - BA')^2;$$

da cui si ottiene facilmente:

$$BA' = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}{2 \cdot BC} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a};$$

e quindi;

$$CA' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Ora per il Teorema del n. 46 si ha:

$$OA' = \frac{BA' \times CA'}{AA'},$$

ossia:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} OA' &= \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2}{4a^2h_a}, \text{ e quindi:} \\ OA &= \frac{4a^2h_a^2 - a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2}{4a^2h_a}. \end{aligned} \right.$$

Analogamente si ha:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} OB' &= \frac{b^4 - a^4 - c^4 + 2a^2c^2}{4b^2h_b}, \\ OB &= \frac{4b^2h_b^2 + a^4 - b^4 + c^4 - 2a^2c^2}{4b^2h_b}. \end{aligned} \right.$$

Ora dai due triangoli simili OAB, $OA'B'$ si ha:

$$AB : A'B' = OA : OB';$$

da cui:

$$A'B' = \frac{AB \times OB'}{OA};$$

quindi per le (1), (2) si ha:

$$A'B' = \frac{a^2h_ac(-a^4 + b^4 - c^4 + 2a^2c^2)}{b^2h_b(4a^2h_a^2 - a^4 + b^4 - c^4 - 2b^2c^2)};$$

se s è l'aroa del triangolo ABC, si sa che è:

$$2s = a \cdot h_a = b \cdot h_b;$$

onde:

$$A'B' = c' = \frac{ac(-a^4 + b^4 - c^4 + 2a^2c^2)}{b(16s^2 - a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2)}.$$

Ora si sa che è:

$$16s^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4,$$

che sostituisco nel denominatore della frazione, che dà il valore di c'; e così ho:

$$c' = \frac{ac(-a^4 + b^4 - c^4 + 2a^2c^2)}{2a^2b(-a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{c(-a^4 + b^4 - c^4 + 2a^2c)}{2ab(-a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Ma è

$$-a^3 + b^4 - c^4 + 2a^2c^2 = b^4 - (a^2 - c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2);$$

quindi si ha:

$$c' = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}{2ab(-a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc}.$$

Sicchè abbiamo:

$$\text{(3)} \qquad \left\{ \begin{aligned} c' &= \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc}, \\ b' &= \frac{b^2(a^2 - b^2 + c^2)}{2abc}, \\ a' &= \frac{a^2(-a^2 + b^2 + c^2)}{2abc}. \end{aligned} \right.$$

Osservazione 1ª. — Sicchè si ha;

$$\text{(4)} \quad 2p' = a' + b' + c' = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{2abc} = \frac{8s^2}{abc}.$$

Se R ed r sono i raggi dei cerchi circoscritto ed inscritto al triangolo ABC, si sa che è:

$$abc = 4sR \ , \ s = p \cdot r;$$

onde si ha:

$$\text{(4)}' \qquad 2p' = \frac{2s}{R};$$

e quindi:

$$\text{(5)} \qquad s = p' \cdot R = \frac{\sqrt{abcp'}}{2}.$$

Essendo:

$$s = p'R = p \cdot r,$$

si ha:

$$(6) \qquad p' : p = r : R.$$

Osservazione 2ª. — Se a', b', c' sono le misure dei lati del triangolo ortico $A'B'C'$, ed s' è la sua area, si ottiene facilmente:

$$16p'(p'-a')(p'-b')(p'-c') = \\ = \frac{s^2(-a^2+b^2+c^2)^2(a^2-b^2+c^2)^2(a^2+b^2-c^2)^2}{a^4b^4c^4};$$

ossia:

$$16\,s'^2 = \frac{s^2(-a^2+b^2+c^2)^2(a^2-b^2+c^2)^2(a^2+b^2-c^2)^2}{a^4b^4c^4};$$

da cui

$$(7) \qquad s' = \frac{s(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}{4\,a^2b^2c^2};$$

alla quale si può dare anche questa forma:

$$(7)' \quad s' = \\ = \frac{\sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)(-a^2+b^2+c^2)^2(a^2-b^2+c^2)^2(a^2+b^2-c^2)^2}}{16\,a^2b^2c^2}.$$

Indicando con S l'area del triangolo di lati a^2, b^2, c^2, la (7)' si può scrivere così:

$$(8) \qquad s' = \frac{(2 \cdot S)^2 \cdot s}{a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Osservazione 3ª. — Se M, N, P sono rispettivamente i centri dei lati BC, AC, AB del triangolo ABC, di cui O è l'ortocentro, ed M', N', P' rispettivamente i centri dei segmenti OC, OB, OA, è facile vedere che i due triangoli MNP, $M'N'P'$ sono uguali, hanno i lati paralleli a quelli del triangolo ABC, e rispettivamente uguali alla metà dei lati di questo; quindi $MNP = M'N'P' = \frac{1}{4} ABC$.

Da ciò consegue che i triangoli MNP, $M'N'P'$ hanno lo stesso circoncerchio, che è concentrico a quello del triangolo ABC,

il cui raggio è la metà del raggio di quest' ultimo. Se $A'B'C'$ è il triangolo ortico del triangolo ABC, osservo che $A'MNP$ è un trapezio isoscele, essendo MN parallela a BC, e $PN = A'N = \frac{1}{2} \cdot AC$; quindi esso è ciclico. Dunque il circoncerchio del triangolo MNP passa per A'; similmente si dimostra, che esso passa pure per i punti B' e C'. Onde il circoncerchio dei triangoli MNP, $M'N'P'$ è pure il cinconcerchio del triangolo ortico $A'B'C'$. Perciò questo cerchio dicesi *cerchio dei nove punti* o di *Feuerbach*. Il raggio del circoncerchio dei triangoli MNP, $M'N'P'$ è:

$$R' = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}}{4 \cdot \frac{s}{4}} = \frac{abc}{8 \cdot s},$$

che, come si è già veduto, è uguale al raggio del circoncerchio del triangolo ortico $A'B'C'$, ed è la metà del raggio del circoncerchio del triangolo ABC $(R = 2 \cdot R')$.

6. — Calcolo dei raggi R' ed r' del circoncerchio e del cerchio inscritto del triangolo ortico di un triangolo dato.

Da quanto precede risulta:

$$a'b'c' = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{8\,abc\,(a^2 + b^2 + c^2)} =$$

$$= \frac{2\,S^2}{abc\,(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$p' = \frac{4\,s^2}{abc}; \qquad s' = \frac{4\,S^2 \cdot s}{a^2b^2c^2\,(a^2 + b^2 + c^2)};$$

onde abbiamo:

$$R' = \frac{a'b'c'}{4s'} = \frac{abc}{8s}. \tag{1}$$

Essendo

$$R = \frac{abc}{4s},$$

si ha:

$$R = 2 \cdot R'. \tag{2}$$

Ora si ha:

$$r' = \frac{p'}{s'} = \frac{S^2}{abc\,(a^2+b^2+c^2)\cdot s}. \tag{3}$$

Inoltre si ha:

$$s' = \frac{S^2}{abc\,(a^2+b^2+c^2)\cdot s} \cdot \frac{4\,s^2}{abc} = \frac{r's}{R};$$

quindi:

$$s : s' = R : r' \tag{4}$$

si è veduto al n. 5 che è:

$$p' : p = r : R'; \tag{5}$$

ora moltiplicando le (4) e (5) termine a termine si ha:

$$sp' : s'p = r : r'. \tag{6}$$

7. — Sia $ABCD$ un trapezio isoscele circoscrittibile al cerchio; ma esso è anche ciclico; e siano $2\cdot a$, $2\cdot b$ le lunghezze delle basi DC, AB e sia $a > b$. È facile vedere che è:

$$AD = BC = a + b.$$

Se AB è l'altezza del trapezio si ha:

$$DE = a - b\ ;\ EC = a + b.$$

Onde se M ed N sono i centri dei lati AD, BC si ha:

$$AD = BC = EC = MN = a + b.$$

Ora dal triangolo rettangolo AED si ha:

$$AE = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{ab}.$$

Se r è il raggio del cerchio inscritto nel trapezio, si ha:

$$r = \sqrt{ab}.$$

Dal triangolo rettangolo AEC si ha:

$$\text{diagonale } AC = \sqrt{4\,ab + (a+b)^2}.$$

Quindi se R è il raggio del circoncerchio del trapezio $ABCD$, e quindi del triangolo ACD, si ha:

$$R = \frac{(a+b)\sqrt{4ab + (a+b)^2}}{4\sqrt{ab}}.$$

Osservazioni.

1.ª — Si ha:

$$\text{area } MNCE = (a+b) \cdot \sqrt{ab}.$$

$$\text{area } ABCD = 2(a+b) \cdot \sqrt{ab};$$

onde:

$$ABCD \doteq 2 \cdot MNCE.$$

2.ª — Siano O ed O' i centri dei cerchi circoscritto ed inscritto nel trapezio $ABCD$, G ed H i centri delle basi AB, CD, talchè GOH è la sua altezza; allora si ha facilmente:

$$OG = \frac{a^2 + 4ab - b^2}{4\sqrt{ab}};$$

$$OH = \frac{-a^2 + 4ab + b^2}{4\sqrt{ab}};$$

$$OO' = \frac{a^2 - b^2}{4\sqrt{ab}}.$$

3.ª — Sia OI la perpendicolare condotta da P sul lato AD; si ha:

$$OAD \doteq \frac{1}{2} ABCD - (OGA + OHD);$$

e quindi:

$$OAD = \frac{(a+b)^3}{8\sqrt{ab}};$$

onde:

$$OI = \frac{2 \cdot OAD}{AD} = \frac{(a+b)^2}{4\sqrt{ab}}.$$

4.ª — È pure facile calcolare le lunghezze delle diagonali dei trapezi isosceli $ABNM$, $MNCD$; e si ha:

$$AN = \frac{\sqrt{4ab + (a + 3b)^2}}{2};$$

$$CM = \frac{\sqrt{4ab + (b + 3a)^2}}{2}.$$

5.ª — Si ha pure facilmente:

$$\text{area } NAD = (a + b) \cdot \sqrt{ab};$$

onde:

$$NAD \doteq MNCE.$$

Ora se NH è l'altezza del Δ NAD, si ha:

$$NH = 2\sqrt{ab};$$

e quindi:

$$AE = NH = 2\sqrt{ab}.$$

SUI POLIGONI REGOLARI INSCRITTI IN ALTRI POLIGONI REGOLARI

TEOFILO RIETTI (Camerino)

È noto che se su ciascun lato di un poligono regolare $ABCDE\cdots$ si prende un punto, per es. A' su AB, B' su BC, C' su CD ecc. in modo che sia $AA' = BB' = CC' = \cdots$ i punti A', B', $C'\cdots$ in quest'ordine sono i vertici di un poligono regolare inscritto in $ABCDE\cdots$ ed avente lo stesso numero di lati. In questa breve nota mi propongo di dimostrare la proprietà inversa in modo elementare.

Siano i poligoni regolari $ABCDE\cdots H$, $A'B'C'D'E'\cdots H'$ collo stesso numero di lati, il secondo inscritto nel primo.

Si supponga dapprima che un vertice del secondo coincida con un vertice del primo, per es. A' coincida con A. Allora se

il raggio $A'B'$ fosse interno all'angolo $\widehat{BAC}$, il raggio $A'C'$ sarebbe esterno a detto angolo, giacchè gli angoli $\widehat{A}$ ed $\widehat{A'}$ sono eguali. Segue che il raggio $A'B'$ deve coincidere con un lato dell'angolo $\widehat{BAC}$ per es. con AB ed allora $A'C'$ coinciderà con AC.

Il punto B' non può essere esterno al lato AB: se coincidesse con B, anche gli altri vertici coinciderebbero e così i poligoni. Sarà dunque B' un punto interno al segmento AB.

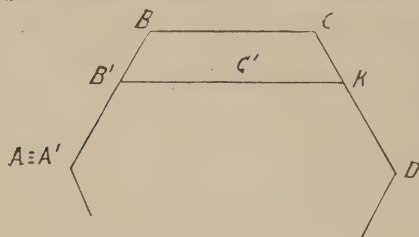



Fig. I

Condotta per B' la parallela a BC sia K il punto d'intersezione con CD. (Fig. I). Nel trapezio $B'BCK$ (è un rettangolo se i poligoni sono quadrati) gli angoli in B e C sono ottusi (retti) onde $B'K \geqq BC$. Ed essendo $AB = AC$, $AB' < AB$ è altresì $AB' < B'K$. Se dunque consideriamo il vertice C' consecutivo di B', del secondo poligono, il punto C' dovrà essere interno al segmento $B'K$, perchè $B'C' = AB'$, onde C' sarà anche interno al primo poligono.

Concludiamo che nessun vertice del secondo poligono può coincidere con un vertice del primo.

Si supponga così che A' cada sopra un lato del primo poligono, per es. su AB. Il vertice consecutivo B' non può cadere sullo stesso lato come si vede facilmente ripetendo il ragionamento precedente.

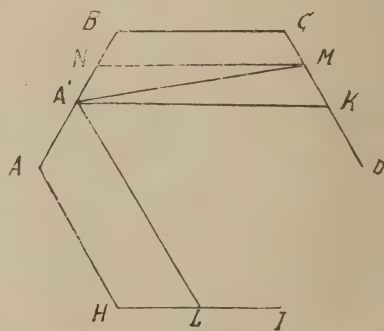
Si conducano per A' i raggi paralleli a BC ed AH e siano K, L i punti d'intersezione con CD e HI (Fig II). Il raggio $A'B'$ non può essere interno all'angolo $\widehat{LA'K}$ nè coincidere con $A'K$ oppure $A'L$. Sarà dunque interno all'angolo $\widehat{BA'K}$ oppure all'angolo $\widehat{AA'L}$.

Sia per es. interno a $\widehat{BA'K}$.

Fig. II

I segmenti che congiungono A' coi punti di CK sono maggiori di BC, giacchè condotta per un punto M di CK la parallela

a BC ed essendo N il punto d'intersezione con $A'B$ l'angolo $A'\widehat{N}M$ è ottuso o retto onde $A'M > MN$, mentre è $MN \geqq BC$ e quindi è appunto $A'M > BC$.

Ora il secondo poligono essendo inscritto nel primo, il lato di quello deve essere minore del lato di questo. Concludiamo che B' deve essere un punto di BC. Così continuando si vede che C' è un punto di CD ecc.

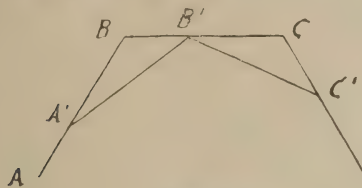



Fig. III

Resta ora a dimostrare che i segmenti AA', $BB' \cdots\cdot$ sono eguali. Essendo (Fig. III)

$$B\widehat{A'}B' + \widehat{B} + B\widehat{B'}A' = 2 \text{ retti}$$

$$C\widehat{B'}C' + A'\widehat{B'}C' + B\widehat{B'}A' = 2 \text{ retti}$$

$$\widehat{B} = A'\widehat{B'}C'$$

risulta:

$$B\widehat{A'}B' = C\widehat{B'}C'$$

ond'anche che i triangoli $BA'B'$, $CB'C'$ sono eguali e quindi $BB' = CC'$.

Nelle considerazioni precedenti si è escluso che i poligoni fossero triangoli. Dato un triangolo equilatero ABC, un altro triangolo equilatero inscritto nel precedente, $A'B'C'$, può avere un vertice, per es. A', coincidente con A e allora degli altri due vertici uno è situato su AB, e l'altro su AC ed è BC parallelo a $B'C'$, Oppure, come in generale, può accadere che i vertici del secondo siano ciascuno su un lato del primo; ma non accade mai che due vertici del secondo (distinti da quelli del primo) cadono sur uno stesso lato del primo.

Una questione algebrico-geometrica

GUIDO ASCOLI [1] (Cagliari)

Risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ ax^2 + by^2 + cz^2 = u \\ (b-c)^2 y^2 z^2 + (c-a)^2 z^2 x^2 + (a-b)^2 x^2 y^2 = v^2 \end{cases}$$

dove a, b, c, u, v *sono numeri reali noti, e discutere le soluzioni nella ipotesi che sia* a > b > c.

A prova della sua cultura, il candidato potrà interpretare geometricamente i risultati, considerando, ad esempio, x, y, z, *quali coordinate cartesiane ortogonali di un punto dello spazio, e* u, v, *quali coordinate di un punto di un piano e studiando la corrispondenza che viene a stabilirsi tra i punti del piano stesso e i punti di una sfera di raggio uno.*

Mediante le posizioni:

$$x^2 = \xi \quad , \quad y^2 = \eta \quad , \quad z^2 = \zeta, \tag{α}$$

il sistema dato si trasforma nell'altro di tipo elementare:

$$\begin{cases} \xi + \eta + \zeta = 1 & (1) \\ a\xi + b\eta + c\zeta = u & (2) \\ (b-c)^2 \eta\zeta + (c-a)^2 \zeta\xi + (a-b)^2 \xi\eta = v^2 & (3) \end{cases}$$

che si può risolvere, come è noto, ricavando colla regola di Cramer i valori di ξ e η in funzione di ζ dalle prime due equazioni e sostituendoli nella terza. L'accennata risoluzione è sempre possibile perchè il determinante dei coefficienti è uguale a $b - a \neq o$.

---

[1] (N. d. D.) *Questa Nota riproduce, con qualche abbreviazione, il lavoro che il prof.* Ascoli *svolse pel Concorso recente per le Cattedre degli Istituti nautici, e che fu classificato col massimo dei punti.*

Evitiamo questo procedimento un po' lungo e dissimmetrico col seguente artifizio: Scritta la (2) sotto la forma abbreviata $\Sigma a\xi = u$, si inalzi al quadrato; otteniamo:

$$\Sigma a^2 \xi^2 + 2 \Sigma bc\eta\zeta = v^2 \qquad (4)$$

D'altra parte la (3) può scriversi, sviluppando:

$$\Sigma (b^2 + c^2) \eta\zeta - 2 \Sigma bc\eta\zeta = v^2 \qquad (5)$$

Dalle (4) e (5) si deduce sommando:

$$\Sigma a^2 \xi^2 + \Sigma (b^2 + c^2) \eta\zeta = u^2 + v^2$$

che aggruppando diversamente i termini si scrive successivamente:

$$\Sigma (a^2 \xi^2 + a^2 \xi\eta + a^2 \xi\zeta) = u^2 + v^2$$

$$\Sigma a^2 \xi (\xi + \eta + \zeta) = u^2 + v^2$$

$$\Sigma \xi \cdot \Sigma a^2 \xi = u^2 + v^2 ;$$

ed infine essendo per la (1) $\Sigma \xi = 1$, si ha in forma esplicita:

$$a^2 \xi + b^2 \eta + c^2 \zeta = u^2 + v^2. \qquad (6)$$

Le (1), (2), (6) costituiscono un sistema lineare certamente risolubile poichè il suo determinante è il determinante di Vandermonde relativo alle quantità a, b, c, per ipotesi distinte; esso è uguale a $(b - a)(c - a)(c - b) = -(a - b)(a - c)(b - c)$. Risolvendo colla regola di Cramer, il numeratore di ξ viene dato da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & b & c \\ u^2 + v^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & b & c \\ u^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & b & c \\ v^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

decomponendo in due la prima colonna; il primo addendo è ancora un determinante di Vandermonde e il secondo si sviluppa subito per gli elementi della prima colonna. Si ha così, con un cambiamento di segno nei due termini della frazione:

$$\xi = \frac{(u - b)(u - c)(b - c) + v^2 (b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)}$$

semplificando e circolando sulle lettere a, b, c si ottengono i tre valori:

$$\xi = \frac{(u-b)(u-c)+v^2}{(a-b)(a-c)}, \quad \eta = \frac{(u-c)(u-a)+v^2}{(b-a)(b-c)},$$

$$\zeta = \frac{(u-a)(u-b)+v^2}{(c-a)(c-b)}. \tag{7}$$

Da questi per le posizioni (α) si otterranno x, y, z colle

$$x = \pm\sqrt{\xi}\ , \quad y = \pm\sqrt{\eta}\ , \quad z = \pm\sqrt{\zeta} \tag{8}$$

dove i doppî segni essendo assolutamente indipendenti, si ottengono *otto* soluzioni del sistema proposto, in valori reali o puramente immaginari. Il sistema essendo di 16° grado, ciò significa che si hanno ancora otto soluzioni *infinite*; geometricamente, cioè interpretando x, y, z come coordinate cartesiane di un punto dello spazio, si può dire che le tre superficie rappresentate dalle tre equazioni del sistema hanno 8 intersezioni a distanza finita e otto all' infinito. Lo verifichiamo introducendo coordinate cartesiane omogenee (coordinate di Hesse) x_1 x_2 x_3 x_4 definite dalle formule:

$$x = \frac{x_1}{x_4}\ , \quad y = \frac{x_2}{x_4}\ , \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

e ponendo poi $x_4 = 0$, equazione del piano all' infinito Le equazioni del sistema divengono così:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 & (9) \\ a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 = 0 & (10) \\ (b-c)^2 x_2^2 x_3^2 + (c-a)^2 x_3^2 x_1^2 + (a-b)^2 x_1^2 x_2^2 = 0. & (11) \end{array}\right.$$

Queste equazioni sono in sostanza le stesse (1), (2), (3), nelle quali i secondi membri sono fatti uguali a zero. Per dimostrarne la compatibilità con valori non tutti nulli delle incognite si può procedere direttamente od anche osservare che ripetendo le trasformazioni già eseguite si trova che tra le forme F, G, H che costituiscone i primi membri delle (9), (10), (11) si ha la relazione:

$$G^2 + H = FL$$

dove L rappresenta la forma quadratica $\Sigma\, a^2 x_1^2$. Di qua risulta infatti che sul piano all' infinito la curva $H = 0$ forma fascio coll' altra $FL = 0$ (scissa in due coniche) e colla $G^2 = 0$, che è una conica doppia, dimodochè i punti comuni a $F = 0$ e a $G = o$ sono comuni anche a $H = 0$, ed anzi in ciascuno di essi sono riunite due intersezioni delle tre curve. Basta dunque risolvere il sistema delle (9) (10) e contare due volte ognuna delle quattro soluzioni. Evidentemente x_1^2, x_2^2, x_3^2 sono proporzionali ai minori della matrice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

e si ha quindi come soluzione:

$$\frac{x_1}{\pm\sqrt{b-c}} = \frac{x_2}{\pm\sqrt{c-a}} = \frac{x_3}{\pm\sqrt{a-b}}$$

Potendo scegliere ad arbitrio una determinazione del radicale in uno dei termini si hanno appunto quattro serie di rapporti possibili per x_1, x_2, x_3. Questi rapporti sono in parte immaginari e quindi tali sono i punti cercati; essi sono anzi sul cerchio immaginario all' infinito, appartenendo alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Discussione dei valori finiti. — Le condizioni di realità per le incognite x, y, z, si riducono evidentemente alle tre disuguaglianze:

$$\xi \geqq 0 \quad , \quad \eta \geqq 0 \quad , \quad \zeta \geqq 0$$

oppure, tenendo conto dei segni dei denominatori nelle formule (7) alle altre:

$$(u-b)(u-c) + v^2 \geqq o\,; \quad (u-c)(u-a) + v^2 \leqq o\,;$$

$$(u-a)(u-b) + v^2 \geqq o. \, (\beta)$$

Trattandosi di disuguaglianze a due parametri u, v, è opportuno ricorrere ad una rappresentazione geometrica, di cui i risultati saranno poi confermati dal ragionamento algebrico. Considerando u, v come coordinate cartesiane dei punti di un piano, le equazioni che si ottengono assumendo nelle (β) il segno di uguaglianza rappresentano tre cerchi aventi il centro nell' asse

delle u e precisamente nei punti di ascissa $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, $\frac{a+b}{2}$.
Considerando infatti ad es. la prima equazione:

$$(u-b)(u-c)+v^2=o \qquad (12)$$

vediamo chr essa può scriversi:

$$\left(u-\frac{b+c}{2}\right)^2+v^2=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2,$$

e quindi le coordinate del centro sono $u=\frac{b+c}{2}$, $v=o$.

Del resto basta fare $v=o$ per avere $u=b$ e $u=c$ e questo determina i due estremi del diametro del primo cerchio giacenti sull' asse u. Si vede così che se si prendono sull' asse u i punti M, N, P di ascisse a, b, c, l'equazione (12) e le analoghe rappresentano i cerchi c_1, c_2, c_3 di diametri NP, PM, MN, mentre le inequazioni (β) rappresentano rispettivamente la parte di piano esterna a c_1, la parte interna a c_2, la parte esterna a c_3. Per cui le condizioni di realità saranno soddisfatte insieme nell' area S determinata per interferenza da queste tre regioni, area che è costituita da due triangoli a lati curvilinei e ad angoli nulli (*arbèlo*), simmetrici rispetto all' asse u.

Per completare la discussione con questo metodo osserviamo che le altre parti di piano determinate dai tre cerchi sono l' interno S_1 di c_1, l' esterno S_2 di c_2 e l' interno S_3 di c_3. In S_1 non vale la prima della (β); valgono invece le altre due e perciò per ogni punto (u, v) situato in S_1 si ha:

$$\xi < o \quad , \quad \eta > o \quad , \quad \zeta > o$$

e quindi

$$x \text{ imm. puro} \quad , \quad y \text{ reale} \quad , \quad z \text{ reale.}$$

Analogamente in S_2 è immaginaria la y, in S_3 la z. Il passaggio dai valori reali agli immaginarî si compie attraverso lo zero, poichè su c_1 si annulla la x, su c_2 la y, su c_3 la z. In ciascuno dei punti M, N, P si annullano due delle incognite e non la terza.

Per confermare analiticamente questi risultati scriviamo le (β) nella forma:

$$v^2 \geqq A \quad , \quad v^2 \leqq B \quad , \quad v^2 \geqq C \qquad (\gamma)$$

avendo posto

$$A = -(u-b)(u-c)\ ,\ B = -(u-c)(u-a)\ ,\ C = -(u-a)(u-b).$$

Avendo bisogno di confrontare i valori A, B, C calcoliamo:

$$A - B = -(u-c)(a-b),$$

$$B - C = -(u-a)(b-c)\ ,\ C - A = -(u-b)(c-a);$$

e si vede cosi che gli unici valori notevoli per il parametro u sono a, b, c.

Si può allora far variare u nei quatto intervalli $(-\infty, c)$, (c, b) (b, a) (a, ∞) e studiare in ciascuno di essi le disuguaglianze (γ). Preferiamo ottenere direttamente la condizione di realità, senza insistere sugli altri casi che esigono un simile procedimento. Per la compatibilità delle γ si deve avere:

$$B \geq 0\ ,\ A \leq B\ ,\ C \leq B. \qquad (\delta)$$

La prima delle (δ) ci dà $c \leq u \leq a$; la seconda, scritta $A - B \leq 0$, dà $u \geq c$; la terza $u \leq a$; le (δ) ci dicono dunque che u deve appartenere all' intervallo (c, a). Ciò posto nel sistema (γ) la prima e la terza inequazione avendo lo stesso senso, una comprende l' altra; se $A \geq C$, cioè se $A - C \geq o$, o $u \leq b$ il sistema si riduce alla limitazione:

$$A \leq v^2 \leq B$$

da cui si ricava $\sqrt{A} < |v| < \sqrt{B}$.

Se invece $A \leq C$, cioè se $C \geq A \geq o$, o $u \geq b$ il sistema si riduce a:

$$C \leq v^2 \leq B$$

e da esso si ottiene $\sqrt{C} \leq |v| \leq \sqrt{B}$.

Concludendo, si hanno soluzioni reali nelle seguenti condizioni:

$$c \leq u \leq b\ ,\ \sqrt{(b-u)(u-c)} \leq |v| \leq \sqrt{(a-u)(u-c)}$$

$$b \leq u \leq a\ ,\ \sqrt{(a-u)(u-b)} \leq |v| \leq \sqrt{(a-u)(u-c)}.$$

É facile vedere come queste condizioni definiscano appunto la regione S.

Applicazione ad una rappresentazione piana. — Le tre equazioni del dato sistema possono considerarsi come relazioni mediante le quali preso un punto dello spazio le cui coordinate soddisfano alla prima equazione $x^2+y^2+z^2=1$, cioè un punto della sfera unità che ha il centro nell'origine degli assi, vengono determinate le coordinate u, v di un punto di un certo piano, così posto in corrispondenza colla detta sfera. Le formule risolutive (8) servono allora per il passaggio inverso; ed esse ci mostrano che la detta corrispondenza è di tipo (2, 8) poichè ad un punto della sfera corrispondono due punti del piano, ad un punto del piano 8 punti della sfera.

Ora per la precedente discussione ad ogni punto reale (u, v) del piano non corrisponde sempre un punto reale (x, y, z) della sfera; perchè ciò avvenga occorre che (u, v) appartenga all'area S.

Invece si vede subito che fissato (x, y, z), i valori di u e v sono sempre reali, per cui la corrispondenza nel campo reale viene stabilita propriamente tra la sfera unità e il doppio triangolo S. La corrispondenza può essere resa biunivoca ammettendo di prendere per v, x, y, z i soli valori positivi; e viene posta allora tra un ottante o triangolo trirettangolo T della sfera unità e il triangolo ad angoli nulli T' che è la parte di S contenuta nel semipiano $v > o$.

Una proprietà generale della rappresentazione, che assumiamo ora nella forma primitiva, si trova nel modo seguente. Sia:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1 \tag{13}$$

l'equazione di una qualunque quadrica coassiale al sistema coordinato, e consideriamo la curva Γ in cui essa taglia la sfera unità; la corrispondente curva Γ' del piano (u, v) si ottiene ponendo per x^2, y^2, z^2, cioè per ξ, η, ζ, i valori dati dalle (7). Si ottiene:

$$\alpha \frac{(u-b)(u-c)+v^2}{(a-b)(a-c)} + \beta \frac{(u-c)(u-a)+v^2}{(b-c)(b-a)} +$$

$$+ \gamma \frac{(u-a)(u-b)+v^2}{(c-a)(c-b)} = 1 \tag{14}$$

che, potendosi porre nella forma:

$$hu^2 + hv^2 + ku + l = 0$$

è l'equazione di un cerchio avendo il centro sull'asse delle ascisse.

Le costanti α, β, γ contenute linearmente nella (13), lo sono anche nelle (14); ne viene che se la quadrica varia in un sistema lineare, anche il cerchio corrispondente alla sua intersezione T colla sfera varia in un sistema lineare.

Facciamo di questo principio due applicazioni. Consideriamo le quadriche degeneri in coppie di piani rappresentabili nella forma (13) cioè aventi per assi quelli coordinati; si vede facilmente che ve ne sono di due soli tipi: le coppie di piani passanti per un asse e simmetriche rispetto agli altri due, e le coppie di piani paralleli ad uno dei piani coordinati e ad ugual distanza da esse. Fissato un asse o un piano tutte le possibili quadriche di un tipo formano un sistema lineare semplicemente infinito o fascio.

Se ora prendiamo un fascio del primo tipo, per es. quello intorno all'asse z vediamo che due quadriche di esso sono date dai due piani coordinati xz, yz, ciascuno considerato doppio; esse intersecano la sfera secondo coppie di cerchi massimi a cui sul piano (u, v) corrispondono i cerchi c_1, c_2; ne viene che gli altri cerchi massimi segati dagli altri piani del fascio corrisponderanno ai cerchi del fascio determinato da c_1 e c_2. Insomma questi cerchi, tangenti in P, corrispondono ai *meridiani* della sfera rispetto all'asse di rotazione z.

Se invece si considera un fascio del secondo tipo, formato ad es. di coppie di piani paralleli al piano x, y, si vede che di esso fanno parte ancora il piano xy come doppio e anche la coppia di piani tangenti ad esso paralleli. Il primo taglia la sfera in un cerchio a cui corrisponde nel piano (u, v) il cerchio c_3; i due piani tangenti in due punti che corrispondono al vertice P, del triangolo T' e che possono considerarsi, come P, cerchi di raggio nullo. Perciò alle sezioni della sfera con piani paralleli a xy, cioè ai *paralleli* della sfera rispetto all'asse di rotazione z corrispondono i cerchi del fascio determinato da c_3 e dal cerchio nullo P, cioè i cerchi concentrici a c_3.

A questi due casi particolari si giunge facilmente anche per via analitica, ma ci è parso non privo d'interesse dedurli da

una proprietà generale che potrebbe forse condurre a qualche altro risultato relativo a questa rappresentazione.

NOTA. — Per la verità, dobbiamo avvertire che mentre la seconda e terza parte del lavoro sono qui riprodotte, per quel che ricordiamo, come furono svolte nel lavoro di concorso, la prima parte è stata notevolmente abbreviata usando invece che del metodo diretto di risoluzione uno speciale artifizio; conseguentemente è restata modificata la discussione delle radici infinite. Ciò è stato fatto per non abusare della cortese ospitalità del *Bollettino* riempiendone le pagine con calcoli piuttosto lunghi e laboriosi.

PICCOLE NOTE

Sulla regola di Ruffini a due operatori

GARRONE OTTAVIO (Reggio Emilia)

Il chiarissimo professor Giuseppe Sforza, ha esposto nel *Bollettino* (N. 6-7-8 dell'anno 1903) la regola di Ruffini a due operatori spiegandola con un esempio, senza accennare alla dimostrazione e senza occuparsi del resto. La seguente nota ha lo scopo di colmare tali lacune.

I. Dimostrazione della regola di Ruffini a due operatori.

Abbiasi da dividere il polinomio

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + A_{n-1} x + A_n$$

per il binomio $ax - b$.

Otterremo come quoziente una funzione $\phi(x)$ di grado $n-1$. Indicando i coefficienti delle singole potenze di x in $\phi(x)$ con:

$$\gamma_0\ \gamma_1 \cdots\cdots \gamma_{n-1}$$

e con R il resto della divisione; avremo l'identità:

$$f(x) = (ax - b)(\gamma_0 x^{n-1} + \gamma_1 x^{n-2} + \cdots\cdot \gamma_{n-2} x + \gamma_{n-1}) + R,$$

cioè eseguendo la moltiplicazione e ordinando si ottiene:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = a\gamma_0 x^n + (a\gamma_1 - b\gamma_0) x^{n-1} + \\ + (a\gamma_2 - b\gamma_1) x^{n-2} + \cdots\cdots + (a\gamma_{n-1} - b\gamma_{n-2}) x + (R - b\gamma_{n-1});$$

questi due polinomi essendo identici danno le seguenti uguaglianze:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= a\gamma_0 \\ A_1 &= a\gamma_1 - b\gamma_0 \\ A_2 &= a\gamma_2 - b\gamma_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ A_{n-1} &= a\gamma_{n-1} - b\gamma_{n-2} \\ A_n &= R - b\gamma_{n-1}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dalle (1) si ottengono le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{A_0}{a} \\ \gamma_1 &= \frac{b\gamma_0 + A_1}{a} \\ \gamma_2 &= \frac{b\gamma_1 + A_2}{a} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{n-1} &= \frac{b\gamma_{n-2} + A_{n-1}}{a} \\ R &= b\gamma_{n-1} + A_n. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Di qui la regola di Ruffini a due operatori:

« Dividendo una funzione intera in x di grado n per il binomio $ax - b$, si ottiene un quoziente pure intero in n di grado $n-1$ i cui coefficienti si trovano nel seguente modo:

Il primo coefficiente del quoziente (ordinato e completo) si ottiene dividendo per a *il primo coefficente del dividendo (ordinato e completo); ed ogni altro per es. l'* m$^{\text{esimo}}$ *si ottiene moltiplicando l'* (m — 1)$^{\text{esimo}}$ *già ottenuto per* b, *aumentando il prodotto dell'* m$^{\text{esimo}}$ *coefficiente del dividendo e dividendo la somma ottenuta per* a.

Se fosse $R = o$ ponendo $\gamma_i = -z_i$ $(i = o\, 1, 2, \cdots, n-1)$ dalle (2) si ottengono:

$$z_{n-1} = \frac{A_n}{b}$$

$$z_{n-2} = \frac{z_{n-1}\, a + A_{n-1}}{b}$$

$$z_{n-3} = \frac{z_{n-2}\, a + A_{n-2}}{b}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$z_1 = \frac{z_2\, a + A_2}{b}$$

$$z_0 = \frac{z_1\, a + A_1}{b}.$$

« Da queste uguaglianze risulta (conformemente a quanto ha osservato lo Sforza) che si può colla stessa regola detta sopra, procedendo però dall'ultimo termine al primo, trovare i coefficienti del quoziente, cambiati di segno rcambiando l'ufficio degli operatori, cioè prendendo a per moltiplicatore e b per divisore ».

Resto della divisione.

Moltiplicando le uguaglianze (1) rispettivamente per

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n, \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}, \left(\frac{b}{a}\right)^{n-2}, \ldots \left(\frac{b}{a}\right), 1$$

si hanno le seguenti:

$$A_0\left(\frac{b}{a}\right)^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^n \gamma_0$$

$$A_1\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\gamma_1 - a\left(\frac{b}{a}\right)^n \gamma_0$$

$$A_2\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2}\gamma_2 - a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\gamma_1$$

. . . .

$$A_{n-1}\left(\frac{b}{a}\right) = a\left(\frac{b}{a}\right)\gamma_{n-1} - a\left(\frac{b}{a}\right)^2\gamma_{n-2}$$

$$A_n = R - a\left(\frac{b}{a}\right)\gamma_{n-1}.$$

Sommando queste uguaglianze si ha:

$$A_0\left(\frac{b}{a}\right)^n + A_1\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + A_2\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{b}{a}\right)A_{n-1} + A_n = R.$$

di qui il corollario:

« *Il resto della divisione di una funzione intera* f(x) *per il binomio* ax — b *è uguale a* $f\left(\frac{b}{a}\right)$.

Corollario. — Una funzione intera in x è divisibile per $ax - b$. quando sostituendo $\frac{b}{a}$ ad x il polinomio si riduce a zero.

Dimostrazione di un teorema sui numeri razionali

Con questo titolo A. Bindoni e G. Sandri pubblicarono su questo *Bollettino* (anno X, n. 5-6-7-8) una dimostrazione del teorema:

« *Fra due numeri razionali positivi disequali esiste sempre un razionale che è potenza* m^{esima} *di un altro razionale* ».

Sia a questa dimostrazione sia ad un'altra anteriore, di P. Gazzaniga [1] mi sembra didatticamente preferibile per semplicità la seguente, la quale nel concetto direttivo non è molto dissimile da quella di P. Gazzaniga.

Siano a e b i razionali dati e sia $b > a > o$. Qualunque sia l' intero positivo n, tra le frazioni di denominatore n ne esistono due consecutive $\frac{x}{n}$ ed $\frac{x+1}{n}$ tali che sia

$$\left(\frac{x}{n}\right)^m \leqq a < \left(\frac{x+1}{n}\right)^m. \tag{1}$$

Se è $\left(\frac{x+1}{n}\right)^m < b$ il teorema è dimostrato. Altrimenti si osservi intant che al crescere di n varia generalmente anche x, ma la frazione $\frac{x+1}{n}$ non supera mai il valore $y+1$ che essa assume per $n=1$ [2].

Ma dalla nota identità $h^m - k^m = (h-k)(h^{m-1} + h^{m-2}\cdot k + \ldots + k^{m-1})$, quando sia $h > k > o$ si trae

$$h^m - k^m < (h-k)\, m h^{m-1}$$

da cui, ponendo $h = \frac{x+1}{n}$, $k = \frac{x}{n}$,

$$\left(\frac{x+1}{n}\right)^m - \left(\frac{x}{n}\right)^m > \frac{1}{n}\, m \left(\frac{x+1}{n}\right)^{m-1}$$

---

[1] P. Gazzaniga: *Libro d' Aritmetica e di Algebra elementare.* Padova, Fratelli Drucker 1900, pag. 61.

[2] Se ciò non sembra abbastanza evidente, si ponga la limitazione $y^m \leqq a < (y+1)^m$ sotto la forma $\left(\frac{ny}{n}\right)^m \leqq a < \left(\frac{ny+n}{n}\right)^m$ la quale mostra che le frazioni $\frac{x}{n}$ ed $\frac{x+1}{n}$ soddisfacenti la (1) sono due consecutive della successione $\frac{ny}{n}, \frac{ny+1}{n}, \frac{ny+2}{n}, \ldots$ $\ldots \frac{ny+n}{n}$ nella quale le frazioni estreme equivalgono sempre ad y e ad $y+1$ rispettivamente, qualunque sia n.

ovvero, essendo $\frac{x+1}{n} \leqq y+1$,

$$\left(\frac{x+1}{n}\right)^m - \left(\frac{x}{n}\right)^m < \frac{1}{n} m (y+1)^{m-1};$$

e poichè nel secondo membro di questa il fattore $m(y+1)^{m-1}$ è costante, si potrà prendere l' altro fattore $\frac{1}{n}$ tanto piccolo, cioè n tanto grande, che il scondo membro divenga minore di $b-a$, per modo che si abbia

$$\left(\frac{x+1}{n}\right)^m - \left(\frac{x}{n}\right)^m < b-a.$$

Da questa e dalla limitazione (1) segue allora

$$o < \left(\frac{x+1}{n}\right)^m - a < b - a$$

da cui

$$a < \left(\frac{x+1}{n}\right)^m < b,$$

la quale dimostra il teorema.

Osservazione. — Se per la trattazione di una teoria dei numeri reali [1], invece di questo teorema interessa quest' altro: « *Dato un numero razionale positivo* a, *si può trovare una potenza* m^{osima} *di un razionale la quale differisca da* a *in difetto o in eccesso per meno di un razionale positivo* ε *piccolo a piacere* », si può, anzichè dedurlo come corollario del primo, dimostrarlo direttamente con lo stesso procedimento, salvo che allora n va scelto in modo che non sia $\left(\frac{x}{n}\right)^m = a$ e risulti $\frac{1}{n} m (y+1)^{m-1} < \varepsilon$ e quindi $\left(\frac{x+1}{n}\right)^m - \left(\frac{x}{n}\right)^m < \varepsilon$ la quale con le (1) dà

$$\left(\frac{x}{n}\right)^m < a; \quad a - \left(\frac{x}{n}\right)^m < \varepsilon; \quad \left(\frac{x+1}{n}\right)^m > a; \quad \left(\frac{x+1}{n}\right)^m - a < \varepsilon,$$

le quali dimostrano l' asserto.

---

[1] Cfr. per es. il recente opuscolo di G. Sandri: *Teoria dei numeri reali* (Modena, Società Tipografica Modenese, 1911) nel quale la teoria è sviluppata con intendimenti didattici secondo i concetti di A. Bindoni e di M. Cipolla.

CORRISPONDENZA

A proposito di alcune osservazioni dei Sigg. C. Burali-Forti e R. Marcolongo al mio articolo su " I Quaternioni ecc. "

(Lettera aperta al Direttore del *Bollettino di Matematica*)

Chiarissimo Prof. A. Conti,

Ragioni di salute mi hanno impedito di rispondere alle osservazioni fatte nel suo *Bollettino* dai Sigg. **C. Burali-Forti** e **R. Marcolongo** (¹) al mio articolo « *I Quaternioni quali coppie di numeri complessi* » (²).

I due valenti cultori di calcolo vettoriale sostengono in modo assoluto, che *i Quaternioni da me introdotti* **non** *sono i Quaternioni di* **Hamilton**.

Non intendono con ciò dire che essi costituiscano degli enti inutili nel campo algebrico, ma sostengono che il mio studio non può in alcun modo esser preso a base per lo studio dei *veri* Quaternioni di **Hamilton**.

Invece negli enti da me introdotti si possono facilmente ritrovare i veri Quaternioni di **W. R. Hamilton**.

Facevo vedere nel mio articolo (n. 7) che il Quaternione (a, b) da me introdotto, individuato dai due numeri complessi ordinari a e b, che si succedono nell'ordine dato, si può scrivere sotto la forma

$$ai_0 + bi_1$$

ove i_0 ed i_1 sono i Quaternioni unità $(1,0)$ e $(0,1)$.

Facevo inoltre notare (n. 11), perchè particolarmente interessante, l'isomorfismo fra la classe dei Quaternioni di forma ai_0 e quella dei numeri complessi ordinari, e quindi, dopo di ciò, si poteva anche scrivere 1, invece di i_0, si poteva cioè scrivere il Quaternione sotto la forma $a + bj$, ove per maggior semplicità di scrittura si è posto j invece di i_1.

Il calcolo con Quaternioni scritti sotto quest'ultima forma riesce abbastanza semplice per la sua grande analogia con quello dei numeri complessi ordinari e le rispettive regole per effettuare le quattro operazioni addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione (anteriore e posteriore) risultano immediatamente dalle definizioni e dalle proprietà delle operazioni con Quaternioni rappresentati da coppie.

(¹) Vedi questo *Bollettino* N. 5, 6, 7, 8 dell'anno X (1911).

(²) Idem N. 1, 2, 3, 4 dell'anno X (1911).

Mi parve inoltre che le forme da me date ai Quaternioni si prestassero meglio di quella ordinaria a quattro unità a *nuove ricerche* e e ciò pare che intravedono anche i Sigg. **C. Burali-Forti** e **R. Marcolongo** quando affermano cne i Quaternioni da me introdotti non costituiscono enti inutili nel campo algebrico. Volli quindi arrestarmi a tali forme per fermare su di esse l'attenzione del lettore.

D'altro canto è assai facile porre il quaternione (a, b) sotto la forma ordinaria di numero complesso a quattro unità.

Si ponga, essendo x_0, x_1, x_2, x_3 numeri reali,

$$a = x_0 + x_1 i, \qquad b = x_0 + x_3 i,$$

onde

$$(a, b) = (x_0 + x_2 i,\ x_2 + x_3 i),$$

e si convenga di indicare con j_0, j_1, j_2, j_3 ordinatamente i Quaternioni

$$i_0,\ ii_0,\ i_1,\ ii_1,$$

cioè i Quaternioni

$$(1,0),\ (i,0),\ (0,1),\ (0,i),$$

si ha

$$x_0 j_0 = x_0 (1,0) = (x_0, 0),$$
$$x_1 j_1 = x_1 (i, 0) = (x_1 i, 0),$$
$$x_2 j_2 = x_2 (0,1) = (0, x_2),$$
$$x_3 j_3 = x_3 (0,i) = (0, x_3 i)$$

e addizionando risulta

$$(1) \quad x_0 j_0 + x_1 j_1 + x_2 j_2 + x_3 j_3 = (x_0, 0) + (x_1 i, 0) + (0, x_2) + (0, x_3 i) =$$
$$(x_0 + x_1 i,\ x_2 + x_3 i) = (a, b)$$

dunque il Quaternione (a, b) si può porre sotto la forma ordinaria

$$x_0 j_0 + x_1 j_1 + x_2 j_2 + x_3 j_3$$

ove x_0, x_1, x_2, x_3 sono numeri reali, e che si chiamano, come è noto, le sue componenti, ed j_0, j_1, j_2, j_3 sono le nuove unità.

L'uguaglianza (1) dà modo di porre i Quaternoni scritti nella forma ordinaria sotto forma di coppie di numeri complessi e viceversa. Così, ad esempio, pel coniugato di (a, b) si ha:

$$(\bar{a}, -b) = (x_0 - x_1 i, -x_2 - x_3 i) = (x_0, 0) + (-x_1 i, 0) + (0, -x_4) + (0, -x_3 i) =$$
$$= x_0 j_0 - x_1 j_1 - x_2 j_2 - x_3 j_3.$$

Con tale metodo le uguaglianze, che definiscono le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione (anteriore e posteriore) con Quaternioni rappresentati da coppie di numeri complessi, si tradu-

cono in uguaglianze, che forniscono le regole per effettuare le dette operazioni con Quaternioni scritti nella forma ordinaria.

Si ponga, essendo a, b, c, d numeri complessi ordinari ed x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3 numeri reali,

$$a = x_0 + x_1 i, \qquad b = x_2 + x_3 i, \qquad c = y_0 + y_1 i, \qquad d = y_2 + y i_3,$$

onde

$$(a, b) = x_0 j_0 + x_1 j_1 + x_2 j_2 + x_3 j_3, \qquad (c, d) = y_0 j_0 + y_1 j_1 + y_2 j_2 + y_3 j_3,$$

per definizione (vedi n. 3 del mio articolo sopra citato) si ha

$$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$$

e sostituendo

$$(x_0 + x_1 i, x_2 + x_3 i) + (y_0 + y_1 i, y_2 + y_3 i) =$$

$$= ([x_0 + y_0] + [x_1 + y_1] i, [x_2 + y_2] + [x_3 + y_3] i)$$

e nella forma ordinaria

$$[x_0 j_0 + x_1 j_1 + x_2 j_2 + x_3 j_3] + [y_0 j_0 + y_1 j_1 + y_2 j_2 + y_3 j_3] =$$

$$= [x_0 + y_0] j_0 + [x_1 + y_1] j_1 + [x_2 + y_2] j_2 + [x_3 + y_3] j_3;$$

donde la **Regola**: *Per addizionare due Quaternioni scritti nella forma ordinaria basta addizionare rispettivamente le componenti relative alle unità* j_0, j_1, j_2, j_3.

In modo perfettamente analogo si ha la **Regola**: *Per sottrarre due Quaternioni scritti nella forma ordinaria basta sottrarre dalle componenti del diminuendo relative alle unità* j_0, j_1, j_2, j_3 *le componenti rispettive del diminutore.*

In quanto al prodotto si ha per definizione (vedi n. 6 del citato artic.):

$$(a, b)(c, d) = (ac - b\bar{d},\ ad + b\bar{c})$$

e sostituendo

$$(x_0 + x_1 i, x_2 + x_3 i)(y_0 + y_1 i, y_2 + y_3 i) = ([x_0 + x_1 i][y_0 + y_1 i] - [x_2 + x_3 i][y_2 - y_3 i],$$

$$[x_0 + x_1 i][y_2 + y_3 i] + [x_2 + x_3 i][y_0 - y_1 i]) =$$

$$= ([x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3] + [x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2] i,$$

$$[x_0 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_0 + x_3 y_1] + [x_0 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_0] i)$$

e nella forma ordinaria

$$[x_0 j_0 + x_1 j_1 + x_2 j_2 + x_3 j_3][y_0 j_0 + y_1 j_1 + y_2 j_2 + y_3 j_3] =$$

$$= [x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3] j_0 + [x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_2 y_3 + x_3 y_2] j_1 +$$

$$+ [x_0 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_0 + x_3 y_1] j_2 + [x_0 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_0] j_3.$$

Or se osserviamo che $j_0 = i_0 = (1, 0)$ è il modulo della moltiplicazione e che si ha (vedi n. 7 del solito articolo)

$$j_1^2 = -j_0, \qquad j_1 j_2 = -j_2 j_1 = j_3,$$
$$j_2^2 = -j_0, \qquad j_2 j_3 = -j_3 j_2 = j_1,$$
$$j_3^2 = -j_0, \qquad j_3 j_1 = -j_1 j_3 = j_2,$$

si vede che *la Regola per la formazione del prodotto di due Quaternioni scritti nella forma ordinaria è data*, in base alla legge distribuitiva, *dalla regola di moltiplicazione dei polinomi dell'algebra elementare*, risultato che era facile prevedere, potendo ogni Quaternione scritto nella forma ordinaria essere considerato, per la (1), come la somma di quattro particolari Quaternioni (coppie).

Quanto s'è detto basta già per conchiudere che dal sistema degli enti da me introdotti si può dedurre il sistema dei veri Quaternioni di **W. R. Hamilton** e che, malgrado l'impossibilità affermata dai Signori **C. Burali-Forti** e **R. Marcolongo** il mio lavoro, più volte citato, può servire come introduzione allo studio dei Quaternioni di **Hamilton**.

D'altronde il sistema dei Quaternioni da me introdotti gode, come ho fatto vedere al n. 6 del mio articolo, della proprietà che *un prodotto di fattori non può annullarsi che quando uno dei fattori si annulla.* Ora **G. Frobenius** e **C. S. Peirce** hanno dimostrato che, fra i sistemi di numeri complessi a moltiplicazione associativa, il sistema dei Quaternioni di **Hamilton** è il **solo**, insieme al sistema dei numeri complessi ordinari, che goda di questa proprietà [1], dunque i Quaternioni da me introdotti sono i Quaternioni di **Hamilton**.

Il primo ragionamento fatto dai Sigg. **C. Burali-Forti** e **R. Marcolongo** si basa sulla loro asserzione: « *è indubitato che la coppia* (a, b), *o una funzione qualsiasi di essa, non può essere un numero complesso* ».

Ma cosa vuol dire in tal caso che una coppia (a, b) non è un numero complesso?

Vuol dire che essa non si può scomporre identicamente (cioè qualunque siano i numeri complessi ordinari a e b) nella somma di due coppie, una delle quali è un numero reale (cioè una coppia che ha per antecedente un numero reale e per conseguente zero) e l'altra è una coppia il cui quadrato è un numero reale (nel senso suddetto) essenzialmente negativo.

---

[1] G. Frobenius: *J. reine angew Math.* 84 (1878), pag. 59; C. S. Peirce: *Amer. J. Math.* 4 (1881), p. 225; E. Cartan: *Ann. Fac. sc. Toulouse* 12 (1898), mem. n. 2, p. 81; F. X. Grisseman: *Monatsh Math. Phys* 11 (1900), p. 132; M. Cipolla: *Period. di Mat. di Livorno*. fasc. IV dell'anno XX (1905), p. 173.

Ma evidentemente

$$(a, b) = (x_0 + x_1 i,\ x_2 + x_2 i) = (x_0, 0) + (x_1 i,\ x_2 + x_3 i)$$

e siccome

$$(x_1 i, x_2 + x_3 i)^2 = (x_1 i, x_2 + x_3 i)(x_1 i, x_2 + x_3 i) = (-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \theta)$$

ed il numero $-[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]$ è reale, essenzialmente negativo, si conchiude che la coppia (a, b) è un numero complesso.

Il secondo ragionamento dei Sigg. **C. Burali-Forti** e **R. Marcolongo** altro poi non prova che col metodo ivi indicato non si può far vedere che della forma (a, b), da me data ai Quaternioni, si possono dedurre le forme che ad essi ha dato **Hamilton**.

Le forme da me date ai Quaternioni, nell'articolo più volte citato, non mettevano in evidenza la parte scalare e quella vettoriale, ma erano nuove e ad esse è bene aggiungerne un'altra, che si ottiene assumendo due nuove variabili r e φ, entrambe complesse ordinarie, legate alle antiche per mezzo delle relazioni $a = r \cos \varphi$, $b = r \operatorname{sen} \varphi$, onde si può porre

$$(a, b) = a + bj = r\,[\cos \varphi + (\operatorname{sen} \varphi) j].$$

Tali forme possono forse servire in nuove applicazioni, alle quali non si prestano bene le forme date dall'**Hamilton**; una coppia di numeri complessi può, ad esempio, rappresentare nel piano complesso di *Argand-Gaus*, una coppia di punti e quindi un segmento e la sua direzione,....., ecc. Ne potrebbero nascere interessanti relazioni fra le nuove applicazioni e quelle già conosciute.

Distinti ringraziamenti e saluti.

Roma, Maggio 1912.

GAETANO AGUGLIA

RETTIFICA

all'articolo di MINETOLA SILVIO su « *Le ripartizioni semplici* »

Nel mio articolo « *Le ripartizioni semplici* » [1], per una svista inspiegabile (in alcuni miei appunti di circa due anni or sono trovasi notata la correzione di cui ora mi occupo) è data inesattamente l'espressione di $\binom{n}{k} R_{mn}$ [2].

[1] *Bollettino di Matematica.* Anno XI, pag. 34 e seguenti.

[2] *ibidem* pag. 36.

Essa va letta nel seguente modo:

$$\binom{n}{k} R_{m,n} = \binom{m}{m-k} R_{m-n,n-k} R_{k,k} + \binom{m}{m-k-1} R_{m-k-1,n-k} R_{k+1,k} + \\ + \cdots + \binom{m}{n-k} R_{n-k,n-k} R_{m-n+k,k}. \qquad (1)$$

Il ragionamento che conduce a questa relazione, cominciando dalla prima linea della detta pag. 36, va poi così modificato:

« Ora, $m-k$ oggetti si ripartono in $n-k$ gruppi in $R_{m-k,n-k}$ modi differenti, cosicchè essendo $\binom{m}{m-k}$ le combinazioni di m oggetti $m-k$ ad $m-k$, nelle $R_{m,n}$ si avranno $\binom{m}{m-k} R_{m-k,n-k}$ ripartizioni distinte della classe $(n-k)^{ma}$, composte ciascuua di $m-k$ oggetti. Ognuna di esse, potendosi i rimanenti k oggetti ripartirsi nei rimanenti k posti in $R_{k,k}$ modi differenti, trovasi in $R_{k,k}$ ripartizioni distinte delle $R_{m,n}$, cosicchè in tutto nelle $R_{m,n}$ vi saranno $\binom{m}{m-k} R_{m-k,n-k} R_{k,k}$ ripartizioni della classe $(m-k)^{ma}$, composte ciascuna di $m-k$ oggetti. Similmente, le $R_{m,n}$ conterranno $\binom{m}{m-k-1} R_{m-k-1,n-k} R_{k+1,k}$ ripartizioni della classe $(n-k)^{ma}$, composte ciascuna di $m-k-1$ oggetti, e lo stesso può ripetersi successivamente sino alle $\binom{m}{n-k} R_{n-k,n-k} R_{m-n+k,k}$ ».

Continuando a questo punto il ragionamento nello stesso modo nel quale segue a detta pag. 36, si arriva a stabilire la (1), dalla quale si ricava l'espressione esatta di $R_{m,n}$, che, per $k-1$, dà luogo alla formola già nota:

$$R_{m,n} = \frac{1}{n}\left[\binom{m}{m-1} R_{m-1,n-1} + \binom{m}{m-2} R_{m-2,n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} R_{n-1,n-1}\right].$$

Avverto infine esplicitamente che tale svista non ha alcuna influenza sui risultati degli altri numeri dell'articolo in discorso.

S. Minetola

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

nel R. Istituto Industriale Nazionale in Fermo

L'ordinamento della Scuola industriale di Fermo è stato trasformato di recente con l'aggiunta di un anno e con la distribuzione dei quattro anni del corso superiore in un biennio comune a tutte le Sezioni e in un

successivo biennio a sezioni separate. Il Direttore della Scuola professore ANDREONI *con una sua importante pubblicazione fa conoscere le norme d'ammissione e i programmi d'insegnamento, dà inoltre notevoli norme generali sull'educazione della volontà, del sentimento e dell'intelletto del fanciullo, e interessantissime norme per lo svolgimento dei singoli programmi. Riproduciamo integralmente quelle che si riferiscono all'insegnamento della matematica, che è affidato al prof. Ciamberlini.*

I programmi delle scuole tecniche, che si sono accettati integralmente per la matematica del nostro corso inferiore, sono accompagnati da queste avvertenze: « Nell'insegnamento dell'aritmetica si debbono dare definizioni e regole chiare ed esatte, esempi molti, esercizi svariati e scelti fra quelli, che non richiedano troppo lunghe operazioni di calcolo e che hanno attinenza coi bisogni della vita. In ciascuna lezione si dovranno fare esercizi di calcolo orale. Nell'insegnemento della geometria sarà bene valersi dei procedimenti intuitivi, quando la dimostrazione rigorosa dei teoremi richiede uno sforzo eccessivo delle menti degli alunni o un tempo troppo lungo. Il professore si servirà opportunamente di modelli in grande dimensione, di solidi in rilievo e di disegni sulla tavola nera ». Non si può che sottoscrivere a queste prescrizioni, ma esse non esauriscono le questioni di materia e di metodo nell'insegnamento della matematica. E se è permesso un appunto a programmi adottati per ragione di uniformità e di equipollenza si osserva che la geometria solida malamente si rifugia al 3° anno del Corso inferiore sotto la veste « della misura dei volumi dei principali solidi geometrici, premesse le necessarie definizioni e nozioni ». L'insegnante vi porrà rimedio, dando un sufficiente sviluppo allo studio della retta e del piano nello spazio, ma rimane ad ogni modo il dubbio, che sia tardiva ed imperfetta l'introduzione della geometria solida fatta in questo modo. Nella scuola industriale specialmente, dove la visione dell'oggetto nello spazio ha tanta importanza, si può domandare, se non sarebbe preferibile un insegnamento della geometria elementare, che riunisse secondo il pensiero del DE PAOLIS geometria piana e solida insieme fin dal principio. Un tale tentativo si dovrebbe *a priori* raccomandare, tanto più che terrebbe conto nell'insegnamento della geometria della genesi di questa. Herbert Spencer non ha un pensiero diverso, quando raccomanda, come esempio d'un modo razionale per impartire le prime nozioni di Geometria, questa procedura del Wyse: « Un fanciullo che abbia contratto l'abito di usare i cubi per l'aritmetica, se ne serva anche per gli elementi della Geometria. Io vorrei cominciare dai solidi, l'opposto del metodo comunemente usato. E così ci liberiamo dalla difficoltà di definizioni assurde e dalle spiegazioni del punto, delle linee, delle superficie, che non sono che astrazioni... » Secondo Spencer questo procedimento dovrebbs eesere quello stesso della natura, accompagnante e provocante le facoltà d'os-

servazione e d'invenzione del fanciullo. Egli dice: « Qualunque ramo del sapere, per quanto si ritenga comunemente arido e noioso, diventa molto interessante e benefico se noi seguiamo il metodo della natura. Diciamo benefico, perchè i suoi effetti non sono limitati all'acquisto di nozioni geometriche ma spesso mettono in rivoluzione tutto lo stato mentale. È spesso avvenuto che i fanciulli stupiditi dalla solita disciplina scolastica, dalle sue formule astratte, dai lavori noiosi, dalla soverchia applicazione, abbiano sentito ravvivare l'intelligenza cessando di essere recipienti passivi e passando a diventare attivi scopritori. Cessato nel fanciullo lo scoraggiamento prodotto da un cattivo metodo, per una certa simpatia che gli fu dimostrata ed appena venga eccitata una perseveranza sufficiente per giungere ad un primo successo, avviene in lui un rimescolio di sentimento che influisce sopra tutta la sua natura. Non si sente più incapace e riconosce che può fare qualche cosa: e poichè ad un buon risultato ne segue un altro, l'incubo della disperazione sparisce in lui, e s'accinge a superare le difficoltà degli altri studi con un'energia che assicura la buona riuscita ».

Dopo la geometria, il calcolo, che si deve considerare anzitutto diretto all'acquisto di una abilità: è nota la difficoltà degli allievi a rendersi padroni del calcolo numerico e letterale e questo forse perchè la metodica del calcolo si è arrestata all'insegnamento elementare, dove il Pestalozzi il Walsemann, il Lay col pallottolliere diventato di uso comune, lo Schneider colla scatola per il calcolo, il Wilk ecc. hanno lavorato efficacemente. L'insegnante si potrebbe proporre il quesito del quanto di questi metodi può essere portato nella nostra scuola per l'insegnamento del calcolo numerico e letterale rimanendo però fermo al principio, che gli esercizi di calcolo orale prescritti nelle avvertenze ministeriali non devono arrivare mai agli acrobatismi di calcolo mnemonico, che costituiscono il gran merito di certi metodi ma non rappresentano che lo sviluppo esagerato di una forma unilaterale di memoria. Darà poi la massima considerazione alle norme ministeriali citate relativamente agli esercizi: con ciò ed anche secondo il Barth « rimane intatta l'esigenza elevata dagli Herbartiani, che l'interesse al primo insegnamento del calcolo dev'essere suscitato, collegandolo con l'insegnamento oggettivo...., Inoltre la correlazione delle diverse materie di studio (concentrazione degli Herbartiani) richiede, che l'insegnamento del calcolo metta in valore e aiuti a consolidare quelle rappresentazioni e quei concetti, che si siano acquistati, studiando altre materie. Gli esercizi di calcolo senza valore per riguardo al contenuto e con numeri semplicemente astratti dovrebbero scomparire, come quelle proposizioni senza valore, che si sono eliminate dagli esercizi di lingua e di scrittura ».

Il Ciamberlini, che coll'insegnamento della matematica onora l'Istituto di Fermo, ha messo in rilievo il pericolo di fare per gli alunni una

scienza non di cose ma di simboli per colpa di metodi, che costringono gli alunni a studiar troppo sulla carta e sulla lavagna. « È necessario, egli dice, che l'alunno sia continuamente aiutato a non far confusione tra gli oggetti reali ed i segni convenzionali corrispondenti, ad acquistare presto l'abitudine di veder quelli attraverso i loro segni rappresentativi ». La raccomandazione, che egli fa, di porre a disposizione dell'alunno, non soltanto la penna ed il gesso, ma, quando sia possibile, anche gli oggetti reali, è fuori questione per la didattica, che si basa sull'intuizione e poichè in un suo scritto il Ciamberlini passa a proposte concrete ed utili nell'insegnamento inferiore e superiore della matematica, appare opportuno ricordarle per nostro uso:

« Per le esercitazioni concrete che devono illustrare l'insegnamento della *geometria piana* elementare basterà, per es., disporre di tavole in cui siano disegnate, in dimensioni alquanto più grandi di quelle che ordinariamente si osservano nei libri di testo, le figure che si vanno successivamente studiando. Per mezzo di esse e col sussidio di un doppio decimetro e d'un rapportatore, oltre che della riga, del compasso e di una squadra, si potranno far risolvere nella scuola dagli alunni dei quesiti come i seguenti:

« Ecco due angoli adiacenti: misurane uno e trova poi col calcolo il valore dell'altro.

Ecco due rette che s'intersecano: misura col rapportatore uno dei quattro angoli da esse formati, e trova poi, senza fare altre misurazioni, i valori dei tre angoli rimanenti.

« In questa figura tu vedi due rette parallele tagliate da una trasversale. Misura uno qualunque degli otto angoli, e calcola poi i valori dei rimanenti.

« Ecco un triangolo, un quadrangolo, un pentagono, ecc. In ognuno di questi poligoni misura tutti gli angoli *interni* ad eccezione di uno, e calcola poi il valore del rimanente (1).

« In questo poligono sono disegnati gli angoli *esterni*. Misurali tutti ad eccezione di uno e calcola poi il valore del rimanente.

« In questa figura tu vedi un triangolo ABC nel quale sono state condotte le bisettrici BI, CI degli angoli B e C. Misura soltanto l'angolo BIC, e poi calcola il valore dell'angolo A.

« Ecco un parallelogrammo: misura un solo angolo e trova poi i valori degli altri tre; misura due soli lati e calcola poi il perimetro. — Ecco un trapezio; misurane due angoli e trova poi i valori degli altri due.

« In questa circonferenza tu vedi disegnati l'angolo alla circonfe-

---

(1) Gli alunni troveranno piacere nel fare le *verifiche* nella maggior parte degli esercizi indicati. Fatti i calcoli, essi misureranno anche gli elementi incogniti, e confronteranno i risultati dei calcoli con quelli delle misurazioni.

renza ABC e l'angolo al centro corrispondente. Misura l'angolo al centro e poi calcola l'angolo ABC.

« Ecco un rettangolo, un quadrato, un parallelogrammo, un triangolo, un trapezio, un poligono circoscritto ad un cerchio, un poligono qualunque. Eseguisci le misurazioni degli elementi necessari e poi calcola le aree di tali figure (1).

« Ecco una circonferenza O, e in essa due punti B, C. Eseguisci le necessarie misurazioni e poi calcola la lunghezza della circonferenza, l'area del cerchio, la lunghezza dell'arco BC, l'area del settore BOC.

« Ecco un triangolo isoscele: misurane la base e uno dei lati eguali, poi calcolane l'altezza e l'area. — Ecco un triangolo equilatero e un esagono regolare. Misurane i lati e calcolane le aree.

« Ecco una curva $ABCDE$, e una retta MN. Dagli estremi A, E della curva sono state condotte le normali AA', EE'' alla MN. In qual modo si potrà calcolare approssimativamente l'area compresa tra la curva e le rette AA' EE', MN? (2)

« In questa figura tu vedi tre parallele con due trasversali, la prima delle quali incontra le parallele nei punti A, B, C, l'altra nei punti A', B', C'. Misura i seguenti AB, BC, A' B', e poi calcola il valore del segmento $B'C'$.

« Ecco due triangoli simili ABC, $A'B'C'$. Misura i lati del primo e uno dei lati del secondo, poi trova col calcolo i valori degli altri lati del secondo. — Misura anche un'altezza del primo triangolo, e poi, senza fare altre misurazioni, trova l'area del secondo.

« Qui è disegnato un triangolo ABC rettangolo in A; misura le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e poi calcola i cateti e l'altezza corrispondente all'ipotenusa.

« In questa figura si vedono due secanti ad una circonferenza uscenti da uno stesso punto A. Misura le due secanti e la parte esterna di una di esse: quindi calcola il valore della parte esterna della seconda secante e la lunghezza di ciascuna delle tangenti alla circonferenza che si possono condurre dal punto A.

« In questa figura tu vedi un segmento AB e dne semirette uscenti da A e B che andrebbero ad incontrarsi in un punto C fuori del disegno. Come puoi fare per trovare i valori delle distanze del punto C da ognuno dei punti A e B?

« (Un modo è questo. Si prenda su AB eguale per es. ad $^1/_5$ di AB

---

(1) Se in fondo a ciascuna tavola è designato per es. il *decimetro* in vera grandezza colle suddivisioni in *cm.* e in *mm.*, le misurazioni degli elementi lineari potranno e sere eseguite col compasso o con una striscia di carta.

(2) Si spiegherà perciò agli alunni qualcuno dei vari metodi approssimati per le *quadrature*, per es., il metodo dei trapezi, o quelli di *Simpson* e di *Poncelet*.

e per il punto D si conduca la parallela a BC che incontri AC in E. Si misurino i segmenti AE, DE; dai valori di essi si ricaveranno subito quelli di AC, BC).

« In quest'altra figura si vedono due rette m, n che s'incontrerebbero in un punto A fuori del foglio, e due altre rette p, q che s'incontrerebbero in un punto B pure fuori del foglio. Come puoi trovare il valore del segmento AB? (Per es. nel modo seguente: Si conduca una trasversale arbitraria che incontri le rette m, n, p, q nei punti M, N, P, Q, e su di essa si prendano i segmenti MN', MP', MQ' eguali rispettivamente per es. ad $1/5$ di MN, MP, MQ. Si conduca per N' la parallela ad n che incontri m in A'; e per P', Q' le parallele a p, q che s'incrocino in B'. Si misuri la distanza $A'B'$: dal valore di essa si ricaverà subito quello di AB).

« Ecco tre coppie di rette; (m, n); (p, q); (r, s). I punti d'incontro A, B, C delle rette di ciascuna coppia vanno fuori del foglio. Come si potrà trovare l'area del triangolo ABC? (Nel modo indicato nell'esercizio precedente si trovino i valori dei lati del triangolo ABC; quindi si applichi la formula di *Erone*). Ecc. [1].

« L'insegnante può estendere quanto vuole la serie di siffatte esercitazioni. — Ma, affinchè esse non finiscano col riuscire monotone, e non si riferiscano ad oggetti le cui dimensioni siano contenute sempre entro limiti troppo ristretti, sarà utile che con esse se ne alternino altre relative ad oggetti differenti, come per esempio:

« Ecco una squadra: misusane i cateti e poi trova, senza far altre misurazioni, il valore dell'ipotenusa e quello dell'altezza corrispondente.

« Ecco una squadra avente la forma d'un triangolo rettangolo isoscele; misurane l'ipotenusa e poi calcola il valore di ciascun cateto.

« Ecco il metro; misura con esso alcuni degli orli di questo tavolo, e poi calcola la distanza di due vertici opposti.

« Eseguisci le necessarie misurazioni, e poi calcola i valori delle proiezioni degli orli della lavagna su una diagonale di essa.

« Potrebbe nel pavimento di questa scuola essere contenuta una trave lunga 15 *m*?

« Trova quante mattonelle quadrate di 15 *cm* di lato occorrerebbero per fare il nuovo pavimento di questa stanza.

« Ecco alcuni dischi di legno di raggi differenti; ecco la *fettuccia metrica*. Eseguisci le necessarie misurazioni, e quindi trova il rapporto tra la circonferenza di ciascun disco e il suo diametro. Quanto si deve trovare approssimativamente?

---

[1] Per risolvere più rapidamente questi ultimi esercizi ed altri analoghi, che si basano sul *metodo di similitudine*, gioverà poter disporre di *un compasso di riduzione*.

« Ecco due monete, una da 10 centesimi, l'altra da 1 centesimo. Il diametro della prima è doppio di quello della seconda. Misura il diametro della prima moneta; calcola l'area d'una sua faccia, e quindi, nel modo più breve possibile, trova l'area d'una faccia della seconda; ecc. ecc.

« Una buona raccolta di solidi geometrici di dimensioni diverse può bastare per fare esercitazioni concrete su tutte le parti della *geometria solida*, da quelle fondamentali alle altre che concernono il calcolo delle aree e dei volumi.

« Ecco un prisma triangolare obbliquo. Indicami una coppia di spigoli sghembi e misura l'inclinazione di essi. In questo spigolo laterale ho segnato col lapis un punto. Come faresti per segare il solido normalmente allo spigolo in quel punto? — Nelle facce che concorrono in quello spigolo l'alunno condurrà le normali allo spigolo stesso nel punto indicato; poi gli si domanderà: perchè segando il solido lungo la linea indicata da quelle normali si ha una sezione normale allo spigolo considerato? — L'angolo formato da quelle due normali qual relazione ha col diedro determinato dalle facce aventi in comune quello spigolo? Misura il diedro formato da queste due facce [1].

« Questa è una piramide retta avente per base un esagono regolare. Misura il lato della base e lo spigolo laterale, e poi calcola l'apotema e l'altezza del solido,

« Ecco un tetraedro regolare. Misurane lo spigolo e quindi calcola l'altezza del solido. — Ecco un ottaedro regolare. Misurane lo spigolo e quindi calcola la distanza di due vertici opposti.

« Questo è un parallelepipedo rettangolo. Misurane le dimensioni e quindi calcola la diagonale.

« Ecco un prisma, una piramide, un tronco di piramide a basi parallele, un cilindro, un cono, un tronco di cono a basi parallele, una sfera. Eseguisci le necessarie misurazioni e quindi calcola le aree delle superficie totali, e i volumi di questi solidi.

« Questo solido è un segmento sferico. Misura gli elementi necessari e calcolane il volume; ecc.

« Altre utilissime esercitazioni di geometria solida possono esser fatte coll'aiuto di una tavola nella quale siano disegnate delle figure rappresentanti gli *sviluppi* [2] di prismi, piramidi, poliedri regolari, cilindri, ecc.

« Questo rettangolo rappresenta lo sviluppo della superficie laterale di un cilindro. Eseguisci le necessarie misurazioni, e quindi calcola l'area della superficie totale e il volume del cilindro.

---

[1] Converrà per questi esercizi far uso di una piccola *squadra falsa*.

[2] È nota l'importanza che deve avere lo studio degli *sviluppi* specialmente in una scuola industriale. — Un utilissimo esercizio ch'io faccio sempre eseguire per mettere meglio in relazione un poliedro col suo sviluppo è quello di far trovare

« Ecco un settore circolare. Misura gli elementi necessari, e calcola poi l'area totale e il volume del cono la cui superficie laterale abbia quel settore per sviluppo.

« Questa parte di corona circolare rappresenta, nella scala da 1 a 20, lo sviluppo della superficie laterale d'un tronco di cono a basi parallele. Misura gli elementi necessari, e poi calcola l'area laterale, l'area totale e il volume del tronco; ecc.

« Le esercitazioni relative alla *trigonometria* possono esser fatte seguendo un metodo analogo a quello indicato per la geometria piana. L'insegnante dovrà pure disporre di alcune tavole nelle quali, in dimensioni alquanto più grandi di quelle che ordinariamente si vedono nei libri di testo, siano designate le figure che mano mano occorreranno,

« Ecco un angolo (acuto o ottuso); conduci una perpendicolare ad uso dei lati, misura alcuni elementi lineari, e poi calcola il *sen*, il *cos*, la *tg*, e la *cotg* dell'angolo. (Trova il valore dell'angolo in gradi e leggi nelle tavole trigonometriche le sue funzioni per verificare i risultati ottenuti).

« In questa figura abbiamo un triangolo inscritto in un cerchio. Misura i lati e il diametro del cerchio, e dai valori ottenuti ricava i seni degli angoli del triangolo. (Verifica i risultatî coll'aiuto del rapportatore e delle tavole trigonometriche).

« Tu vedi qui un segmento AB e la sua proiezione ortogonale $A'B'$ su di una retta MN. Misura il segmento AB; misura l'angolo, che esso forma con MN, e coll'aiuto delle tavole trigonometriche calcola poi il valore della proiezione $A'B'$. (Potrai verificare il risultato ottenuto misurando il segmento $A'B'$).

« Ecco un triangolo. Misura un lato e i due angoli adiacenti; — o due lati e l'angolo compreso — o i tre lati; poi, coll'aiuto delle tavole trigonometriche, calcola i valori degli altri elementi. (Verifica i risultati, come negli esercizi precedenti).

« Ecco un triangolo (o un parallelogrammo); misurane due lati e l'angolo compreso e calcolane poi l'area.

« Nella scala da 1 a 1000 tu vedi in questa figura rappresentato un fiume: A e B sono due punti posti da una stessa parte di esse; C e D due altri punti situati dall'altra parte. Supponi di essere situato in quella

---

dall'alunno il numero delle *incollature* o *saldature* che si devono fare per costruire il poliedro per mezzo del suo sviluppo. Così, per es., osservando che nella rete di triangoli equilateri che costituiscono l'ordinario sviluppo dell'icosaedro regolare si contano 41 *lati*, mentre nell'icosaedro vi sono 30 *spigoli*, nel passaggio dallo sviluppo al polietro devono sparire 41-30 di quei lati, e quindi saranno necessarie altrettante saldature. — Negli sviluppi non tralascio poi di far segnare tutti i *lembi* necessari per le saldature stesse.

parte del fiume dove si trovano i punti A e B: eseguisci le misurazioni necessarie, e poi calcola il valore della distanza CD. (Si verificherà il risultato, misurando infine il segmento CD).

« Al metodo precedente possono essere informate le esercitazioni da farsi sulle altre parti della matematica che devono essere insegnate.

« Dopo aver insistito sui fondamenti della *geometria descrittiva*, cioè sulla rappresentazione del punto, della retta e del piano, passando in rassegna la maggior parte dei casi che possono presentarsi, si porteranno nella scuola delle lamine, per es. di ferro, di forme diverse (triangoli, parallelogrammi, ecc.) il cui spessore si possa ritenere trascurabile, e dei solidi geometrici (poliedri, corpi rotondi, o gruppi di essi) d'ogni specie. Gli alunni dovranno rappresentare quelle lamine e quei solidi, disposti in modo assegnato rispetto ai piani di proiezione.

« Ecco una lamina triangolare: misurane gli elementi necessari e costituisci le proiezioni di essa, supposto che sia situata in un dato piano (per es. perpendicolare al piano verticale, o comunque disposto rispetto ai piani di proiezione).

« Ecco un prisma retto; un prisma obbliquo; una piramide; un tetraedro regolare; un cubo; un ottaedro, o un dodecaedro, o un icosaedro regolare; un cilindro; un tronco di cono (1). — Misura gli elementi necessari di questi solidi, e poi costruisci le proiezioni d'ognuno di essi.

« Ecco un prisma obbliquo, con una sezione non parallela alle basi. Prendi su di esso le necessarie misure, e rappresenta il solido e la sezione. Costruisci nel disegno la *vera grandezza* della sezione, e confrontala con quella tracciata nel solido per verificare l'esattezza delle costruzioni che hai fatto. Ecc. (2),

« Ma, insieme con l'abitudine di passare dall'oggetto reale alla sua rappresentazione grafica, l'alunno deve avere ancor quella di tornare all'oggetto reale quando ne abbia il disegno esatto. È quindi necessario che egli sia anche esercitato nella risoluzione di quesiti come i seguenti:

« Di un prisma obbliquo sono dati la base, uno spigolo laterale e gli angoli che questo spigolo forma coi lati della base che incontra. Disegnare le proiezioni del prisma, il suo sviluppo completo, e quindi costruire *effettivamente* il solido per mezzo del suo sviluppo.

« Il raggio della base d'un cilindro retto circolare è di 4 *cm*. In un punto del suo asse, alla distanza di 7 *cm*. dalla base, si conduce un piano formante un angolo di 45 gradi con l'asse. Disegnare le proie-

---

(1) Invece dei solidi comuni, si potrebbe trattare di parti di macchine.

(2) Per siffatte esercitazioni gioverà per es. aver sott'occhio anche la collezione del *Hoepp*, vendibile presso la ditta *Paravia*, relativa alle *penetrazioni* di solidi geometrici (36 modelli in legno, divisi in tre serie: 1. prismi, cubi, piramidi; 2. coni, cilindri, sfere; 3. cilindri, prismi, piramidi, coni, sfere).

zionì e lo sviluppo completo del tronco di cilindro compreso tra la base e la sezione, e quindi costruire *effettivamente* questo solido per mezzo del suo sviluppo. (1) Ecc.

« L'uso frequentissimo delle *rappresentazioni grafiche* delle funzioni di una variabile indipendente nello studio dei fenomeni naturali impone all'insegnante di fare continue esercitazioni nell'intento di addestrare i giovani a saper leggere, nelle linee rappresentatrici, il modo di comportarsi delle funzioni corrispondenti. Pertanto, dopo aver date le nozioni necessarie sul metodo di *Cartesio* per la determinazione dei punti nel piano, e aver fatti costruire dagli alunni i diagrammi di molte funzioni di cui siano date le espressioni analitiche, l'insegnante si provvederà di una serie di tavole, in cui su carta *millimetrata* siano diligentemente disegnate le linee rappresentatrici di varie funzioni, e col sussidio di esse, e dei soliti strumenti di misura, farà risolvere esercizi della specie seguente:

« In questa tavola è disegnata la linea rappresentatrice della funzione

$$f(x) = 12\,x - 4{,}9\,x^2 \text{ (2)}$$

della variabile indipendente x. — Ricava dalla figura qual valore assume la funzione quando la variabile indipendente x acquista ognuno dei valori 1; 0,7; ecc. (Fai la verifica col calcolo). — Trova per qual valore della variabile indipendente x la funzione acquista il valore 2. (Fai la verifica col calcolo). — Trova per qual valore della variabile indipendente x la funzione si annulla. — Trova per qual valore di x la funzione acquista il valore *massimo*, e trova questo massimo. (Verifica col calcolo). — In quali punti la funzione è crescente? In quali è decrescente?

« Ecco una *sinussoide*, (3) cioè la linea rappresentatrice della funzione

$$\operatorname{sen} x.$$

Dall'esame di tale curva deduci il modo in cui varia il seno di un arco. — In quali quadranti la funzione è crescente, o decrescente? — Per quali valori di x acquista il valore o? Per quali il valore 1? — Quale è il valore della funzione per $x = \frac{\pi}{4}$; o $\frac{\pi}{8}$; o $\frac{\pi}{6}$; ecc.? —

---

(1) Questo esercizio può essere applicato a collegare tra loro ad angolo retto due *tubi* cilindrici dello stesso diametro, poichè com'è noto le superficie di questi tubi devono intersecarsi mutualmente tra loro secondo un piano inclinato di 45 gradi su ciascuno dei due assi.

(2) Se l'alunno possiede le nozioni necessarie, si potrà chiedergli che cosa può rappresentare *meccanicamente* questa funzione, e si potrà dare un significato *meccanico* alle domande che seguono.

(3) È nota l'importanza delle curve sinussoidali, specialmente nello studio dell'elettrotecnica.

Qual'è l'arco il cui seno è 0,4; 0,9; ecc.? (1) Qual'è il massimo valore di senx? Qual'è il minimo? Tra quali limiti varia senx? Qual'è il minimo valore assoluto di senx? Ecc.

« Gli stessi diagrammi disegnati su carta millimetrata possono essere utilizzati a chiarire, per es., i concetti di *derivata* e d'*integrale.*

« Questa parabola rappresenta graficamente la funzione.

$$f(x) = 12\,x - 4{,}9\,n^2.$$

Conduci la tangente nel punto di ascissa 2; misura l'angolo α che essa forma con l'asse x, e trova nelle tavole trigonometriche il valore di $tg\alpha$. Ora trova anche col calcolo il valore di $tg\alpha$ e confronta i risultati. — Quali sono gli angoli che formano con l'asse delle x le tangenti alla sinussoide nei punti d'ascisse o; π; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$? — Trova sulla figura e col calcolo l'angolo che forma con l'asse delle x la tangente alla sinussoide nel punto d'ascissa $\frac{\pi}{3}$.

« In questa figura è rappresentata graficamente la funzione

$$f(x) = 1 + 2\,x - 0{,}1\,x^3.$$

« Calcolare l'area compresa tra la curva, l'asse delle x e le ordinate nei punti di ascisse o e 5. (Si farà trovare dapprima l'area richiesta col calcolo, e poi con uno dei metodi approssimati per le quadrature; per esempio con la formula di *Simpson.* (Si faranno poi confrontare i risultati ottenuti). — Calcolare l'area compresa tra la sinussoide, l'asse delle x e le ordinate nei puuti di ascisse o e $\frac{\pi}{2}$. (Si farà calcolare l'area in doppio modo, come precedentemente). Ecc. ».

L'importanza dell'argomento esige ulteriori considerazioni: sono noti i vantaggi formali dalla matematica portati nell'educazione del pensiero logico vale a dire concetti rigorosamente precisati, sistematizzazione ed eleganza. Ma la matematica ha inoltre un valore positivo, nel quale trovano la loro giustificazione i nostri programmi del Corso superiore: dice difatti il Barth che « essa dà ordine e misura alla massa delle cose e dei fenomeni, che le scienze della natura debbono investigare, epperò forma la base indispensabile di queste scienze. Che le cose sieno determinate qualitativamente, non basta alla scienza della natura: essa vuole anche determinazioni quantitative. Nella natura domina, come Leibniz ha visto, la lex continui, secondo cui tutto accade con modificazioni infini-

(1) Alcuni di questi esercizi possono esser verificati coll'aiuto delle tavole trigonometriche. L'insegnante farà del resto osservare che, avendo il disegno esatto di una sinussoide, si ha in sostanza una *tavola di seni.*

tamente piccole. Per la rappresentazione di ciò la matematica ha trovato un mezzo adeguato, che è indispensabile per una più profonda penetrazione nei processi naturali. Perciò nelle scuole secondarie non si dovrebbe sostare davanti al calcolo differenziale, ma si dovrebbe introdurre nei loro programmi gli elementi di questo calcolo. Solo esso insegna a conoscere quella parte della matematica, ch' è in grado di rispecchiare il più intimo agire delle forze fisiche e ci introduce nei loro misteri: esso è pertanto il più realistico di tutti gli insegnamenti ed indispensabile per una più profonda conoscenza della natura „ Le parole del Barth, che rispecchiano anche il pensiero di molti altri illustri, bastano a giustificare l'introduzione degli elementi di matematiche superiori negli ultimi anni: bisogna poi aggiungere che l'interesse degli studi tecnici esige un'applicazione della matematica non limitata al solo calcolo differenziale. Difatti la meccanica e più ancora l'elettrotecnica si svolgono ormai nella considerazione continua di grandezze vettoriali e la conoscenza del calcolo relativo è una necessità assoluta per l'elettricità: coloro che hanno saputo paragonare i risultati pratici dell'insegnamento dell'elettrotecnica tenuto con o senza l'uso dei vettori, non hanno dubbi al riguardo e nessuno oserà contestare che gli elementi del calcolo vettoriale non sieno anche più accessibili del calcolo differenziale. Le idee del Grassmann portate in Italia dal Peano ed esposte nella forma più piana e sistematica col suo Calcolo geometrico possono essere lo strumento didatticamente migliore di questo calcolo, che riduce la geomerria analitica ad un caso particolare? oppure sono preferibili altre forme meno dirette? e possono essere tralasciate del tutto quelle proprietà, delle quali il Ferraris preparava l'esposizione didattica nel suo ultimo lavoro, che è una specie di geometria dei campi vettoriali? Sono questi i gravi quesiti, che l'insegnante dovrà risolvere non solo nell'interesse degli insegnamenti scientifici e tecnici collaterali ma anche nell'interesse dell'insegnamento stesso della matematica aperto ad un largo senso di modernità.

Per questo senso stesso, senza ricorrere a procedimenti di calcolo logico, che sono l'arma più efficace di revisione critica ma restano inammissibili didatticamente, l'insegnante deve portare in ogni punto rigore e sincerità: egli curerà, dove ricorra a procedimenti intuitivi per ragioni di tempo o di difficoltà didattiche, di dichiararlo esplicitamente ad evitare negli allievi un erroneo concetto dei metodi matematici deduttivi, mentre d'altra parte provocherà massimamente quell'attività dell'allievo, che la deduzione pura lascia inerte e che vive di intuizioni, intuizione esteriore di rapporti spaziali, che nella Geometria, conduce a nuove verità ed intuizione interiore di operazioni spirituali, che fa progredire nel calcolo. E questa attività viene opportunamente educata solo tenendo conto di tutti i gruppi di rappresentazioni, che si legano ai concetti

posti alla base della Geometria. Così ad esempio sensazioni tattili e senzioni visive danno origine a due geometrie, quella che costruiamo col tatto generale e speciale e che è Geometria metrica e quella, che costruiamo colla vista, che è geometria proiettiva. Lo Staudt, dicendo che si sentiva di spiegare con frutto la Geometria di posizione a fanciulli di dodici anni, ha voluto mettere in rilievo l'influenza educativa dei suoi procedimenti. Invece nell'insegnamento attuale la geometria metrica ha un'assoluta preponderanza. Evidentemente solo un corso di geometria, che faccia la giusta parte ai due rami, basato su una larga utilizzazione delle associazioni tattili-visive, potrà educare l'allievo ad una esatta intuizione metrico-proiettiva dello spazio.

RASSEGNA BIBLIOGRAFICA

Questioni riguardanti le Matematiche elementari raccolte e coordinate da FEDERIGO ENRIQUES — Volume I — Critica dei principii — Articoli di U. Amaldi, R. Bonola, F. Enriques, D. Gigli, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali. Bologna — Ditta Nicola Zanichelli 1912 — Prezzo L. 20

Questo interessante Volume, di oltre 600 pagine, è recentemente uscito in bella veste tipografica, e curato in ogni suo particolare, con vero intelletto d'amore. Precede la seguente prefazione del prof. ENRIQUES:

« L'opera collettiva che dodici anni or sono presentavamo al pub-
« blico italiano, sotto il titolo di « Questioni riguardanti la Geometria
« elementare », esce ora in una nuova edizione completamente rifatta
« ed allargata, col titolo di « Questioni riguardanti le Matematiche ele-
« mentari ».

« Il nuovo disegno dell'opera comprende, accanto alle questioni at-
« tinenti alla Geometria anche le questioni che appartengono più pro-
« priamente all'Aritmetica o all'Algebra.

« Tuttavia non ci è parso conveniente dividere l'opera stessa in due
« volumi, consacrati l'uno alla Geonetria e l'altro all'Analisi; anzitutto
« perchè questa vieta distinzione ha perso ormai ogni valore per la
« Scienza e rimane soltanto nei nostri ordinamenti accademici in omaggio
« ad una recente tradizione particolaristica, ed in secondo luogo perchè
« la distinzione suddetta mal corrisponderebbe alla materia trattata,
« laddove p. es. è questione al tempo stesso di poligoni regolari e di

« equazioni binomie, oppure della quadratura del circolo e di sviluppi « in serie o della trascendenza dei numeri e e π, e via dicendo.

« Diciamo di più che l'opera nostra può avere fra gli altri anche « lo scopo di mostrare in qual modo lo spirito geometrico e lo spirito « aritmetico, cui una certa trattazione puristica delle questioni fa corri- « spondere due dominii distinti, si uniscano e si compenetrino in una più « feconda intuizione matematica, quando si passa a studiare le mede- « sime questioni da un punto di vista più elevato e comprensivo.

« Il presente volume che costituisce la prima parte dell' opera, con- « tiene la critica dei principii della Geometria e dell'Aritmetica. A due « articoli sui problemi filosofici e didattici, cui dà luogo la scienza dello « spazio, seguono gli articoli 3, 4, 5 dedicati ai concetti della retta e « del piano, della congruenza e del movimento, e della continuità, quindi « gli articoli 6, 7 sulle teorie dell' equivalenza e delle proporzioni, l'ul- « timo dei quali è una memoria postuma del compianto Giovanni Vai- « lati, pubblicata finora soltanto nella traduzione tedesca fatta sulla « prima edizione di questi collectanea (1).

« L' art. 7, scritto da Roberto Bonola (un altro collaboratore ed » amico di cui debbo rimpiangere la perdita immatura!), dà un nuovo « e più largo sviluppo alle questioni della teoria delle parallele e delle « Geometrie non-euclidee, Invero gli art. 8, 9 sono consacrati ai principii « dell'Aritmetica; cioè: alla critica del concetto di numero, rinnovata « dalle classiche ricerche di Giorgio Cantor sugli insièmi; e alla teoria « dei numeri complessi, esaminata nelle sue origini storiche e nei suc- « cessivi sviluppi, fino ai risultati più generali concernenti i campi di « numeri a più unità.

« Tale è il disegno di questo primo volume, a cui seguirà rapida- « mente la seconda parte dell' opera. E mi sia concesso frattanto di « chiudere queste righe di prefazione, ringraziando i collaboratori ed « amici che hanno lavorato con devozione al comune intento di elevare « lo spirito filosofico dei nostri insegnanti di Matematiche, e di aprire « ai loro occhi una visione più larga delle dottrine e del progresso sto- « rico della Scienza.

Seguono gli articoli di :

F. Enriques: Sull'importanza filosofica delle questioni che si riferiscono ai principii della Geometria.

F. Enriques: Sull' insegnamento della Geometria razionale.

U. Amaldi: Sui concetti di retta e di piano.

A. Guarducci: Della Congruenza e del Movimento.

(1) Grandi amplificazioni ricevettero in codesta traduzione quasi tutti gli articoli del primitivo volume, e tali sviluppi sono recati nella presente edizione.

G. Vitalli: Sulle applicazioni del postulato della continuità nella Geometria elementare.
U. Amaldi: Sulla teoria della equivalenza.
G. Vailati: Sulla teoria delle proporzioni.
R. Bonola: Sulla teoria delle parallele e sulle Geometrie non-euclidee.
F. Enriques: I numeri reali.
D. Gigli: Dei numeri complessi a due e a più unità.

Altro non ci pare necessario di aggiungere perchè i Lettori tutti siano invogliati ad acquistare tale Volume o almeno, a proporne l'acquisto per la Biblioteca del proprio Istituto.

Roma, 12 maggio 1912.

La Direzione

C De Freycinet: *Dell'esperienza in geometria.* — Traduzione di G. Fazzari. — Palermo 1912. — Libreria Reber. — L. 2.

« L'operetta del sig. Freycinet che il collega Fazzari, iniziando una « serie di pubblicazioni vagheggiata da tempo, presenta agli studiosi « italiani è rivolta principalmente alla giustificazione di una veduta fi- « losofica; ma appunto per questo è bene che sia tenuta presente da chi « si occupa di quistioni didattiche, se è vero che i problemi della Scuola, « anche se riguardano l'insegnamento di una scienza speciale non pos- « sano essere utilmente agitati che al lume di una filosofia. La tendenza « al formalismo divenuta quasi irresistibile nei matematici moderni di « fronte alle generalizzazioni sempre più vaste della loro scienza e alla « conseguente necessità di guardare più alla sua organatura logica che « al suo contenuto intuitivo, ha reso ogni giorno più accetti i trattati « di matematica in cui si fa il menomo ricorso all'intuizione; e con- « giunta talvolta al desiderio di mantenere alle conoscenze geometriche, » di contro ai risultati della più recente critica filosofica, il carattere di « verità assolute, ha condotto qualche matematico a vedere nei principî « fondamentali della geometria non imagini ideali di fatti e di rapporti « reali, ma convenzioni liberamente create dallo spirito umano, sebbene « questo, nello stabilirlo si lasci guidare dall'esperienza.

« Ora senza entrare in discussioni minute sulla tesi sostenuta dal « sig. De Freycinet, che qui sarebbero fuori posto, e senza fermarci a « dichiarare fino a qual punto e in qual senso la consideriamo come so- « stenibile, ci sembra che essa non possa essere accolta che con simpatia « da chi riguarda come funesta per la stessa matematica la netta sepa- « razione dalla fisica di che essa si compiace, e da chi riguarda come « illusori i risultati di quelle critiche filosofiche che, per dare alla geo-

« metria una verità rigorosa convenzionale, l'hanno spogliata di ogni « verità positiva reale.

« E non credo di poter meglio finire queste poche parole introdut- « tive che augurandomi di veder presto diffondersi anche fra di noi « l'amore per le discussioni didattiche e scientifiche inspirate non a par- « ticolarismi vani ma a larghe vedute sintetiche ».

A queste belle parole di prefazione dettate dal chiaro geometra G. Scorza fa seguito la traduzione dell'opera del De Freycinet che consta di tre capitoli, il primo sui concetti della Geometria, il secondo sugli Assiomi geometrici (proprietà delle rette e del piano) e il terzo che tratta del Problema geometrico. Il traduttore ha aggiunto in fine una breve nota « Sui postulati delle rette parallele ».

Nel dar tali notizie su questo primo Volumetto della Biblioteca del Pitagora, noi rinnoviamo l'augurio fatto al primo annunzio dell'inizio di questa « Biblioteca » e cioè che alla bella iniziativa del collega Fazzari risponda la più favorevole accoglienza dei docenti di matematica d'ogni ordine di scuole.

Roma, 12 maggio 1912.

La Direzione

Carlo Leoni: *Studio critico-didattico sull'insegnamento della matematica nelle Scuole classiche.* — Chiavari 1912. — Tipografia Esposito.

Il Collega Carlo Leoni del R. Liceo di Chiavari ha redatto un'interessantissima monografia sull'insegnamento della matematica nelle Scuole classiche. La lettura di questo studio critico-didattico procura un vero godimento, per l'insieme d'osservazioni che contiene, osservazioni prese « *dal vero* » e che dimostrano, sopratutto, una grande esperienza della Scuola. Ne apparisce lo studio costante fatto dall'Autore, nella Scuola ove ha impartito e dove impartisce il suo insegnamento, per leggere nell'intimo dei proprî alunni, per sorprenderli sia nei loro momenti più felici, sia in quelli di abbattimento e di sfiducia se non di repulsione addirittura per lo studio di questa nostra disciplina, che « per sua natura « si rivolge alle più elevate facoltà intellettuali », ma che non per questo deve ritenersi inaccessibile alla media mentalità dei nostri scolari, a cui lo studio stesso può rendersi adatto e non scevro d'attrattiva quando il docente, in ogni istante del suo insegnamento, si rammenti che egli ha dinanzi a sè delle giovani intelligenze, ricche d'energia, ma che attendono da lui la più valida guida per percorrere le vie del sapere.

Gli argomenti trattativi sono i seguenti: Difficoltà dell'insegnamento

matematico — L'aiuto della memoria — Attrattive della matematica — Le tendenze moderne nell'esposizione razionale dei principî della geometria — Considerazioni didattiche — Concetti di punto e di linea — Congruenza e movimento — Considerazioni sui preliminari di aritmetica — Numeri frazionarî — Considerazioni sui preliminari d'algebra — Schizzo di una esposizione elementare della generalizzazione dei simboli numerici — L'insegnamento nel ginnasio inferiore — Modificazioni nell'insegnamento liceale.

È questo un notevole contributo portato agli studî della Commissione internazionale per l'insegnamento matematico e siamo sicuri che sarà preso in seria considerazione dalla Delegazione italiana.

La Direzione

G. Frattini: *Lezioni di algebra, geometria e trigonometria.* — Edizione G. B. Paravia e C. 1912. Volume II (per il 4.° corso dell'istituto tecnico). L. 4.

Sta per uscire la seconda parte dell' opera del Frattini, di cui già esaminammo il primo volume (cfr. questo *Bollettino* — Anno X, n. 5, 6, 7, 8 pag. 200 e segg.). Per cortesia dell'Autore diamo notizia fin d'ora del contenuto di questa seconda parte, alla quale, ne siamo sicuri, non mancherà quel successo che già meritò la prima parte (1).

La Direzione

Capitolo I. — *Alcuni principii sulle equazioi.*

1. Del fattore di proporzionalità. 2. Equazioni decomponibili. 3. Radici razionali dell'equazioni. 4. Equazioni con le stesse radici. 5. Equazioni a radici mutate di segno, a radici invertite. 6. Equazioni a radici reciproche. 7. Equazioni e formole omogenee. 8. Cenno sui sistemi di equazioni.

Capitolo II. — *Angoli e poligoni sferici.*

1. Angolo diedro. 2. Angolo triedro. 3. Triedri opposti. 4. Triedri supplementari. 5. Eguaglianza dei triedri. 6. Proprietà dei diedri di un triedro. 7. Triangolo sferico. 8. Equivalenza dei triangoli sferici opposti. 9. Area del triangolo sferico. 10. Angolo del poligono sferico. Volume della piramide sferica.

Capitolo III. *Principali formule di goniometria sferica.*

Capitolo IV. — *Risoluzione dei triangoli sferici.*

1. Osservazioni preliminari. 2. Triangolo di cui si conoscono i tre lati. 3. Triangolo di cui si conoscono due lati e l'angolo da essi com-

---

(1) I Colleghi che desiderino ricevere questa seconda parte sono pregati di rivolgersi perciò direttamente all'Autore, prof. Giovanni Frattini — Roma, Foro Traiano 40.

preso. 4. Triangolo di cui si conoscono due lati e l'angolo opposto ad uno. 5. Proporzioni del Delambre e del Neper. 6. Triangoli rettangoli.

Capitolo V. — *Disposizioni, permutazioni e combinazioni.*

1. Disposizioni. 2. Permutazioni. 3. Combinazioni. 4. Combinazioni con ripetizioni.

Capitolo VI. —. *Applicazioni del calcolo combinatorio. Formola del binomio e sue conseguenze. Probabilità.*

1. Prodotto di m fattori della forma $(x+a)$. 2. Formola del binomio. 3. Alcune proprietà dei coefficienti binomiali. Triangolo del Tartaglia. 4. Probabilità.

Capitolo VII. — (Da omettersi, ove all' insegnante sembri). *Altre applicazioni dello sviluppo binomiale. Derivate. Massimi e minimi, regole del Cataldi, teorema del Fermat.*

1. Derivazione. Derivata del monomio intero. 2. Altri esempi di derivazione. 3. Altre regole di derivazione. 4. Significato geometrico e meccanico della derivata. 5. Massimi e minimi. 6. Applicazione dello sviluppo binomiale alla radice quadrata. 7. Lo sviluppo binomiale e il teorema del Fermat.

Capitolo VIII. — *Sezioni coniche.*

1. L'ellissi. 2. L'iperbole. 3. La parabola. 4. Ellissi, iperbole e parabola, come sezioni del cono retto circolare. 5. Riassunto e conseguenze. 6. Problema delle tangenti. 7. Area del segmento parabolico e dell'ellissi.

Capitolo IX. — *Poliedri.*

1. Poliedri euleriani e principali loro proprietà. 2. Poliedri platonici. 3. Poliedri platonici regolari. 4. Tetraedro regolare. 5. Esaedro e ottaedro regolari. 6. Dodecaedro e icosaedro regolari. 7. Sfere inscritta e circoscritta. 8. Alcuni elementi dei poliedri regolari.

Capitolo X. *Nozioni di analisi indeterminata.*

1. Il problema. 2. Equazioni irrazionali. 3. Risoluzione dell'equazione: $ax+by=c$. 4. Osservazioni e casi notabili. 5 Soluzioni intere e positive. 6. Sistemi di primo grado con più di due incognite.

Capitolo XI. — (Da omettersi ove all' insegnante sembri). *Esempi di equazioni indeterminate del secondo grado.*

1. Nozioni preliminari. — 2. L'equazione : $x^2 \pm py = q$. — 3. L'equazione : $ax^2 \pm py = q$. — 4. Osservazioni circa i numeri quadratici. Regola di moltiplicazione. - 5. Risoluzione dell' equazione : $x^2 \pm py = -1$. Teorema del Wilson. — 6. Risoluzione dell' equazione : $x^2 \pm py = 2$. — 7. Risoluzione dell'equazione : $x^2 \pm py = -2$. — 8. Triangoli rettangoli con i lati interi.

Appendice. — *Numeri complessi.*

1. Dai binomî irrazionali ai numeri complessi. 2. Ufficio dei numeri complessi. Radici coniugate delle equazioni. 3. Equazioni binomie

riducibili al secondo grado. 4. Coordinate cartesiane e polari. 5. Somma e differenza. 6. Prodotto e quoziente. Legge logaritmica degli argomenti. 7. Applicazione all'equazione $x^m = 1$. L'equazione $x^m = -1$.

Al momento di stampare, *ci giunge copia del volume, che completa questa bella opera del Frattini che ci ricorda i trattati classici dei più eminenti matematici e, al tempo stesso, ha in ogni sua parte quelli che, a nostro avviso, sono i pregi fondamentali di un libro di testo: la sobrietà, la chiarezza, la semplicità, il rigore.* LA DIREZIONE

O. MONTESPERELLI: *Lezioni di goniometria e Trigonometria.* — Roma 1912. — Editore E. Cuggiani. — L. 2,50.

La letteratura matematica italiana va sempre più arricchendosi di libri di testo, che pongono i docenti in condizione ben diversa da quella in cui si trovavano, fino a venti anni fa, per dir molto, diguisachè è da ritenere che essi non abbiano più bisogno di valersi, anche per la trigonometria, delle traduzioni di testi stranieri, che per tanto tempo hanno rappresentato un'assoluta necessità per le nostre scuole.

Il prof. Montesperelli, titolare nel liceo e nell'Istituto Tecnico del R. Collegio Militare di Roma, pubblica queste Lezioni di goniometria e trigonometria, le quali, sopratutto, da un primo esame fattone, ci appaiono pensate e redatte in modo da costituire uno di quei libri, che veramente possono dirsi destinati agli allievi, a differenza di altri, ove quasi ad ogni passo, sembra che gli Autori si siano proposto il fine speciale di render complicate e oscure le cose più semplici e chiare, e di far nascere una repulsione piuttosto che dell'attrattiva verso lo studio della matematica.

Abbiamo notato qualche lieve menda a cui l'Autore riparerà certamente nelle successive edizioni, ispirandosi, *sempre* e *ovunque*, al criterio pur dall'Autore stesso tenuto, per esempio a proposito degli angoli e degli archi, circa a una netta distinzione fra le grandezze e i numeri ad esse corrispondenti.

Il Volume comprende i 6 capitoli seguenti:

Capitolo I. — *Assi Cartesiani — Misura degli archi di circolo e degli angoli.*

Capitolo II. — *Le funzioni circolari.*

Capitolo III. — *Funzioni circolari dell'arco somma, dell'arco doppio o triplo, dell'arco metà — Applicazioni geometriche — trasformazione di somme di funzioni circolari in espressioni logaritmiche.*

Capitolo IV. — *Costruzione ed uso delle tavole dei logaritmi delle funzioni circolari — Identità ed equazioni goniometriche.*

Capitolo V. — *Relazioni tra gli elementi di un triangolo — Risoluzione di triangoli — Area del triangolo — Il quadrilatero inscritto — Applicazioni.*

Capitolo VI. — *Relazioni tra quattro elementi di un triangolo sferico — Formule di Delambre e di Neper — Risoluzione di triangoli sferici — Applicazioni.*

Il Volume termina con una raccolta di circa 200 esercizî e problemi variati, tra i quali figurano pure dei temi proposti dal Ministero ai candidati alla licenza dalla Sezione fisico-matematica dell'Istituto Tecnico.

La Direzione

RASSEGNA DELLE RIVISTE

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

(Rivista internazionale - Annata XIII, 1911)

Ch. Méray: *Saggio d'una trigonometria indipendente dagli archi di cerchio.* L'autore osserva che fino dal 1874 in un suo libro ha accennato a sottrarre la trigonometria dal parassitismo del cerchio per ritornare alla considerazione diretta degli angoli, e raggiungere quindi una semplificazione della teoria e mettere così le sue risorse alla portata della geometria elementare. Ma quello non fu che un piccolo inizio; in questa nota intende di fare ancora un passo nel medesimo ordine di idee. Egli mostra sommariamente come si potrebbe arrivare alla fine di quella via accennata nel suo libro. Presenta particolarmente una dimostrazione, attinta alla medesima sorgente, per le formole generali concernenti l'addizione e la sottrazione degli angoli, da dove, una volta stabilite, il resto della trigonometria si deduce rapidamente senza difficoltà speciali.

B. Barbarin: *Il problema di Pappo.* Del celebre problema « Rhombo dato, et uno latere producto, aptare sub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quae ad oppositum angulum, pertingat ». Pappo, e dopo di lui un certo numero di matematici, fra i quali Neuwton. Huygens, Gergonne, hanno data una soluzione algebrica e geometrica che dipende dalla costruzione di due linee di differenza e prodotto conosciuti. Il problema più generale: « Condurre da un punto dato in un angolo una secante di lunghezza data » e stato a sua volta l'oggetto d'un certo numero di ricerche e l'autore della nota si propone di portarvi il suo contributo. La soluzione completa di questo problema generale è data algebricamente da un' equazione di terzo o di quarto grado, graficamente dall'intersezione di un cerchio e d'una iperbole. Oltre il rombo vi sono

altri casi particolari nei quali il grado si abbassa al secondo. Esiste egualmente un caso particolare che conduce ad una trisezione d'angolo.

Lucien Godeaux: *Sulle congruenze lineari di rette.* In questa nota l'Anton determina con un processo elementare quali sono le congruenze lineari di rette che possono presentarsi. Sia Γ una congruenza lineare di rette. Per ciascuna retta di Γ facciamo passare due piani π_1, π_2 determinati da un procedimento che non specifichiamo. I piani π_1, π_2 relativi a tutte le rette della congruenza Γ formano rispettivamente delle varietà V_1, V_2.

Possono presentarsi i casi seguenti studiati dall'Autore:

1.° Le varietà V^1, V_2 sono sviluppabili e sono distinte.

2.° Le varietà V_1, V_2 si confondono in una sola sviluppabile V.

3.° La varietà V_1 è una sviluppabile e la varietà V_2 una superficie (inviluppo) propriamente detta non contenente V_1.

4.° La superficie (inviluppo) V_2 contiene la sviluppabile V_1.

5.° Le varietà V_1 V_2 sono delle superficie (inviluppi) distinte.

6.° Le varietà V_1, V_2 si confondono in una sola superficie (inviluppo) V.

Y. Sawaiama (Tokio): *Nuove dimostrazioni d'un teorema relativo al cerchio dei nove punti.* Del teorema: « Il cerchio dei nove punti di un triangolo è tangente interiormente al cerchio inscritto ed esternamente ai cerchi exinscritti », l'Autore della nota ha trovate nove dimostrazioni differenti. La prima di queste dimostrazioni, è già stata pubblicata nell' *Enseignement mathématique* (Annata VII, 1905, n. 6). Ora egli espone le altre otto a partire dalla seconda. La seconda e la terza dimostrazione non dipendono nè dai teoremi delle aree nè da quelli della proporzione; e dalla quarta fino alla settima sono ancora indipendenti dai teoremi relativi alle proporzioni.

Gino Loria: *Sulla determinazione della curvatura d'una linea piana considerata come inviluppo delle sue tangenti.* L'autore della nota dice che esaminando la nuova edizione tedesca dell'eccellente « *Repertorium der hoh. Mathematik* di E. Pascal del quale sono apparsi recentemente due volumi, ha osservata la mancanza di formole rispondenti alla questione enunciata nel titolo della sua nota. Poichè si ha bisogno di queste formole in parrecchie occasioni e siccome non le ha trovate nei trattati esaminati, così le stabilisce. Esse offrono una applicazione della teoria classica degli inviluppi e potrebbero trovar posto in ogni esposizione scolastica delle applicazioni geometriche del calcolo differenziale.

A. Aubry: *I principi della geometria dei quinconces.* Si chiama quinconce l'insieme indefinito di intersezioni di due sistemi di parallele equidistanti, numerate a partire da due di esse prese come direttrici e numerate zero. Lo studio di questa figura costituisce una specie di geometria analitica in numeri interi nella quale le coordinate sono, non più delle lunghezze, ma dei numeri.

Georges Majcen: *Una costruzione dell'iperbole.* Una considerazione sull'iperboloide di rotazione ad una falda ha fornito all'Autore alcune relazioni che possono essere impiegate per una costruzione semplice dell'iperbole (dati i due assi) e nel medesimo tempo per la costruzione delle tangenti nei punti determinati dalla curva.

P. Poyet: *Regioni definite da un' iperbole.* In questa nota l' Autore costruisce la teoria dell'iperbole senza fare alcun richiamo all'intuizione grafica. Si fonda perciò unicamente su delle proposizioni stabilite — o supposte tali — nei primi libri di geometria. Egli spera che « logici » e « intuitivi » troveranno un *documento* in questo capitolo di geometria elementare, edificato *logicamente* sui materiali forniti dall' *intuizione*, penseranno questi, dal ragionamento *deduttivo* di già in funzione diranno gli altri.

E. Turrière: *Sulle funzioni sinettiche.* L' oggetto di questa nota è di mettere in evidenza una interpretazione geometrica, dipendente dalla geometria rigata, delle relazioni che caratterizzano le funzioni sinettiche

A. Schülke: *Differenziale e derivata.* Osserva l' Autore che in tutti i paesi civili ci si sforza attualmente d'introdurre, nelle scuole medie, degli elementi di calcolo differenziale e integrale che una volta erano interamente riservate all'Università. In queste scuole si seguono generalmente i medesimi procedimenti dei corsi universitari e si può domandarsi se questo sia ben conforme al fine proposto. Ad ovviare le difficoltà, in luogo delle tre nozioni differenti,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\ ;\ \frac{dy}{dx}\ ;\ dy = f'(x)\, dx$$

che i principianti hanno molta fatica a distinguere le une dalle altre, egli ritiene sufficiente per i bisogni dell'insegnamento e delle matematiche applicate, d'introdurre unicamente le piccole quantità dx e dy, per mezzo delle quali si ottengono dei risultati completamente rigorosi trascurando le potenze superiori.

Edouard Barbette: *Sulla decomposizione dei numeri in fattori.* L'Autore in un precedente lavoro ha dimostrato che qualunque sia il numero N, le equazioni

$$N = \frac{x(x+1)}{2} - \frac{y(y+1)}{2}$$

$$8N = x^2 - y^2$$

$$Nz = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$8Nz + 1 = y^2$$

hanno soluzioni intere e ne ha dedotti dei metodi nuovi di decomposizione dei numeri in prodotti di fattori. Ora riesamina questi metodi e li semplifica con l'impiego dei residui triangolari o quadratici.

F. Butavand: *Sulla rappresentazione dei determinanti con dei sistemi articolati.* Il calcolo numerico d' un determinante è in generale una operazione molto laboriosa allorchè l'ordine del determinante è un poco elevato. Ce ne accorgiamo specialmente nel caso nel quale si ha da risolvere un sistema di equazioni di primo grado e nel quale non è possibile di semplificare anzitutto questo. Si sa che una radice è data dal quoziente di due determinanti identici eccetto una colonna e tuttavia si è costretti a sviluppare integralmente ciascuno dei due determinanti. L'autore della nota, si è domandato se non fosse possibile, in vista di semplificazioni, di mettere in evidenza la parte comune di due termini dei quali si cerca il quoziente. Conveniva dapprima di mettere lo sviluppo di un determinante sotto la forma di un monomio. Quindi pensò di applicare ai determinanti la concezione del sistema articolato. Tratta del determinante articolato del 2.° ordine partendo dalla considerazione del sistema articolato nell' istrumento detto « pantografo ». Poi di quello del 3.° ed infine di un determinante articolato di ordine n.

G. Valibon: *Sulla teoria delle coniche.* Vari autori si sono proposti di semplificare la dimostrazione del teorema seguente: La proiezione di un cerchio è una conica. In questa nota ne è data una dimostrazione molto elementare non supponendo conosciuta la nozione di rapporto anarmomico. Spiega in seguito come, supponendo nota questa nozione, si potrebbe abbreviare la dimostrazione.

Vi sono inoltre altri interessanti articoli di E. Turrière: *Sull'interterpretazione geometrica secondo A. Mannheim dell' equazione intrinseca di una curva piana;* di Ch. Mèray: *Sulla ricerca diretta della relazione di varariabili a funzioni esistenti tra la misura di un angolo ed i suoi rapporti trigonometrici;* di E. Turrière: *Sulla costruzione dei centri di curvatura principali in un punto d' una quadrica;* di F. R. Scherrer: *Sulla determinazione del centro di gravità d'un segmento parabolico con un metodo elementare;* di E. Turrière: *Sul problema di Transon in geometria rigata;* dello stesso autore: *Un' osservazione relativa al calcolo del raggio di curvatura d'una curva piana:* di G. Combebiac: *Sui postulati dell'ordine lineare aperto;* di Julio Rey Pastor: *Sull' applicazione di una proiettività ciclica alla geometria del triangolo;* di Arn. Enich: *Su di un appareccchio dimostrante la trasformazione dell'energia potenziale in energia cinetica;* di E. Turrière: *Su certe trasformazioni di rette.*

La *Rivista* è poi l'Organo ufficiale della Commissione internazionale dell'insegnamento matematico. Inoltre ha una sezione bibliografica ed una di cronaca.

Luisa Rubini

Finito di stampare il giorno 18 giugno 1912.

Alberto Conti: *Direttore Responsabile.*

la presenza del Presidente generale dell' Associazione prof. Castelnuovo e di un buon numero di soci della Sezione.

Nel *Bollettino* sociale compariranno le conclusioni di tali adunanze, fra le quali sono da segnalarsi, in modo speciale, un voto per l'aumento di un'ora all'orario prescritto dagli ultimi programmi per l'insegnamento della matematica nella terza liceale, e un altro voto contro l'ingiustificabile esclusione dai Concorsi ai posti di R. Provveditore agli Studî, dei Laureati in scienze fisiche, matematiche e naturali.

L'ultima seduta è terminata con un voto di plauso al Presidente della Sezione prof. Pittarelli, sotto la cui presidenza la Sezione ha assunto una vita veramente prospera, raccogliendo sempre maggior numero di Soci e, ciò che più preme, di Soci assidui a tutte le adunanze ed appassionati alla discussione degli argomenti, di volta in volta posti all'ordine del giorno.

BIBLIOTECA DEL "BOLLETTINO DI MATEMATICA"

(continuazione dell' elenco dei N. 5-6-7-8 dell'Anno XI pag. XV).

961. **E. Bortolotti.** - Manuale di Aritmetica generale ed Algebra.....
962. **A. Andreini.** - Sulla costruzione di un orologio solare verticale.
963. **E. Pascal.** - Di un nuovo integrafo per quadrature ed equazioni differenziali.
964. **R. Guimaraes.** - Les mathématiques en Portugal (Appendice II).
965. **P. Cattaneo.** - Sul calcolo delle altezze dei segmenti sferici.
966. » » - Equazioni di 3° e di 4° grado colle soluzioni in progressione aritmetica.
967. » » - Sulle sfere omogenee galleggianti.
968. **F. Palatini.** - Sulle equazioni di condizione delle reti cremoniane di curve piane.
969. **G. Torelli.** - Sui lavori della R. A. delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli.
970. *Compte rendu du Congrès de Milan (1911) de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.*
971. **G. Ricci.** - Del concetto di successione in relazione col teorema fondamentale del calcolo integrale.
972. **G. Bordiga.** - Le sup. razionali di 6° ord. che passano doppiamente per gli spigoli di un tetraedro.
973. **C Pasini.** - Sulla determinazione dell'errore angolare di chiusura di una poligonale topografica.
974. **T. Boggio.** - Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito.
975. **A. Viterbi.** - Sulle direttrici piane dell'anello di Saturno.
976. » » - Su una classe speciale di forme dell'anello di Saturno.
977. **C. A. Dell' Agnola.** - Sulle funzioni egualmente continue.
978. » » » - Delle varie specie di convergenza uniforme.

979. **U. Cisotti.** - Integrale generale dei piccoli moti ondosi di tipo permanente in canali molto profondi.
980. **E. Padova.** - Il fotometro Zöllner-Wolfer applicato allo studio del cuneo del fotometro registratore Müller.
981. **Maria Olivo.** Sui potenziali di semplice e di doppio strato in prossimità dell'agente.
982. **L. V. Rossi.** - Estensimetro moltiplicatore per costruzioni metalliche.
983. **A. Favaro.** - Alla ricerca delle origini del motto « *E. pur si muove* ».
984. **U. Cisotti.** - Sul movimento traslatorio di un solido di rivoluzione in un fluido viscoso.
985. **A. Tonolo.** - Sull'esistenza di soluzioni fondamentali di una equazione alle derivate parziali del tipo ellittico.
986. **E. Pascal.** - Sul mio integrafo a riga curvilinea.
987. **C. Aiello.** - Sulle equazioni di Riccati.
988. » » - Sul numero dei numeri primi inferiori ad un dato limite.
989. » » - Su di una importante applicazione dell'integrafo Pascal.
990. **U. Amaldi.** - Roberto Bonola.
991. **G. Riboni.** - Elementi di calcolo letterale e di algebra.
992. » » - Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori (6ª ed.).
993. » » - Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie inferiori (8ª ed.).
994. **G. Serrazanetti.** - Aritmetica pratica per le scuole d'arti e mestieri.
995. **G. C. Young.** - Geometria per i piccoli (*Trad. di L. Viriglio*).
996. **A. Loria.** - Il Regolo Calcolatore,
997. **E. Pascal.** - Calcolo Infinitesimale (3ª edizione) — Parte II.
998. *Fascicoli d'Aritmetica della collezione « Primavera ».*
999. **E. Sibirani.** - Sopra due tipi di determinanti e sopra i polinomi trigonometrici ed iperbolici pari e dispari.
1000. **L. Galvani.** - Rappresentazione analitica di una funzione totalmente discontinua che nell'intorno di un punto qualunque acquista valori propri di n funzioni arbitrarie date.
1001. **E. Cominotto.** - Geometria della curva magnetica.
1002. **P. A. Fontebasso.** - Teoria dei numeri primi per il 3° corso del liceo.
1003. **De Freycinet.** - Dell'Esperienza in geometria (Trad. di G. Fazzari).
1004. **C. Leoni.** - Sull'insegnamento della matematica nelle scuole classiche.
1005. **G. Vivanti.** - Lezioni di Analisi infinitesimale.
1006. **U. Stanghellini.** - Trattazione sintetica della matematica ad uso delle scuole medie.
1007. **U. Cisotti.** - Osservazioni sul moto permanente di una sfera in un liquido indefinito.
1008. **T. Levi Civita.** - Sullo spostamento dell'equilibrio.
1009. **E. Soler.** - Sulla espressione della gravità per talune superficii di rotazione.
1010. **Ines Favini.** - Sulle superficie le cui linee di curvatura tagliano sotto angolo costante le linee di livello.
1011. **M. Chini.** - Corso speciale di matematiche ad uso dei Chimici e dei Naturalisti.
1012. **E. Baroni.** - Algebra (2ª edizione).

(Continua)

Notizie sui concorsi a cattedre di scuole medie.

Concorso speciale pei Licei.

La Commissione giudicatrice costituita dai prof.[i]: LAURICELLA, MONTESANO, PERNA ha designato tre vincitori in base al semplice esame dei titoli ed ha invitato varî altri alle prove d'esame, alle quali però si sono presentati pochissimi dei chiamati.

La graduatoria definitiva comprende 5 vincitori, nell'ordine di merito seguente:

1. Dall'Acqua. — 2. Brusotti. — 3. Benedetti. — 4. Galvani. — 5. Strazzeri.

Concorso speciale per gli Istituti tecnici.

La Commissione giudicatrice, costituita come pel Concorso dei Licei, ha designato 9 vincitori, ossia tutti i vincitori, in base al semplice esame dei titoli. I vincitori sono, in ordine di merito:

1. Marletta. — 2. Veneroni. — 3. Rosati. — 4. Bonaventura. — 5. Bisconcini. — 6. Dall'Acqua. — 7. Brusotti. — 8. Predella. — 9. Benedetti.

Concorso speciale per le Scuole normali femminili.

La Commissione giudicatrice, costituita dai prof.[i]: ALAGNA, LAURICELLA, MONTESANO ha designato 13 vincitori, in base al semplice esame dei titoli ed ha invitato altri 38 concorrenti alle prove d'esame.

Degli altri Concorsi in via d'aggiudicazione, nel momento in cui scriviamo abbiamo soltanto notizie incomplete.

I primi frutti delle nuove disposizioni sui Concorsi speciali e i varî « si dice ».

Com'è noto, i Concorsi speciali intorno ai quali precedono le notizie che avevamo sulle relative graduatorie, si sono venuti espletando sotto l'impero delle nuove disposizioni legislative e regolamentari. Le quali, come è anche noto, furono ispirate dal proposito di favorire maggiormente gli insegnanti con una lodevole anzianità di servizio.

Secondo le ricordate disposizioni, le Commissioni giudicatrici disponevano di 60 punti da ripartirsi fra tre gruppi: titoli didattici, pubblicazioni, titoli di studio. Circa ai punti da assegnarsi ai singoli gruppi, nulla più disposero nè la legge nè il regolamento; nè parimente fu disposto nulla riguardo alla suddistinzione dei titoli didattici in titoli di anzianità senza demerito e in titoli speciali attestanti la bontà del servizio prestato; nè pei titoli di studio la legge e il regolamento fissarono una speciale valutazione pei diplomi di magistero e per i certificati di studi universitarî. Insomma le nuove disposizioni conferivano molta

libertà alle Commissioni giudicatrici, e dalle prime notizie apparisce che furono assai varî i criteri particolari adottati dalle singole Commissioni giudicanti. Questa volta, anche più del solito, saranno attese con particolare interesse, le Relazioni, in mancanza delle quali è prematuro dare dei giudizî, ciò che però non ci impedisce di raccogliere subito varî « *si dice* » in rapporto sia ai Concorsi speciali di matematica sia, in genere, a molti altri dei Concorsi speciali d'altre discipline, giudicati in questo periodo di tempo.

Si dice che la Commissione pel Concorso speciale degli Istituti tecnici si sia trovata veramente imbarazzata a fare una scelta di *nove*, fra le tante brave persone che vi avevano partecipato; il che tornerebbe ad onore della classe degli insegnanti di matematica; mentre, si dice, la Commissione per le Scuole Normali tanto stentò a trovare dei concorrenti degni della designazione a vincitori, tanto da dovere addirittura sentire la necessità di chiamarne 38 alle prove d'esame pei cinque posti rimasti scoperti nella graduatoria.

Si dice che l'imbarazzo grande suaccennato sarebbe dipeso da criterî « eccezionali » adottati, in conseguenza dei quali sei o sette anni di anzianità sarebbero venuti a contare come dieci e come quindici; un'ispezione sola avrebbe avuto valore pari a quello di tre o più ispezioni; l'essere stati o no promossi per merito sarebbe stato indifferente; l'avere vinto o no dei Concorsi speciali sotto l'antico regime (*più severo certamente dell'attuale ma con le mani legate per le Commissioni)* non avrebbe avuta influenza alcuna; l'idoneità a Capo d'Istituto e, per taluno, anche quella a Ispettore centrale permanente non sarebbero contate nulla; gli studi fatti, ad esempio presso quella scoletta che chiamasi « *Scuola Normale Superiore di Pisa* » e gli esami sostenutivi, innanzi ad Enrico Betti, Ulisse Dini, Eugenio Bertini, Luigi Bianchi, Vito Volterra, non avrebbero potuto equiparare un *diploma di magistero,* che ognuno sa come oggi sia conseguibile.

Si dice che, avutosi, in conseguenza dei criterî adottati, un grande allivellamento nel primo e nel terzo gruppo dei titoli (titoli didattici e titoli di studio) siano rimaste le « *pubblicazioni* » a fare, esse sopratutto, da criterio discriminatore.

Il che, v'è chi dice che sia stato un bene, e v'è chi dice che sia stato un male. Chi avrà ragione?.... Certo che le pubblicazioni sono le più soggette, al gusto personale di chi giudica, e il gusto, si sa bene, può variare.

Si dice che nelle graduatorie generali, sopratutto fra i *vinti,* taluno segua ad altri a cui pure tanti titoli lo fanno essere superiore, a giudizio non suo personale, ma dei Colleghi e dei Superiori suoi.

Si dice che *fra i chiamati all'esame* vi siano dei *valori da tempo riconosciuti,* degli insegnanti provetti, proprio di quelli a cui favore era

Roma, Via Lamarmora, n. 37 int. 3

SOMMARIO :

f) Recensioni delle principali pubblicazioni di matematica.

g) Rassegna delle principali riviste di Matematica, italiane e straniere.

h) Resoconto dei Congressi di matematica, italiani e stranieri.

i) Relazioni e graduatorie dei Concorsi per cattedre di matematica; notizie del personale insegnante.

l) Una rubrica *(rubrica intermediario)* destinata ad accogliere da tutti i lettori domande intorno a qualsiasi argomento compreso nel programma del periodico, e che accoglierà altresì le risposte via via date alle dette domande dai lettori medesimi o dalla Direzione.

La quota d'abbonamento è di L. 6,50 per l'Italia (L. 7,50 per l'Estero).

L'abbonamento può esser preso in qualunque momento dell'anno, ma termina coll'anno stesso; e la Direzione non garantisce di potere inviare tutti i numeri dell'annata a partire dal primo, a coloro che assumono l'abbonamento dopo il febbraio.

L'ammontare della quota d'abbonamento dev'essere pagato in una sola volta e anticipatamente.

La ricevuta delle quote vien data sulla copertina del *Bollettino*, a meno che non si tratti di Enti, (Istituti, Comuni, Biblioteche ecc.) che ne facciano speciale richiesta.

I fascicoli del " BOLLETTINO DI MATEMATICA ,, portano la numerazione, d'anno in anno, da 1 a 12, ma escono di regola ogni due mesi. La Direzione si riserva il diritto di raccogliere in un sol fascicolo due o più numeri, all'intento di dare un proporzionato sviluppo a tutte le principali rubriche. In ogni caso l'annata comprende almeno 20 fogli (di 16 pagine ciascuno) di testo e 24 pagine almeno di copertina colorata interna,

---

AVVERTENZA PEI NUOVI SOCI

Non è più disponibile alcuna collezione completa, essendo esaurita l'annata II e l'annata VII. Sono però disponibili alcune copie (*ben poche ormai*) delle annate I, III, IV, V, VI, VIII, IX e X a prezzi da convenirsi, di volta in volta, a seconda della richiesta.

ESTRATTI

Per gli estratti dei loro articoli, gli Autori devono farne l'ordinazione direttamente alla *Tipografia Cuppini* (*Bologna - Via Castiglione 8*), e non più tardi del giorno in cui essi hanno rispedito le bozze.

INTORNO ALLA MISURA degli angoli piani e degli archi di circolo (*)

ANTONIO FAIS (Cagliari)

Spero che i colti lettori di questo giornale mi consentiranno di intrattenerli sovra un argomento di geometria elementare, vale a dire sulla misura degli angoli piani e degli archi di circolo. Non potendo, in una questione come questa, venire innanzi con teoremi nuovi o con considerazioni peregrine, mio unico intento è quello di presentare la questione sotto una forma precisa, e tale da agevolare agli allievi delle nostre scuole mezzane la retta intelligenza delle proposizioni e formule che vi si riferiscono. Ritengo che a quest' uopo giovi prendere di mira un certo angolo invariabile che, sopratutto nell'analisi e nella geometria analitica, si impone come naturale unità angolare, come l'angolo retto si impone nella pratica geometria. — Parecchi reputati autori moderni, e fra gli altri G. A. SERRET (1), il GRASSMANN, il TODHUNTER (2) ed il BALTZER (3) parlano più o meno este-

---

(*) (*N. d. D.*) Di buon grado accogliamo questa Nota favoritaci dal chiarissimo prof. ANTONIO FAIS della R. Università di Cagliari, e richiamiamo l' attenzione dei Lettori su di essa e sulla proposta sostenutavi circa alla convenienza di adottare come unità angolare l' angolo che insiste sopra un arco uguale al raggio.

(1) *Traité de Trigonometrie* - 3me édition, pag. 86.

(2) *Plane Trigonometry* - Third edition, pagine 8-10.

(3) *Elementi di matematica* del BALTZER, versione di L. CREMONA parte 4a, « Planimetria », pag. 16.

samente di quest' angolo senza però dargli un nome speciale. Io reputo che alla concisione ed esattezza nell' enunciato delle proposizioni che all'argomento in questione si riferiscono giovi designare quell'angolo con nome speciale che in qualche modo accenni al suo uffizio. Ciò appunto farò in questa Nota, nella quale del resto non faccio che meglio chiarire ciò che intorno all'argomento stesso io già esposi nel mio *Trattato di Trigonometria rettilinea* a pag. 10-13. Io non so se il vocabolo che propongo incontrerà il favore di molti fra gli insegnanti di geometria elementare. Comunque la cosa succeda, mi terrò pago se le mie parole indurranno altri di me più autorevole a proporre altro vocabolo che possa dai geometri essere favorevolmente accolto.

Supporrò che il lettore conosca la proposizione XXXIII del 6° libro degli *Elementi di Euclide*, secondo la quale in due cerchi uguali, ovvero nello stesso cerchio, gli angoli i cui vertici siano ai centri hanno fra loro la medesima ragione degli archi sui quali insistono: pure supporrò che egli conosca che due circonferenze stanno fra loro come i rispettivi raggi, e che quindi chiamando π il rapporto costante della circonferenza al suo diametro, $2\pi r$ esprime la lunghezza della circonferenza di raggio r. — Ciò premesso, parlerò dapprima della misura degli archi, e poscia della misura degli angoli e delle relazioni fra queste misure.

Misura degli archi di circolo.

Cominciamo dall'avvertire che negli archi bisogna distinguere *l'ampiezza* dalla lunghezza: questa dipende anco dal raggio, quella ne è affatto indipendente. Ecco come possiamo precisare il significato di *ampiezza*: « se si assume per unità degli archi un arco « il quale sia definito unicamente per mezzo del rapporto che « ha coll'intera circonferenza cui appartiene, il numero di unità « di quella specie contenute in altr'arco qualsivoglia dicesi am« piezza di questo (4).

Laonde il numero di quadranti, il numero di sestanti, il numero di ottanti.... ecc. contenuti in un arco rappresentano egual-

(4) Dalla definizione che diamo dell'ampiezza di un arco di circolo si apprende che essa non è altro che la curvatura totale dell'arco.

mente la sua ampiezza. Le unità però più sovente adoperate nella misura dell'ampiezza degli archi sono il grado, e l'arco la cui lunghezza è uguale al raggio.

Misura degli archi in gradi. — Fin dalla più remota antichità i geometri han convenuto di dividere la circonferenza di un cerchio qualunque in 360 parti eguali: a ciascuna di queste parti si dà il nome di *grado;* cosicchè il quadrante di circonferenza comprende 90 gradi. Il grado poi si divide in 60 archi uguali, detti *minuti*, ed il minuto in 60 archi eguali detti *secondi.* I gradi, minuti e secondi, si rappresentano cogli indici $^\circ$, $'$, $''$ scritti sopra il numero che li rappresenta. Gli archi poi inferiori ad $1''$ più comunemente si valutano in frazioni decimali di secondo. Così un arco di 21 gradi, 17 minuti, 24 secondi e 6 decimi di secondo si rappresenta con

$$21^\circ\ 17'\ 24'',6.$$

Siffatto ordine di unità di misura degli archi forma il così detto *sistema sessagesimale*, e si distingue dal *sistema centesimale* proposto dagli autori del sistema metrico decimale. Il sistema centesimale però è oggi quasi affatto abbandonato, e noi parlando di gradi intenderemo parlare di gradi sessagesimali.

Ciò premesso, dalla definizione che abbiamo data dell' ampiezza, consegue che il numero di gradi, minuti e secondi che conta un arco è misura della sua ampiezza.

Che se dall'ampiezza espressa dal numero di gradi si vuol dedurre la lunghezza dell'arco, bisogna pur che in qualche modo sia dato il raggio. Se allora n indica quel numero, r la lunghezza del raggio ed l la lunghezza dell'arco, potremo evidentemente stabilire la proporzione

$$l : 2\pi r :: n : 360,$$

donde si ricava
$$l = 2\pi r \frac{n}{360}.$$

Secondo modo di misurare gli archi. — L'altra unità frequentemente adoperata per la misura degli archi di circolo è l'arco la cui lunghezza è eguale alla $(2\pi)^{\text{esima}}$ parte della circonferenza, cioè al raggio. Adottando tale unità, l'ampiezza d'un arco qualsivoglia descritto col raggio r ed avente una lunghezza l è data

dal rapporto $\frac{l}{r}$, qualunque sia l'unità di lunghezza che si sceglie per misurare r ed l. Laonde l'ampiezza del quadrante d'una circonferenza qualunque è data da $\frac{\pi}{2}$, quella dell'ottante da $\frac{\pi}{4}$ e così di seguito.

Misura degli angoli piani.

Dopo aver parlato della misura degli archi parleremo ora della misura degli angoli piani. Anche per la misura degli angoli due sono le specie di unità che s'adoperano più frequentemente, vale a dire *l'angolo retto*, colle sue divisioni *grado*, *minuto* e *secondo*, e *l'angolo che insiste sovra un arco eguale al raggio col quale quest'arco è descritto facendo centro nel vertice di quello.*

Misura degli angoli in gradi. — Nella stessa guisa che per arco di 1 grado si intende un arco che sia $\frac{1}{90}$ del quadrante, così per angolo di 1 grado si intende un angolo che sia $\frac{1}{90}$ dell'angolo retto, che considerato come angolo al centro d'un cerchio insiste appunto sul quadrante di questo. L'angolo di 1 grado poi si suddivide in 60 angoletti eguali detti minuti, e ciascuno di questi si suddivide in 60 angoletti eguali detti secondi. Adottando questo modo di misurare gli angoli in gradi, e confrontandolo col modo precedentemente spiegato di misurare gli archi in gradi, per cagione della proporzionalità che abbiamo veduto sussistere fra gli archi dello stesso raggio e gli angoli al centro che su questi insistono avviene che lo stesso numero che è misura di un arco in gradi minuti e secondi è pur misura in unità angolari di questo stesso nome dell'angolo al centro che sull'arco insiste. Questa coincidenza, dalla quale fin dalla più remota antichità i geometri ed astronomi han tratto preziosi vantaggi, si suole esprimere dicendo che *l'arco espresso in gradi misura il corrispondente angolo al centro.*

Secondo modo di misurare gli angoli. — Evvi un secondo modo di misurare gli angoli, che si adopera assai frequentemente nelle teorie matematiche. Per ben comprendere in che cosa questo se-

condo modo consista, cominciamo dal dimostrare la seguente proposizione:

« L'angolo al centro di un circolo, che insiste sovra un arco « eguale al raggio è invariabile qualunque sia questo raggio ».

Difatti se chiamiamo I l'angolo che insiste sovra un arco di circolo di lunghezza eguale al suo raggio r, e se lo paragoniamo coll'angolo retto considerato come angolo al centro di quel circolo ed insistente quindi sovra il quadrante $\frac{\pi}{2} \times r$, in virtù della rammentata proposizione euclidea abbiamo

$$I : < \text{retto} : : r : \frac{\pi}{2} r, \text{ d'onde si trae}$$

$$I = \frac{2}{\pi} \times < \text{retto}.$$

Ora l'angolo retto è angolo invariabile, e tale è pure la sua frazione incommensurabile $\frac{2}{\pi}$; laonde è dimostrata l'enunciata proposizione. Poichè l'angolo I vale $\frac{2}{\pi}$ dell'angolo retto, consegue che lo stesso angolo I vale $\frac{2}{\pi} \times 90$ gradi, cioè $57°, 2958$, ovvero $57° 17' 45''$, ovvero $3437', 75$ ovvero ancora $206265''$.

Viceversa l'angolo di 1° vale $\frac{\pi}{180}$ dell'angolo I, cioè $I \times 0,01745...$ — Dimostrata l'invariabilità dell'angolo I, possiamo ora paragonarlo con altr'angolo qualunque A avente il vertice al centro dello stesso cerchio di raggio qualunque r (ovvero d'un cerchio eguale) e sia l la lunghezza dell'arco sul quale quest'angolo A insiste. In virtù della citata proposizione euclidea avremo

$$A : I : : l : r$$

proporzione la quale significa che *un angolo qualunque ha coll'angolo invariabile I più sopra definito la stessa ragione che l'arco intercetto tra i lati di quello sulla circonferenza descritta dal suo vertice come centro e con raggio qualunque ha con questo raggio.*

Per cagione delle due proprietà che abbiamo dimostrato competere all'angolo che insiste sovra un arco eguale al raggio con

cui quest'arco è descritto facendo centro nel vertice di quello, vi è grande convenienza ad assumerlo come unità angolare; ed è appunto ciò che spesso si fa nelle investigazioni teoretiche. Inoltre a me pare che debba tornare assai comodo attribuire a siffatto angolo un nome speciale, che in qualche modo acenni all'impiego che se ne fa: epperò lo chiameremo *goniometro* [1]. Adottando il goniometro per unità angolare, nell'ultima proporzione scritta si ha da porre $I = 1$; onde allora si avrà

$$A = \frac{l}{r},$$

eguaglianza che dà luogo alla seguente proposizione: « un angolo « qualunque in goniometri è misurato dal rapporto che l'arco in- « tercetto tra i lati di quello sulla circonferenza descritta dal « suo vertice come centro e con raggio qualunque ha con questo « raggio ».

E poichè il predetto rapporto rappresenta, come vedemmo, l'ampiezza dell'arco espressa in unità eguali al suo raggio, così possiamo più concisamente formulare quella proposizione dicendo: « il numero che è misura d'un arco in unità eguali al suo raggio « è pur misura in goniometri dell' angolo al centro che su quel- « l'arco insiste ».

Pertanto nella fatta supposizione $\frac{\pi}{2}$ indica in pari tempo quante unità (eguali al raggio) contiene il quadrante, e quanti goniometri contiene l'angolo retto, e così di seguito per i multipli e sottomultipli di questo. La qual cosa più concisamente si suole esprimere dicendo che $\frac{\pi}{2}$ rappresenta sia il quadrante che l'angolo retto, che $\frac{\pi}{4}$ rappresenta sia l'ottante che l'angolo semiretto, e così di seguito.

---

[1] Contro l'impiego di questo vocabolo taluni potrebbero obbiettare che esso si impiega di già per designare lo strumento geodetico che serve a prendere la misura degli angoli. A costoro risponderei contentandomi di citare l'esempio del metro, col quale vocabolo si designa sia l'unità di misura, come il regolo misuratore.

IL METODO DI EULERO

per risolvere l' equazione $ax+by=c$,

con le aggiunte dei Professori MORALE e CALVITTI

ANTONIO BINDONI (Reggio Emilia)

TEOREMA. — Data l' equazione

$$r_1 x_1 + r_0 x_2 = c,$$

se le successioni di numeri

$$r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

$$q_2, q_3, \ldots, q_{n+1}, \ldots$$

son tali che

$$r_s = r_{s+1}\, q_{s+2} + r_{s+2}$$

$$(s = 0, 1, 2, \ldots, n-2),$$

allora mediante le formole ricorrenti

$$x_n' = 1 \ , \ x'_{n+1} = 0,$$

$$x'_s = - q_{s+1}\, x'_{s+1} + x'_{s+2}$$

si ottengono due numeri x'_1, x'_2, che costituiscono una soluzione per l' equazione

$$r_1 x_1 + r_0 x_2 = r_n.$$

E perciò, se r_n è divisore di c,

$$x''_1 = x'_1 (c : r_n) \ , \ x''_2 = x'_2 (c : r_n)$$

costituiscono una soluzione per la data equazione $r_1 x_1 + r_0 x_2 = c$.

[E infatti: consideriamo la successione di equazioni:

$$r_1\, x_1 + r_0\, x_2 = r_n$$

$$r_2\, x_2 + r_1\, x_3 = r_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_s\, x_s + r_{s-1}\, x_{s+1} = r_n$$

$$r_{s+1}\, x_{s+1} + r_s\, x_{s+2} = r_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_n\, x_n + r_{n-1}\, x_{n+1} = r_n .$$

Anzitutto è ovvio che $x'_n = 1$, $x'_{n+1} = 0$ è una soluzione dell' ultima equazione. Basterà per ciò dimostrare che se x'_{s+1}, x'_{s+2} è una soluzione della equazione $r_{s+1}\, x_{s+1} + r_s\, x_{s+2} = r_n$, allora $x_s' = -\, q_{s+1}\, x'_{s+1} + x'_{s+2}$ ed x'_{s+1} è una soluzione della equazione $r_s\, x_s + r_{s+1}\, x_{s+1} = r_n$.

E invero $r_s\, x_s' + r_{s+1}\, x'_{s+1} = r_s\,(-\, q_{s+1}\, x'_{s+1} + x'_{s+2}) + {} + (r_s\, q_{s+1} + r_{s+1})\, x'_{s+1} = -\, r_s\, q_{s+1}\, x'_{s+1} + r_s\, q_{s+1}\, x'_{s+1} + {} + r_{s+1}\, x'_{s+1} + r_s\, x'_{s+2} = r_n$.

Corollario. — Se a, b sono primi fra loro, l' equazione $a\,x + {} + b\,y = c$ ha infinite soluzioni.

[In fatti: se applichiamo ai numeri b, a il procedimento euclideo, che simbolizziamo nel seguente quadro:

	q_2	q_3	q_4		q_{s+1}	q_{s+2}		q_u	
b	a	r_2	r_3		r_s	r_{s+1}		r_{u+1}	r_n
r_2	r_3	r_4			r_{s+2}	r_{s+3}		r_{u+1}	

e poniamo $b = r_0$, $a = r_1$ si ha identicamente : $r_s = r_{s+1}\, q_{s+2} + {} + r_{s+2}\, (s = 0, 1, \ldots, n-2)$.

D' altra parte nella successione dei resti esiste certamente un resto r_n divisore di c, perchè essendo a , b primi fra loro l' ultimo resto non nullo è 1.]

Osservazione. — Per eseguire agevolmente i calcoli indicati dalle formole ricorrenti è opportuno costruire il seguente quadro:

x'_1	x'_2	x'_3	x'_4		x'_{s-1}	x'_s	x'_{s+1}		$x'_n = 1$	$x_{n+1} =$
	$-q_2$	$-q_3$	$-q_4$			$-q_s$	$-q_{s+1}$		$-q_n$	
b	a	r_2	r_3			r_{s-1}	r_s		r_{n-1}	r_n
r_2	r_3	r_4				r_{s-2}	r_{s+3}			

e limitarlo al primo resto r_n divisore di c.

Allora la formola ricorrente dà luogo a questa regola:

uno dei numeri della riga superiore si ottiene moltiplicando il numero della stessa riga, che lo segue verso destra, per il numero che gli sta sotto, e aggiungendo al prodotto il numero della riga superiore che segue il secondo considerato. Così per es. si ottiene

$$x'_{s-1} = -q_s x'_s + x'_{s+1},$$

che è la formola ricorrente suddetta.

Questa disposizione dei calcoli e la conseguente regola sono dovute al Prof. CALVITTI (Cfr. il Supplemento al *Periodico di Matematica* del 1905). La limitazione dei calcoli ad un resto divisore del termine noto è dovuta al Prof. M. MORALE (Cfr. il *Periodico di Matematica* del 1909).

Entrambi pervennero ai rispettivi risultati con metodi diversi, e diversi dal suesposto.

Sulle definizioni per astrazione e mediante classi

ANTONIO BINDONI (Reggio Emilia)

Le definizioni per astrazione trovano la loro giustificazione nel seguente principio di logica:

« Se qualunque sieno gli elementi $x, y, z, \ldots.$ di una classe

« u, la relazione α tra gli u è tale che

$$x \alpha x,$$

$$\text{da } x \alpha z \text{ e } y \alpha z \text{ segue } x \alpha y,$$

« allora esiste *una sola* classe v e una sola funzione f tali che:

« 1° qualunque sia l'elemento x di u, fx è un elemento « di v;

« 2° qualunque sia l'elemento h di v, esiste almeno un ele- « mento x di u tale che $h = fx$;

« 3° se x ed y sono elementi di u, allora $fx = fy$ sola- « mente quando x è nella relazione α con y, cioè è vero che « $x \alpha y$ » [1] (A).

Per es. se u è la classe di tutte le coppie di punti, ed essendo A, B, C, D punti, la relazione α tra le coppie $(A; B)$, $(C; D)$ è la seguente:

punto medio tra A e D = punto medio tra B e C,

la funzione f è la parola *Vettore*, e la classe v è l'insieme di tutti i vettori, cioè l'insieme di tutti gli elementi del tipo:

$$\text{Vettore } (A; B)$$

od anche, più brevemente come si usa e come giova, $B - A$.

La classe v è rappresentata dal nome comune *vettore*.

E si dice che gli elementi della classe v (o la v stessa) sono definiti *per astrazione*.

***

D' altra parte:

Se qualunque sieno gli elementi $x, y, z, \ldots$ di una classe u, la relazione α tra gli u è tale che

$$x \alpha x,$$

$$\text{da } x \alpha z \text{ e } y \alpha z \text{ segue } x \alpha y \text{ e poniamo:}$$

$$v = h \ni \{ \exists\, u \cap x \ni [h = u \cap y \ni (y \alpha x)] \}$$

---

[1] Questo principio è tolto dagli *Elementi di calcolo vettoriale* dei professori Burali-Forti e Marcolongo. Ed. Zanichelli, Bologna.

(cioè: v è la classe i cui elementi h sono tutte le sottoclassi di u tali che, ciascuna è fatta con tutti gli elementi di u che sono nella relazione α con un elemento x di u), allora si dice che gli elementi h di v (o la v stessa) sono definiti nominalmente *mediante classi.*

Esempio. — Sia u la classe di tutte le coppie che hanno per antecedente un N_0 e per conseguente un N_1. La relazione:

« i prodotti dell' antecedente di una coppia per il conseguente dell' altra sono eguali » intercedente fra due coppie è del tipo suaccennato. Dopo ciò:

Se a è un N_0 e b è un N_1, allora: a/b significa: classe di tutte le coppie di numeri $(x ; y)$ tali che $ay = bx$.

In simboli:

$$a \varepsilon N_0 \cdot b \varepsilon N_1 \supset \cdot a/b = (x ; y) \ni (x \varepsilon N_0 \cdot y \varepsilon N_1 \cdot a y = b x).$$

E poi:

$$R = z \ni [\exists (a ; b) \ni (a \varepsilon N_0 \cdot b \varepsilon N_1 \cdot z = a/b].$$

***

Ciò posto dimostriamo il seguente teorema:

Data una classe u e per i suoi elementi $x, y, z, \ldots$ una relazione α tale che

$$x \alpha x$$

$$\text{da } x \alpha z \text{ e } y \alpha z \text{ segue } x \alpha y,$$

allora le classi v, v_1 definite mediante u ed α, la prima per astrazione e la seconda mediante definizione nominale con classi, sono identiche.

E infatti se x è un u usiamo h_x per indicare la classe di tutti gli elementi y di u che stanno con x nella relazione α, cioè poniamo $h_x = u \cap y \ni (y \alpha x)$, allora v_1, è la classe i cui elementi sono del tipo h_x. Esisterà per ciò una corrispondenza univoca tra la classe u e la classe v_1 (non però simile) che indicheremo con f_α; così che è $h_x = f_\alpha x$. Ciò posto:

1° qualunque sia l' elemento x di u, $f_\alpha x$ è un elemento di v_1 [ciò deriva immediatamente].

2° qualunque sia l' elemento h di v_1 esiste almeno un elemento x di u tale che $h_x = f_\alpha x$ [come sopra].

3° se x ed y sono elementi di u, allora $f_\alpha x = f_\alpha y$ solamente quando x è nella relazione α con y, cioè è vero che $x \alpha y$.

[Sia $x \alpha y$, dico che $f_\alpha x = f_\alpha y$; e viceversa.

E invero se $x \alpha y$ à anche $y \alpha x$, e d' altra parte se z è un $f_\alpha x$ è $z \alpha x$, e allora è $z \alpha x$ e $y \alpha x$ e quindi $z \alpha y$ e infine z è un $f_\alpha y$. Analogamente si prova che se z è un $f_\alpha y$ è anche z un $f_\alpha x$; e quindi $f_\alpha x = f_\alpha y$.

Viceversa se $f_\alpha x = f_\alpha y$ vi sarà un z che è al tempo stesso un $f_\alpha x$ ed un $f_\alpha y$, e quindi è al tempo stesso $z \alpha x$, $z \alpha y$ e quindi (per la proprietà simmetrica che spetta ad α, in quanto è conseguenza delle attribuitegli proprietà) $x \alpha z$, $y \alpha z$ e per ciò $x \alpha z$].

Allora f_α e v_1 hanno tutte le proprietà della funzione f e della classe v la cui esistenza dipende dal principio (A), e poichè in forza dello stesso principio f è unica e così pure v, si trae che f_α coincide con f e v_1 con v, e quindi gli elementi di v e di v_1 sono gli stessi.

Rapporti, proporzioni e misura delle grandezze

AGOSTINO ARISTA (Girgenti)

INTRODUZIONE

1. Il Cipolla ([1]) chiama *segmento numerico*, o semplicemente *segmento*, una classe u di R vincolati dalle quattro condizioni seguenti:

1°) u contiene lo zero (origine del segmento);

([1]) « I numeri razionali ». *Periodico di Matematica*, anno XXV, fasc. 3°, 1909.

2°) u non contiene tutti i R;

3°) se r è un R, diverso da zero, appartenente ad u, qualunque R minore di r appartiene ad u;

4°) se r è un R. diverso da zero, appartenente ad u, esiste in u un R maggiore di r.

Chiama *segmento razionale* un segmento u quando è nullo, o quando esiste un R (estremo del segmento) r fuori di u, e tale che qualunque R minore di r appartenga ad u; e, dopo aver dimostrato che non tutti i segmenti sono razionali, chiama *irrazionale* un segmento non razionale.

2. Nella presente nota applicheremo la teoria dei segmenti numerici ai rapporti, alle proporzioni e alla misura delle grandezze, premettendo alcune definizioni e proprietà delle quali ci avvarremo per le nostre dimostrazioni.

Poichè l'isomorfismo delle due classi dei segmenti numerici razionali e dei loro estremi si può tradurre simbolicamente in una identità, converremo di rappresentare con 1 il segmento unità, e indicheremo costantemente i segmenti razionali per mezzo dei loro estremi.

§ I.

3. *a*) Due segmenti u, v si dicono *uguali* se ogni R di u appartiene a v, e viceversa.

b) Si dice invece che u è *maggiore* di v, se u contiene v e qualche altro R che non appartiene a v (2).

c) Chiamasi *somma* di due segmenti u, v la classe dei numeri che si ottengono sommando un R qualunque di u con un R qualunque di v.

d) Dati due segmenti u, v, se esiste un segmento w tale che $v + w = u$, si dirà w *differenza* tra u e v.

e) Chiamasi *prodotto* di due segmenti u, v la classe dei numeri che si ottengono moltiplicando un R qualunque di u con un R qualunque di v.

---

(2) Il prof. V. Amato ha fatto notare che in tal caso si hanno quanti R si vogliono appartenenti ad u e non a v. *Bollettino di Matematica*, anno IX, n. 8, 9, 10.

f) Dati due segmenti u, v, se esiste un segmento w tale che $v \cdot w = u$, si dirà w quoto di u per v.

4. *a*) Dati due segmenti u, v avviene sempre una, e soltanto una, delle relazioni

$$u > v, \; u = v, \; u < v;$$

ciascuna delle quali sodisfa alle note proprietà formali.

b) Se un segmento u è maggiore di un segmento razionale, l'estremo r di questo è un numero di u, e reciprocamente.

c) Se un segmento razionale è maggiore o uguale a un segmento v non nullo, il suo estremo r non è in v, e reciprocamente.

d) Se un segmento u è maggiore di un segmento v, esiste un segmento razionale r tale che

$$u > r > v.$$

e) Sussistono le proprietà formali delle operazioni fondamentali.

§ II.

5. Una classe U si dice *classe omogenea* di grandezze, se

a) definito, o dato come primitivo, il concetto di uguaglianza fra due elementi di U, tale relazione sodisfi alle leggi formali;

b) stabilito il concetto di *somma* fra due U, tale somma sia un U determinato ed unico.

I segmenti, gli angoli, gli archi o i settori di uno stesso cerchio o di cerchi uguali, ecc., sono grandezze omogenee.

6. Una grandezza A si dice *nulla*, se qualunque sia la grandezza B ad essa omogenea, sia $A + B = B$. Si dice *non nulla*, se esiste almeno una grandezza B tale che $A + B$ sia diversa da B. Una grandezza nulla si indica con O.

7. Ammetteremo che nella classe U che si considera vi siano grandezze nulle e grandezze non nulle. Se delle due grandezze A, B una almeno non è nulla, non solo $A + B$ è un' U determinata ed unica, ma è inoltre *non nulla*.

8. Date due grandezze A, B, si dice che A è *maggiore* di B, se A è somma di B con una grandezza non nulla C.

9. Ammetteremo che in ciascuna classe omogenea considerata si possano dimostrare o verificare sperimentalmente le seguenti proprietà:

a) Comm + $\quad A + B = B + A$.

b) Assoc + $\quad A + B + C = A + (B + C)$.

c) Delle tre relazioni:

$$A > B,\ A = B,\ A < B,$$

una, ed una sola, ha sempre luogo.

Si potranno allora dedurre queste altre:

a) Se $A = B$ è $A + C = B + C$, $C + A = C + B$.

b) Se $A = B$, $C = D$ è $A + C = B + D$.

c) Se $A > B$, $B \geqq C$; oppure $A \geqq B$, $B > C$ è $A > B$.

d) Se $A > B$ è $A + C > B + C$.

e) Se $A \geqq B$, $C > D$ è $A + C > B + D$.

f) Se $A + C = B + C$ è $A = B$.

g) Se $A + C > B + C$ è $A > B$.

h) Tutte le grandezze nulle di U sono uguali.

i) $A + o = A$, $o + A = A$, $o < A$.

j) La somma di due grandezze nulle è nulla, e viceversa.

k) Se $A \geqq B$, unica è la grandezza C tale che $B + C = A$.

11. Se $A \geqq B$, si chiama *differenza* fra A e B quella grandezza C, determinata ed unica, tale che $B + C = A$. Se ne deducono le seguenti proprietà:

a) $A + (B - C) = A + B - C$.

b) $A - (B + C) = A - B - C$.

c) $A - (B - C) = A + C - B$.

d) Se $A = B$, $C = D$, $A \geqq C$ è $A - C = B - D$.

e) Se $A > B \geqq C$ è $A - C > B - C$.

f) Se $A < B \leqq C$ è $C - A > C - B$.

g) Se $A > B$, $C < D$, $B \geqq D$ è $A - C > B - D$.

h) Se $A - C > B - C$ è $A > B$.

i) Se $C - A > C - B$ è $A < B$.

12. Se A è una grandezza, m un No, si pone:

$$A \cdot o = o,\ A(m+1) = Am + A,\ Am = mA;$$

e si deducono le proprietà seguenti:

a) $A \cdot 1 = A$, $A \cdot 2 = A + A, \cdots$, $Am = \underset{1}{A} + \underset{2}{A} + \cdots + \underset{m}{A}$.

b) Se A è nulla, $A \cdot m = o$.

13. Se m, n sono No si ha:

a) $(m+n)A = mA + nA$.

b) $m(nA) = m \cdot nA$.

c) Supposta A non nulla,

se $m > n$ è $mA > nA$, e reciprocamente;

se $m = n$ è $mA = nA$, è reciprocamente.

d) Se $m \geqq n$, si ha: $(m-n)A = mA - nA$.

e) Se $A = B$, si ha: $mA = mB$.

f) $mA + mB = m(A+B)$.

14. Se m è un N_1, si deducono queste altre proprietà:

a) Se $A > B$ è $mA > mB$, e reciprocamente.

b) Se $mA = mB$ è $A = B$.

15. *Postulato di Archimede.* — Ammetteremo che se A e B sono due grandezze omogenee, esiste sempre un N_1 m così grande che sia: $mA > B$.

16. La grandezza $B = mA$ si dice *multipla* di A secondo m, ed A *summultipla* di B secondo m.

Scriveremo anche:

$$A = \frac{B}{m} = \frac{1}{m} B.$$

Per indicare che A è multipla secondo n della summultipla secondo m di B, scriveremo:

$$A = n \frac{B}{m} = \frac{n}{m} B.$$

Per $m = n$, si deduce: $A = B$.

Si deducono infine queste altre proprietà:

a) Supposto che m sia un N_1,

se $A = B$, si deduce: $\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$, e reciprocamente;

se $A > B$, si deduce: $\frac{A}{m} > \frac{B}{m}$, e reciprocamente.

b) Se $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ sono due R,

se $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$, si deduce: $\frac{p}{q} A < \frac{p'}{q'} A$, e reciprocamente;

se $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, si deduce: $\frac{p}{q} A = \frac{p'}{q'} A$, e reciprocamente;

se $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$, si deduce: $\frac{p}{q} A > \frac{p'}{q'} A$, e reciprocamente.

c) Se $\frac{p}{m}$, $\frac{q}{n}$ sono due R:

$$\frac{p}{m} A + \frac{q}{n} A = \left(\frac{p}{m} + \frac{q}{n}\right) A.$$

d) Se $\frac{p}{m}$, $\frac{p}{n}$ sono due R ed A, A', B sono grandezze omogenee tali che $A = \frac{p}{m} A'$, $A' = \frac{q}{n} B$, si deduce:

$$A = \left(\frac{p}{m} \cdot \frac{q}{n}\right) B.$$

17. Se A, B sono grandezze omogenee, e non sia A multipla di B, esiste un N_0 m tale che:

$$(m + 1) B > A > mB.$$

18. *Postulato.* — Data una semiretta a di origine A, supponiamo in essa l'esistenza di un gruppo di punti (H) vincolati dalle seguenti condizioni:

1°) A è un punto del gruppo;

2°) esistono punti della semiretta che non precedono nessun punto del gruppo;

3°) se H' è un punto del gruppo, diverso da A, esiste nel gruppo almeno un punto che segue H'.

Allora sulla semiretta a esiste un punto X, che non precede nessun punto del gruppo, e tale che se K è un punto qualunque di a che precede X, il segmento KX contiene sempre almeno un punto del gruppo (H).

A K H' X a

Corollario. — Esiste un solo punto X.

§ III.

19. Date due grandezze omogenee A, B, supponiamo che esse ammettano una multipla comune; cioè che esistano due N_0 p; q, tali che sia:

$$qA = pB \tag{1}$$

Per ogni coppia di N_0 (m, n):

$$\text{se } nA > mB, \text{ sarà } \frac{p}{q} > \frac{m}{n};$$

$$\text{se } nA = mB, \text{ sarà } \frac{p}{q} = \frac{m}{n};$$

$$\text{se } nA < mB, \text{ sarà } \frac{p}{q} < \frac{m}{n}.$$

Infatti, se $nA > mB$, avremo anche:

(14, a) $$pnA > pmB;$$

e dalla (1):

(13, e) $$mqA = mpB.$$

Quindi:

(10, c) $$pnA > mqA,$$

(13, c) $$pn > mq$$

$$\frac{p}{q} > \frac{m}{n}.$$

Analoghe dimostrazioni per gli altri casi.

20. Per la seconda legge delle inverse, deduciamo che per ogni coppia di N_0 (m, n):

$$\text{se } \frac{p}{q} > \frac{m}{n}, \text{ sarà } nA > mB;$$

$$\text{se } \frac{p}{q} = \frac{m}{n}, \text{ sarà } nA = mB;$$

$$\text{se } \frac{p}{q} < \frac{m}{n}, \text{ sarà } nA < mB.$$

21. Dal Postulato di Archimede segue che esistono infinite coppie di N_0 (m, n) per le quali:

$$nA > mB. \qquad (2)$$

Ogni R della classe u dei R $\frac{m}{n}$ che sodisfano la (2) è minore di $\frac{p}{q}$ (19); e, reciprocamente, ogni R $\frac{m}{n}$ minore di $\frac{p}{q}$ appartiene ad u (20).

22. Dimostreremo in primo luogo che la classe u è un *segmento numerico*.

1°) La classe u contiene lo zero.

Essendo $o \cdot B = o$ (o grandezza nulla) se ne deduce:

(10, i) $$nA > o \cdot B$$

e quindi o appartiene ad u.

2°) La classe u non contiene tutti i R.

Esiste infatti $\frac{p}{q}$ che non appartiene ad u.

3°) Se $\frac{r}{s}$ è un R, diverso da zero, appartenente ad u, qualunque R $\frac{k}{h} < \frac{r}{s}$ appartiene ad u.

Infatti, se $\frac{r}{s}$, diverso da zero, appartiene ad u, si deduce:

$$sA > rB,$$

e quindi:

(14, a) $$ksA > krB.$$

Ma, per Hp, $\frac{k}{h} < \frac{r}{s}$, cioè $hr > ks$, e per conseguenza:

(13, c) $$hrA > ksA,$$

(10, c) $$hrA > krB,$$

(16, a) $$hA > kB.$$

Dunque, per Df, $\frac{k}{h}$ appartiene ad u.

4°) Se $\frac{r}{s}$ è un R, diverso da zero, appartenente ad u, esiste in u un R maggiore di $\frac{r}{s}$.

Poichè (21) $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$, consideriamo il R

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{s} + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right) = \frac{rq + ps}{2\,sq} > \frac{r}{s}.$$

Dimostreremo che $\frac{x}{y}$ appartiene ad u.

Infatti, dalla (1) deduciamo:

(13, e) $$sq\,A = sp\,B, \tag{3}$$

e dall' Hp che $\frac{r}{s}$, diverso da zero, appartiene ad u:

$$s\,A > rB,$$

e quindi:

(14, a) $$qs\,A > qr\,B \tag{4}$$

Dalle (3) e (4) deduciamo ancora:

(10, e) $$2\,sq\,A > qr\,B + ps\,B,$$

(13, a) $$qr\,B + sp\,B = (qr + sp)\,B,$$

(10, c) $$2\,sq\,A > (qr + ps)\,B.$$

Dunque $\frac{x}{y}$ appartiene ad u.

23. Dimostreremo in secondo luogo che u è razionale ed ha per estremo $\frac{p}{q}$.

Infatti $\frac{p}{q}$ non appartiene ad u (21) ed ogni R minore di $\frac{p}{q}$ è contenuto in u.

§ IV.

24. Siano A, B due grandezze omogenee che non ammettano una multipla comune (incommensurabili). Dal postulato di Archimede segue che esistono infinite coppie di N_0 (m, n) per le quali:

$$nA > mB \tag{1}$$

Dimostreremo che la classe u dei $R\ \frac{m}{n}$ che ne deriva, è un *segmento numerico irrazionale.*

25. Proveremo in primo luogo che la classe u è un *segmento numerico.*

1°) La classe u contiene lo zero.

Dimostrazione come al n. 22.

2°) La classe u non contiene tutti i R.

Infatti, dal Postulato di Archimede si deduce che esistono infinite coppie di N_0 (a, b) per le quali:

$$bA < aB,$$

e quindi tutti i $R\ \frac{a}{b}$ che ne derivano non appartengono alla classe u.

3°) Se $\frac{r}{s}$ è un R, diverso da zero, appartenente ad u, qualunque $R\ \frac{k}{h} < \frac{r}{s}$ appartiene ad u.

Dimostrazione come al n. 22.

4°) Se $\frac{r}{s}$ è un R, diverso da zero, appartenente ad u, esiste in u un R maggiore di $\frac{r}{s}$.

Poichè, per Hp, $\frac{r}{s}$ appartiene ad u, deduciamo:

$$sA > rB,$$

e quindi:

$$(16,\ a) \qquad A > \frac{r}{s} B.$$

Poniamo:

$$A - \frac{r}{s} B = C. \tag{2}$$

Dal Postulato di Archimede si deduce che esiste un N_1 b tale che $bC > B$, quindi:

$$(16,\ a) \qquad C > \frac{B}{b}; \tag{3}$$

e dalle (2) e (3) risulta:

$$(10,\ c) \qquad A - \frac{r}{s} B > \frac{B}{b}. \qquad (4)$$

Dall' aver supposto A e B incommensurabili, deduciamo l'esistenza di un N_0 a, tale che

$$(17) \qquad (a+1)\ B > bA > aB; \qquad (5)$$

quindi:

$$(16,\ a) \qquad \frac{a+1}{b} B > A > \frac{a}{b} B,$$

$$(11,\ e) \qquad \frac{a+1}{b} B - \frac{a}{b} B > A - \frac{a}{b} B,$$

$$(13,\ d) \qquad \frac{a+1}{b} B - \frac{a}{b} B = \frac{B}{b},$$

$$(10,\ c) \qquad \frac{B}{b} > A - \frac{a}{b} B. \qquad (6)$$

Infine, dalle (4) e (6) deduciamo ancora:

$$A - \frac{r}{s} B > A - \frac{a}{b} B;$$

quindi:

$$(11,\ i) \qquad \frac{r}{s} B < \frac{a}{b} B,$$

$$(16,\ b) \qquad \frac{r}{s} < \frac{a}{b}.$$

Dunque il R $\frac{a}{b}$, che appartiene ad u, come risulta dalla (5), è maggiore di $\frac{r}{s}$.

26. Proveremo in secondo luogo che il *segmento numerico* u è *irrazionale*; cioè che non esiste alcun razionale, $\frac{p}{q}$, fuori di u tale che ogni R minore di $\frac{p}{q}$ appartenga ad u.

Essendo $\frac{p}{q}$ fuori di u ed A e B incommensurabili, segue:

$$qA < pB;$$

quindi:

$$(16, a) \qquad A < \frac{p}{q} B.$$

Supposto $\frac{p}{q} B - A = C$, sia $\frac{r}{s}$ un R minore di $\frac{p}{q}$, tale (1) che

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right) B < C;$$

deduciamo:

$$(10, c) \qquad \frac{p}{q} B - \frac{r}{s} B < \frac{p}{q} B - A,$$

$$(11, i) \qquad \frac{r}{s} B > A,$$

$$(14, a) \qquad sA < rB;$$

cioè $\frac{r}{s}$ è fuori di u.

§ V.

27. Dai §§ III e IV risulta che ad ogni *coppia di grandezze omogenee commensurabili* corrisponde *un segmento numerico razionale* e ad ogni *coppia di grandezze omogenee incommensurabili un segmento numerico irrazionale*. In ogni caso, dunque, ad *una coppia di grandezze omogenee* corrisponde un *segmento numerico*, che diremo *rapporto* della coppia. Per indicare che alla coppia di grandezze omegenee (A, B) corrisponde il segmento numerico u, scriveremo:

$$A : B = u,$$

---

(1) Sia x un N_0 tale che $B < xC$, $\frac{1}{x} < \frac{p}{q}$. Basterà prendere; $\frac{r}{s} = \frac{p}{q} - \frac{1}{x}$, poichè allora $\frac{1}{x} B < C$, dove $\frac{1}{x} = \frac{p}{q} - \frac{r}{s}$.

oppure:

$$\frac{A}{B}=u.$$

Nel caso che u sia *razionale* e $\frac{p}{q}$ sia il suo estremo, scriveremo anche:

$$A:B=\frac{p}{q}\ ,\ \frac{A}{B}=\frac{p}{q}.$$

28. Date in un certo ordine quattro grandezze, di cui la prima e la terza siano rispettivamente omogenee alla seconda e alla quarta, si dice che esse sono in proporzione, o che le due coppie date sono proporzionali, quando ad esse coppie corrisponda lo stesso *segmento numerico*; cioè, quando le due coppie hanno il medesimo *rapporto*.

Per indicare che due coppie (A, B), (C, D) sono in proporzione, scriveremo dunque:

$$A:B=C:D.$$

E dalla Df precedente risulta che se $A:B=u$, anche $C:D=u$.

29. Poichè per i segmenti numerici sono valide le leggi dell'uguaglianza, dette leggi restano estese ai rapporti:

a) Legge riflessiva: $A:B=A:B$.
b) Legge simmetrica: se $A:B=C:D$, anche $C:D=A:B$.
c) Legge transitiva: se $A:B=C:D$, $C:D=E:F$, anche

$$A:B=E:F.$$

30. *Criterio per riconoscere la proporzionalità di quattro grandezze.* — Condizione necessaria e sufficiente affinchè due coppie di grandezze omogenee (A, B), (C, D) siano proporzionali. Per ogni coppia (m, n) di N_0, convenientemente scelti ad $nA>mB$ $(nA=mB)$ corrisponda $nC>mD$ $(nC=mD)$, e reciprocamente.

La dimostrazione risulta dalla Df precedente (28) e dalla Df di uguaglianza dei segmenti numerici (3, *a*).

31 Corollario 1° — Se $A:B=C:D$, per ogni coppia di N_0 (m, n) convenientemente scelti, ad $nA<mB$ corrisponde $nC<mD$, e reciprocamente.

Infatti, se $nA < mB$, non può aversi nè $nC > mD$, nè $nC = mD$; altrimenti dalla proporzionalità delle quattro grandezze A, B, C, D, deriverebbe (30) $nA > mB$, oppure $nA = mB$, contro l' *Hp*.

In modo analogo si dimostra la reciproca.

32. Corollario 2° — Se $A : B = C : D$, per ogni coppia (m, n) di N_0, deve essere

$$mC > nD \text{ se } mA > nB,$$
$$mC = nD \text{ se } mA = nB,$$
$$mC < nD \text{ se } mA < nB;$$

e reciprocamente.

33. Corollario 3° — Se $A : B = C : D$, se A e B sono commensurabili (incommensurabili) anche C e D sono commensurabili (incommensurabili).

34. Il corollario 2° comprende la nota *Df* delle coppie di grandezze proporzionali. Si può quindi continuare lo studio delle proporzioni come suol farsi ordinariamente. Così per $m = n = 1$, si deduce che $C >, =, < D$ se rispettivamente $A >, =, < B$.

§ VI.

35. Se (A, B) è una coppia di grandezze omogenee, u è il loro rapporto, ed $\frac{m}{n}$ un R appartenente ad u, si ha:

$$(21, 24) \qquad nA > mB;$$

se invece $\frac{m}{n}$ è fuori di u, si ha:

$$nA \leqq mB.$$

Quindi (4 ; b, c)

$$u > \frac{m}{n} \quad \text{se} \quad nA > mB,$$

$$u < \frac{m}{n} \quad \text{se} \quad nA < mB,$$

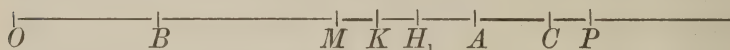
$$u = \frac{m}{n} \quad \text{se} \quad nA = mB.$$

35. Data una grandezza B ed un numero reale (*segmento numerico*) u, esiste una grandezza A, ed una sola, che ammette rispetto a B il rapporto u:

$$A = u\,B.$$

Riferiamoci, per semplicità, ai segmenti. Sia $O\,B$ il segmento dato, ed u (razionale) uguale a $\frac{p}{q}$. Per determinare un segmento $O\,A$ avente rispetto ad $O\,B$ il rapporto $\frac{p}{q}$, basta prendere il p^{mo} multiplo del q^{mo} summultiplo di $O\,B$. Nel caso di u reale, consideriamo una semiretta di origine O, e portiamo su di essa, a partire da O, tutti i segmenti $O\,H$ che hanno con $O\,B$ un rapporto R, con l' estremo h appartenente ad u; abbiamo così sulla semiretta un gruppo di punti (H) pei quali sono soddisfatte le condizioni del n. 18:

1) O appartiene ad (H) (n. 1).

O B M K H_1 A C P

2) Supposto il $R\,c$ fuori di u e $O\,C = c\,O\,B$, se ne deduce che il punto C non appartiene al gruppo (H). Ogni altro punto P della semiretta che segue C non può appartenere ad (H).

Infatti, se $O\,P = p\,O\,B$ (p è un R), da $O\,P > O\,C$, seguirebbe $p\,O\,B > c\,O\,B$, e quindi:

$$(16\,,b) \qquad\qquad p > c;$$

cioè P non appartiene ad (H).

3) Se H' appartiene ad (H) ed $OH' = r'\,OB$ (r' è un R) esisterà in u (n. 1) un $R\,r'' > r'$. Supposto $OH'' = r''\,OB$, da $r'' > r'$ deduciamo:

(16, b) $OH'' > OH'$, e quindi H'' segue H'.

Esiste dunque sulla semiretta un punto A, ed uno solo, che non precede nessun punto (H), e tale che se K è un punto qualunque della semiretta che precede A, il segmento KA contiene sempre almeno un punto del gruppo.

Si ha: $\dfrac{OA}{OB} = u.$

Infatti, se $\frac{m}{n}$ è un R che appartiene ad $\frac{OA}{OB}$, si deduce:

(35) $$nOA > mOB,$$

(16, *a*) $$OA > \frac{m}{n} OB.$$

Posto $\frac{m}{n} OB = OM$, preso un punto K nel segmento MA, esiste in KA un punto H_1 del gruppo (H). Se $hOB = OH_1$ (h è un R) da $OM < OH_1$, deduciamo:

$$\frac{m}{n} OB < hOB,$$

e quindi:

(16, *b*) $$\frac{m}{n} < h.$$

Da $\frac{m}{n} < h, h < u$, segue $\frac{m}{n} < u$, cioè $\frac{m}{n}$ appartiene ad u.

Reciprocamente, se $\frac{h}{n}$ è un R di u, si avrà $\frac{h}{n} OB = OH$; e quindi:

(35) $$hOB = nOH$$

Poichè $OA > OH$, deduciamo:

(14, *a*) $$nOA > nOH,$$

(10, *c*) $$nOA > hOB;$$

cioè $\frac{h}{n}$ è un R che appartiene ad $\frac{OA}{OB}$.

Con analogo procedimento si stabilisce la proposizione per gli angoli e per gli archi. Quanto ai poligoni e ai solidi dei poliedri..... [1]. Se B è l' unità di misura, u rappresenta la misura di A rispetto a B.

---

[1] Vedi *Elementi di Geometria* ENRIQUES ed AMALDI. 4ª edizione, pag. 340 e 588.

37. Conservando le notazioni del n. 36, supponiamo:

h, p razionali, u reale;
$hOB = OM, uOB = OA, pOB = OP$.

Se $h < u < p$, si avrà:

$$hOB < uOB < pOB.$$

Da $h < u$, risulta che M appartiene ad (H), quindi $OM < OA$, e

$$hOB < uOB.$$

Da $u < p$ risulta che p è fuori di u, e quindi P non appartiene ad (H). Poichè p è razionale, si deduce $OP > OA$, cioè:

$$uOB < pOB.$$

In generale, per una qualsiasi grandezza B, da h < u < p, *si deduce:*

$$hB < uB < pB.$$

38. Se u, u' sono numeri reali, e B è una grandezza, secondo che $u < u'$, $u = u'$, $u > u'$, sarà rispettivamente $uB < u'B$, $uB = u'B$, $uB > u'B$. E reciprocamente.

1°) Se $u < u'$ $(4, d)$ esiste un $R \frac{p}{q}$ tale che

$$u < \frac{p}{q} < u',$$

quindi:

$$(37) \qquad uB < \frac{p}{q} B < u'B,$$

$$(10, c) \qquad uB < u'B$$

2°) Se $u = u'$ $(3, a)$ ogni R di u appartiene ad u', e viceversa. Quindi ripetendo per u' le considerazioni del n. 36 si verrebbe ad individuare lo stesso gruppo di punti (H) e lo stesso punto A.

3°) Se $u > u'$, si deduce $uB > u'B$ (dimostrazione analoga a quella della prima parte).

Le reciproche sono vere per la seconda legge delle inverse.

39. *Lemma 1°.* — Se x, y, a, b sono numeri reali (segmenti numerici) ed $x + y > a + b$, $x < a$, $y < b$; esiste un $R\xi$ tale che $x + \xi > a$, $y - \xi > b$.

Infatti, posto $a - x = \alpha$, $y - b = \beta$, deduciamo:

$$\beta - \alpha = (y - b) - (a - x) = y - b - a + x = (x + y) - (a + b) > o.$$

Quindi $\beta > \alpha$, ed esiste un $R\ \xi$ tale che

$$(4, d) \qquad \alpha < \xi < \beta;$$

cioè:

$$a - x < \xi < y - b \ , \ a < x + \xi \ , \ b < y - \xi.$$

40. *Lemma 2°* — Se u, u' sono numeri reali (segmenti numerici) ed s è un R maggiore di $u + u'$, esistono sempre due $R\ h, h'$, tali che $s = h + h'$, $h > u$, $h' > u'$.

Infatti, supposto $s = k + k'$, e, ad es $k < u$, $k' > u'$, esiste almeno un $R\ \xi$ tale che

$$(39) \qquad k + \xi > u \ , \ k' - \xi > u;$$

ma

$$(k + \xi) + (k' - \xi) = k + k' = s,$$

quindi possiamo prendere:

$$h = k + \xi \ , \ h' = k' - \xi.$$

41. Se u, u' sono numeri reali (segmenti numerici) e B è una grandezza:

$$u\,B + u'\,B = (u + u')\,B.$$

Questo teorema, per $u, u'\ R$ si riduce a quello del n. 16, *c*. Posto $uB = A$, $u'\,B = A'$, basterà dimostrare che

$$\frac{A + A'}{B} = u + u';$$

ossia che ogni R di $u + u'$ appartiene ad $\frac{A + A'}{B}$, e reciprocamente

1) Supponiamo in primo luogo che il $R\ \frac{m}{n}$ appartenga ad $u + u'$. Esisteranno allora due $R\ \frac{h}{n}, \frac{h'}{n}$, tali che

$$\frac{m}{n} = \frac{h}{n} + \frac{h'}{n} \ , \ \frac{h}{n} < u, \frac{h'}{n} < u';$$

e quindi:

$$(35) \qquad nA > hB \ , \ nA' > h'B ,$$
$$(13, f) \qquad nA + nA' = n(A + A') ,$$
$$(13, a) \qquad hB + h'B = (h + h')B ,$$
$$(10, e) \qquad n(A + A') > (h + h')B .$$

Cioè $\frac{m}{n} = \frac{h + h'}{n}$ (35) appartiene ad $\frac{A + A'}{B}$.

2°) Supponiamo in secondo luogo che il R $\frac{m}{n}$ appartenga ad $\frac{A + A'}{B}$.

Se $\frac{m}{n}$ fosse fuori di $u + u'$ (nell'ipotesi che u, u' non siano entrambi razionali) si avrebbe:

$$(4, c) \qquad \frac{m}{n} > u + u' ,$$

ed esisterebbero due R $\frac{h}{n}, \frac{h'}{n}$ tali che

$$(40) \qquad \frac{m}{n} = \frac{h}{n} + \frac{h'}{n} \ , \ \frac{h}{n} > u \ , \ \frac{h'}{n} > u' ;$$

e si dedurrebbe:

$$(35) \qquad nA < hB \ , \ nA' < h'B ,$$
$$(13, f) \qquad nA + nA' = n(A + A') ,$$
$$(13, a) \qquad hB + h'B = (h + h')B ,$$
$$(10, e) \qquad n(A + A') < (h + h')B .$$

Cioè $\frac{h + h'}{n}$ fuori di $\frac{A + A'}{B}$, contro l' *Hp.*

Dunque ogni R di $\frac{A + A'}{B}$ appartiene ad $u + u'$, e reciprocamente; e per conseguenza: $\frac{A + A'}{B} = u + u'$.

42. *Lemma 1°* — Se x, y, a, b sono numeri reali (segmenti numerici) ed $xy > ab$, $x < a$, $y > b$; esiste un segmento razionale ξ tale che $x\xi > a$, $\frac{y}{\xi} > b$.

Infatti, posto $\frac{a}{x} = \alpha, \frac{y}{b} = \beta$, deduciamo:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{y}{b} : \frac{a}{x} = \frac{xy}{ab} > 1 .$$

Quindi $\beta > \alpha$, ed esiste un $R\xi$ tale che

$$(4, d) \qquad \alpha < \xi < \beta ;$$

cioè:

$$\frac{a}{x} < \xi < \frac{y}{b} ,$$

$$a < \xi x \ , \ b < \frac{y}{\xi} .$$

43. *Lemma 2°* — Se u, u' sono numeri reali (segmenti numerici) e p è un R maggiore di $u \cdot u'$, esistono due Rh, h', tali che

$$p = h \cdot h' \ , \ h > u \ , \ h' > u' .$$

Infatti, supposto $p = k \cdot k'$, e, ad es. $k < u, k' > u'$, esiste almeno un $R\xi$ tale che

$$(42) \qquad k\xi > u \ , \ \frac{k'}{\xi} > u' ,$$

ma

$$(k\xi)\frac{k'}{\xi} = kk' = p ,$$

quindi possiamo prendere:

$$h = k\xi \ , \ h' = \frac{k'}{\xi} .$$

44. Se u, u' sono numeri reali (segmenti numerici) ed $A' A', B$ grandezze omogenee tali che

$$A : A' = u \ , \ A' : B = u' ;$$

si deduce:

$$A : B = u \cdot u' .$$

Questo teorema, per $u, u' R$, si riduce a quello del n. 16, d.

1°) Supponiamo in primo luogo che il $R \frac{m}{n}$ appartenga ad

$u \cdot u'$. Esisteranno allora due $R\ \frac{h}{r}, \frac{h'}{r'}$ tali che

$$(3,e) \qquad \frac{m}{n} = \frac{h}{r} \cdot \frac{h'}{r'}\,,\ \frac{h}{r} < u\,,\ \frac{h'}{r'} < u'\,;$$

e quindi:

$$(35) \qquad rA > hA'\,,\ r'A' > h'B\,;$$

$$(14,a) \qquad rr'A > hr'A'\,,\ hr'A' > hh'B\,;$$

$$(10,c) \qquad rr'A > hh'B.$$

Cioè: $\frac{m}{n} = \frac{hh'}{rr'}$ appartiene ad $A : B$.

2°) Supponiamo in secondo luogo che il $R\ \frac{m}{n}$ appartenga ad $A : B$. Se $\frac{m}{n}$ fosse fuori di $u \cdot u'$ (nell'ipotesi che u, u' non siano entrambi R) si avrebbe:

$$(4,c) \qquad \frac{m}{n} > u \cdot u'\,,$$

ed esisterebbero due $R\ \frac{h}{r}, \frac{h'}{r'}$ tali che

$$(43) \qquad \frac{m}{n} = \frac{h}{r} \cdot \frac{h'}{r'}\,,\ \frac{h}{r} > u\,,\ \frac{h'}{r'} > u'\,;$$

e si dedurrebbe:

$$(35) \qquad rA < hA'\,,\ r'A' < h'B\,;$$

$$(14,a) \qquad rr'A < r'hA'\,,\ r'hA' < hh'B\,;$$

$$(10,c) \qquad rr'A < hh'B.$$

Cioè $\frac{m}{n} = \frac{hh'}{rr'}$ fuori di $A : B$, contro l' *Hp*.

Dunque ogni R di $A : B$ appartiene ad $u \cdot u'$, e reciprocamente; quindi

$$A : B = u \cdot u'.$$

45. Si può così continuare lo studio della teoria della misura, come suol farsi ordinariamente, e pervenire infine al teorema fondamentale:

Se quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione, le misure di A e B rispetto a una nuova grandezza M loro omogenea, e le misure di C e D rispetto a un' altra grandezza loro omogenea N formano un' altra proporzione; e reciprocamente.

Il teorema di Pitagora ed i suoi corollarî

estesi all'n—edro lineare di un S_{n-1}

ENRICO PICCIOLI (Cesena)

Supponiamo dato in uno spazio lineare con $n-1$ dimensioni, S_{n-1}, un n—edro $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ e supponiamo ancora che l' angoloide di vertice A_n sia rettangolo, cioè che gli iperpiani delle facce passanti per A_n siano due a due normali tra loro. Se indichiamo, in generale, con a_j la misura della faccia opposta al vertice A_j rispetto al cubo a $(n-2)$ dimensioni che ha per lato il segmento unitario, sussisterà il teorema seguente che è l' estensione di quello di *Pitagora* (*metrico*):

In un n — edro *rettangolo di* S_{n-1} *la somma dei quadrati delle misure delle facce uscenti dal vertice dell' angoloide rettangolo è uguale al quadrato della misura della faccia rimanente.*

Questo teorema, che è espresso simbolicamente dalla formula:

$$(1) \qquad a^2_1 + a^2_2 + \dots\dots + a^2_{n-1} = a^2_n ,$$

si può enunciare allo stesso modo dell' ordinario teorema metrico di *Pitagora* ove si continuino a chiamare *ipotenusa* la faccia opposta ad A_n e *cateti* quelle rimanenti.

La dimostrazione di questo teorema è semplicissima: basta

ricordare le *formule delle proiezioni* estese ad un n — edro *qualunque* $A_1 A_2 \ldots A_n$, che sono:

$$(2)\quad \begin{cases} a_1 = a_2 \cos(a_2 a_1) + a_3 \cos(a_3 a_1) + \ldots + a_n \cos(a_n a_1). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = a_{n-1} \cos(a_{n-1} a_n) + a_{n-2} \cos(a_{n-2} a_n + \ldots + a_1 \cos(a_1 a_n). \end{cases}$$

dove $(a_i a_h)$ rappresenta la misura del diedro contenuto dalle facce opposte ad $A_i A_h$.

Sommando queste relazioni membro a membro dopo averle moltiplicate ordinatamente per $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ e $-a_n$, si trova, a riduzioni fatte:

$$(3)\ a_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a^2_{n-1} - 2a_1 a_2 \cos(a_1 a_2) - 2a_1 a_3 \cos(a_1 a_3) \ldots$$

che esprime il teorema di *Carnot* e da cui si passa alla (1) supponendo che l' angoloide di vertice A_n sia rettangolo.

Passiamo a far vedere che sussiste un primo corollario del teorema di Pitagora esteso all' n — *edro* di S_{n-1} e che si enuncia così:

Il quadrato della misura di un cateto di un n — edro *rettangolo è uguale al prodotto della misura dell' ipotenusa per quella della proiezione del cateto sull' ipotenusa.*

Invero, calata da A_n la $A_n P_n$ perpendicolare sull' ipotenusa, applicando il teorema delle proiezioni all' n — edro $A_n P_n A_2 A_3 \ldots A_{n-1}$ prendendo come faccia di partenza la faccia $P_n A_2 A_3 \ldots A_{n-1}$ — la cui misura rispetto al cubo a $(n-2)$ dimensioni che ha per spigolo il segmento unitario diremo β_1 — avremo:

$$\beta_1 = a_1 \cos(a_1 a_n).$$

Ma il medesimo teorema applicato all' n — edro fondamentale dà:

$$a_n \cdot \cos(a_n a_1) = a_1$$

per cui, moltiplicando queste due ultime relazioni membro a membro, troveremo appunto:

$$(4)\qquad a_1^2 = a_n \cdot \beta_1 \cdot$$

che è quanto si voleva.

Per estendere il secondo corollario del teorema di Pitagora indichiamo, in generale, con β_r la misura dell' $(n-1)$ — edro $P A_1 A_2 \dots A_{r-1} A_{r+1} \dots A_{n-1}$. Il primo corollario ci dà:

$$a_r^2 = a_n \cdot \beta_r \qquad (r = 1, 2 \dots n-1)$$

e quindi:

$$a_n^{n-1} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \dots \beta_{n-1} = a_1^2 \cdot a_2^2 \dots a_{n-1}^2 . \tag{5}$$

Se chiamiamo s_i la misura di $A_n A_i$ rispetto allo spigolo del cubo di cui sopra, si avrà pure:

$$a_i = \frac{1}{n-2} s_1 \cdot s_2 \dots s_{i-1} \cdot s_{i+1} \dots s_{n-1},$$

da cui:

$$a_1^2 \cdot a_2^2 \dots a_{n-1}^2 = \frac{1}{(n-2)^{2(n-1)}} s_1^{2(n-2)} \cdot s_2^{2(n-2)} \dots s_{n-1}^{2(n-2)}$$

La (5) dà allora:

$$(n-2)^{2(n-1)} \cdot a_n^{n-1} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \dots \beta_{n-1} =$$

$$= s_1^{2(n-2)} \cdot s_2^{2(n-2)} \dots s_{n-1}^{2(n-2)} \tag{6}$$

Avendosi poi:

$$s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \dots s_{n-1} = a_n \cdot h$$

dove h rappresenta la misura di $A_n P_n$ nel solito sistema, seguirà da questa e dalla (6):

$$(n-2)^{2(n-1)} \cdot a_n^{n-1} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \dots \beta_{n-1} = a_n^{2(n-2)} \cdot h^{2(n-2)}$$

e da questa formula si passerà facilmente all' altra:

$$h = (n-2) \cdot \sqrt[n-2]{n-2} \cdot \sqrt[2(n-2)]{\frac{\beta_1 \cdot \beta_2 \dots \beta_{n-1}}{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1})^{n-3}}} \tag{7}$$

che è l' estensione della formula di geometria piana che si deduce dal teorema ben noto « l' altezza di un triangolo rettangolo è media proporzionale fra i segmenti in cui il suo piede divide l' ipotenusa ».

Sui nuovi programmi di Matematica nella scuola classica

AMERIGO BOTTARI (Spoleto)

Fu più volte, e a ragione, biasimata la facoltà di libera opzione tra il Greco e la Matematica nella seconda classe del liceo, facoltà concessa dal Regolamento Orlando del 1904: ora venne finalmente abolita, nonostante varie proteste studentesche più o meno clamorose. Ogni insegnante sa con quanto poca serietà di intendimenti in generale lo studente di liceo sceglieva l'una o l'altra delle due discipline, che venivano così a diminuire di importanza sin dal primo corso liceale.

Di guisa che, per la serietà degli studî, fu opera benefica questo ritorno all'antico: in tale ritorno furono modificati e orario e programmi, come era ben naturale. Tanto su quello che su questi c'è qualche cosa da osservare; sebbene nel complesso la distribuzione del programma tra il Ginnasio superiore e il Liceo appaia buona.

La riduzione del programma di Geometria nel Ginnasio superiore, permetterà all'insegnante di dedicare un po' di tempo a qualche applicazione, facendo risolvere interessanti problemi su luoghi geometrici, su costruzioni di triangoli, ecc.

La soppressione del calcolo letterale nella quinta classe va intesa, secondo me, nel senso che quel numero del programma era inutilmente menzionato, giacchè nello studio dell'Aritmetica razionale, dove generalmente i numeri si devono rappresentare con lettere, vengono necessariamente fatti esercizi di calcolo letterale, oltre che numerico: si ha così una utile preparazione all'Algebra.

Dal programma di Aritmetica razionale della quarta classe è esclusa affatto la trattazione dei numeri primi (di cui ci si dovrà invece occupare nel terzo corso liceale); quindi, non potendosi dare il criterio di divisibilità di un numero per un altro, non sarà possibile, nella classe successiva esprimere completamente la condizione di trasformabilità di una frazione ordinaria in decimale.

Ed ora qualche osservazione intorno al programma dei licei. Per quanto riguarda l'Algebra, sarebbe bene fosse fatta esplicita

menzione delle funzioni. Il concetto di funzione è troppo importante, perchè ogni insegnante non senta il bisogno di parlarne più presto che sia possibile, magari prima delle equazioni; definendo anzi, come si fa da molti, equazione come l'eguaglianza, che nasce ponendo che due funzioni della medesima variabile o delle medesime variabili assumano ugual valore.

Come esempi assai utili di funzioni sarebbe bene parlare della relazione di proporzionalità fra due quantità variabili, dicendo che cos' è il coefficiente di proporzionalità: si potrebbero citare così le funzioni seguenti:

$$y = kx,\ y = \frac{k}{x},\ y = kx^2,\ y = \frac{k}{x^2},\ y = \frac{k \cdot u \cdot z}{x}, \text{ ecc.}$$

assai importanti specialmente per la Fisica e per la Chimica: infatti quasi in ogni legge di queste scienze è espressa una qualche relazione di proporzionalità. Utile cosa sarebbe pure aggiungere un cenno alla rappresentazione grafica delle funzioni, rappresentazione di cui si fa largo uso, anche in altre scienze, oltre le due ora nominate. Però non sarà possibile dire di questa rappresentazione che nel secondo corso liceale, dopo lo studio dei numeri reali e quindi dopo la misura delle grandezze e in particolare dei segmenti.

Nel programma d'Algebra del primo corso vi è la teoria delle progressioni aritmetiche e geometriche: ma per quest' ultime non sarà possibile trattare l'argomento della inserzione di un certo numero di medî, giacchè lo studio dei numeri reali e quindi dei radicali si fa nel corso successivo.

Quindi lo studio delle progressioni geometriche si dovrebbe rimandare al secondo corso, oppure si dovrebbe limitarlo a poche nozioni ad es. alla formula del termine generale, alla somma dei termini di una progressione limitata; e ciò potrebbe anche bastare, riservandosi a completarne lo studio, se lo si crederà opportuno, nel seguito.

Secondo i vecchi programmi nel secondo corso del liceo si doveva trattare della operazione di estrazione di radice quadrata: ora questo argomento è stato abbandonato. Ora non dico che esso sia assai importante, ma non mi pare conveniente trascurarlo del tutto e siccome è di pertinenza all'Aritmetica io proporrei che

venisse trattato nella quinta classe ginnasiale, tanto più ora che fu allegerito il relativo programma di Geometria.

Il concetto di radice approssimata a meno di un'unità intera e di un' unità decimale e la spiegazione relativa della regola di estrazione di radice, non mi sembrano argomenti, purchè trattati in modo conveniente, molto più difficili di altri di Aritmetica razionale, per es. del calcolo del quoto approssimato in decimali. E come si dà la spiegazione delle regole pratiche delle quattro operazioni fondamentali dell' Aritmetica, a me parrebbe conveniente che si desse spiegazione anche di questa quinta operazione, la cui regola pratica si insegna nel Ginnasio inferiore.

Infine ancora un'osservazione sento di dover aggiungere intorno all'orario troppo esiguo di due ore settimanali di lezione assegnate nel terzo corso liceale per lo studio della Matematica.

È vero che il programma è alquanto ridotto da quello che era; ma pure si tratta di sviluppare la trigonometria rettilineà *ab initio*, la teoria della equazione esponenziale, dei logaritmi e quindi quei necessari complementi di Aritmetica razionale intorno ai numeri primi.

Ora io dubito assai che in un corso anche non molto numeroso un insegnante coscienzioso trovi il tempo a trattare, per quanto poco diffusamente, questi argomenti, a fare le necessarie interrogazioni e i più che necessari esercizi che nonostante l'inesistenza della prova scritta sono indispensabili, perchè il giovane ricavi profitto da questo studio. Io non voglio credere che nella mente di chi ha preparato questi programmi e il relativo orario vi fosse l'idea che l'insegnamento di questa scienza nel terzo corso liceale debba essere ridotto a poche elementari teorie senza applicazioni di sorta, non trattandosi di un'istituto tecnico. C'è pur troppo chi pensa che il non esservi la prova scritta, significhi che non si debbano fare esercizi, ma solo studiare delle dimostrazioni per poi ripeterle e che la Matematica nel liceo sia una materia molto secondaria. Io non chiederei aumento di programma, ma solo di aumentare di un'ora l'orario settimanale. In tal modo molto utilmente l'insegnante potrà dedicare del tempo alla risoluzione di facili problemi di applicazione dell'Algebra alla Geometria, di Trigonometria, impiegando il calcolo logaritmico che si impara a conoscere soltanto in questa classe, senza di che lo studio della Matematica nel liceo darà come risultato zero.

Bisogna ricordare che se è vero che la scuola classica deve avere un indirizzo letterario è pur vero che è scuola di cultura generale e anche di preparazione pur gli studi universitari: e non sono pochi i giovani che uscendo dal liceo desiderano andare nelle facoltà di scienze fisiche e matematiche: ora per queste facoltà occorre una buona base di studi di Matematica, occorre almeno che il giovane abbia pratica sul calcolo algebrico e acquisti un'idea di ciò che è la risoluzione di un problema.

E per raggiungere questa mèta non basta lo studio di teoremi e di teorie varie, ma occorre più di tutto darne l'illustrazione con numerose e opportune applicazioni.

PICCOLE NOTE

SULLA VERIFICA DELL'EGUAGLIANZA

$$\sqrt[3]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{n}}=p$$

con m, n, p reali, ed $n>o$.

La quistione è stata esaurientemente trattata dall'egregio collega G. Candido nel suo importante lavoro: « *La formola di Waring e sue notevoli applicazioni* », ma con procedimenti che molto si allontanano dagli elementi dell'algebra. Non è a mia conoscenza una risoluzione della quistione coi mezzi dell'algebra che si insegna nei Licei o nel primo biennio degli Istituti Tecnici. Ma nota, simile trattazione, o no, essa può benissimo prendere posto negli elementi dell'algebra, accanto alla trattazione dei radicali doppii della forma $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$, se non altro per gli esercizii a cui può dar luogo.

Ed ecco come la quistione può elementarmente essere risoluta.

1. Se un'equazione cubica (a coefficienti reali) ammette una radice reale α, ammette altre due radici, e non più. Infatti, se $f(x)=o$ è l'equazione cubica, sarà $f(x)$ divisibile per $x-\alpha$, e il quoziente $\varphi(x)$ è

di secondo grado in x. Così l'equazione si scinde in $x - \alpha = o$, e $\varphi(x) = o$, si sa che $\varphi(x) = o$ ammette due radici.

L'equazione poi non ammette altre radici, perchè si dimostra negli elementi d'algebra che un polinomio intero in $x, f(x)$, di grado n, non può annullarsi, senza essere identicamente nullo, per più di n valori di x.

2. Se un'equazione di 3' grado (a coefficienti reali), $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = o$ ammette la radice complessa $x = \alpha + \beta i$, ammette pure la sua coniugata $\alpha - \beta i$.

Infatti, posto, in $f(x)$, $x = \alpha + \beta i$, sviluppando e riducendo si ha:

$$(a\alpha^3 - 3a\alpha\beta^2 + b\alpha^2 - b\beta^2 + c\alpha + d) + (-a\beta^3 + 3a\alpha^2\beta + 2b\alpha\beta + c\beta)\,i. \quad (1)$$

Per sapere che cosa diventa $f(x)$ quando in esso si sostituisca $x = \alpha - \beta i$, basterà in (1) mutare i in $-i$, e si ha:

$$(a\alpha^3 - 3a\alpha\beta^2 + b\alpha^2 - b\beta^2 + c\alpha + d) + (-a\beta^3 + 3a\alpha^2\beta + 2b\alpha\beta + c\beta)\,i. \quad (2)$$

Ora per ipotesi il numero complesso (1) è nullo, e quindi nulli sono la sua parte reale e il coefficiente di i. Ma allora nullo risulta pure il numero complesso (2), cioè $x = \alpha - \beta i$ è soluzione di $f(x) = o$.

Segue: Se un'equazione cubica ammette tre radici, almeno una di esse è reale.

3. Se l'equazione cubica $x^3 - 3ax + b = o$ (a e b numeri reali) ammette la radice reale α, e se $3\alpha^2 > 4a$, le altre due radici (P 1) saranno complesse coniugate (P 2).

Infatti, dividendo il primo membro per $x - \alpha$, si ha il quoziente $x^2 + \alpha x + (\alpha^2 - 3a)$. Le altre due radici saranno date perciò da

$$y^2 + \alpha x + (\alpha^2 - 3a) = o.$$

E queste saranno imaginarie, se $\alpha^2 - 4(\alpha^2 - 3a) > o$, se, cioè, $3\alpha^2 > 4a$, che è verificata per ipotesi.

4. L'eguaglianza

$$\sqrt[3]{m + \sqrt{n}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{n}} = p,$$

con m, n, p reali, $n > o$, e dove per i radicali cubici si intendano prese le determinazioni reali [1], è vera se p è soluzione dell'equazione

$$x^3 - 3x\sqrt[3]{m^2 - n} - 2m = o.$$

[1] Si dimostra negli elementi di algebra che se a è un numero reale positivo o negativo, $\sqrt[3]{a}$ ha tre valori, uno reale, e due complessi coniugati.

Infatti, si consideri l' equazione

$$\sqrt[3]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{n}}=x \quad (3)$$

e si innalzi al cubo facendo uso dell'identità $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

Si ha:

$$x^3-3x\sqrt[3]{m^2-n}-2m=o \quad (4)$$

Ora $x=\sqrt[3]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{n}}$ sodisfacendo la (3) sodisfa la (4), come del resto può verificarsi direttamente con la sostituzione. Ma se $x=\alpha$ è una radice reale della (4), non può dirsi che essa sodisfa la (3). Perchè la (4) si è ottenuta da

$$m+\sqrt{n}+m-\sqrt{n}+3\sqrt[3]{m^2-n}\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{n}}\right)=x^3,$$

dove in luogo della quantità chiusa in parentesi si è posto x, in base alla (3). Ora se non fosse $x=\sqrt[3]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{n}}$, ma $x \gtrless \sqrt[3]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{n}}$, innalzando al cubo si avrebbe:

$$x^3\gtrless m+\sqrt{n}+m-\sqrt{n}+3\sqrt[3]{m^2-n}\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{n}}\right),$$

e questa diseguaglianza potrebbe divenire un' eguaglianza sostituendo in luogo della quantità chiusa in parentesi la quantità *diversa* x (¹).

Se però la (4) non ammette altre radici reali oltre la considerata, dovendo ogni soluzione reale della (3) sodisfare la (4), tale radice reale dovrà sodisfare la (3). La quistione è dunque ridotta a verificare che le altre due radici della (4), $P\,1$, sono complesse. E per provare questo basta verificare, $P\,3$, che:

$$3\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{n}}\right)^2 \surd\, 4\sqrt[3]{m^2-n}.$$

Sviluppando il quadrato si ha:

$$3\left(\sqrt[3]{(m+\sqrt{n})^2}+\sqrt[3]{(m-\sqrt{n})^2}\right)^2+6\sqrt[3]{m^2-n}>4\sqrt[3]{m^2-n}.$$

Ovvero, trasportando e riducendo:

$$3\left(\sqrt[3]{(m+\sqrt{n})^2}+\sqrt[3]{(m-\sqrt{n})^2}\right)>-2\sqrt[3]{m^2-n}\,.$$

(¹) Si possono confrontare sull'argomento: S. Catania: *Sulla risoluzione dell'equazione* $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}=0$, *Supplemento al Periodico di Matematica*, X, fasc. IX; G. Candido, idem, XI, fasc. II; A. Bindoni, questo *Bollettino*, 1908; S. Catania: *Trattato d' algebra elementare.*

Se $m^2 > n$, questa diseguaglianza è verificata.
Se $m^2 > n$, la scriviamo sotto la forma:

$$3\left(\sqrt[3]{(\sqrt{n}+m)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{n}-m)^2}\right)>2\sqrt[3]{n-m^2}. \qquad (5)$$

Ora per a e b reali differenti si ha $(a+b)^2 > 2\,ab$. Risulta:

$$\sqrt[3]{(\sqrt{n}+m)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{n}-m)^2}-2\sqrt[3]{n>m^2}.$$

Con più ragione è verificata la (5). Il teorema è così dimostrato.

Esempii: I. Dimostrare l'identità

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2,$$

quando ciascuno dei radicali cubici abbia la determinazione reale.

Basta che 2 verifichi l'equazione cubica

$$x^3-3\,x\sqrt[3]{49-50}-14=0,$$

cioè l'equazione $x^3+3\,x-14=0$. Fatta la sostituzione, $x=2$ è soluzione. Si può riconoscere che le altre due soluzioni sono imaginarie.

2. Nell'ipotesi che sia $a > \frac{1}{8}$, e che ciascun radicale cubico abbia la determinazione reale, si ha:

$$\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8\,a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8\,a-1}{3}}}=1.$$

Basta che 1 sia radice dell'equazione

$$x^3-3\,x\sqrt[3]{a^2-\frac{(a+1)^2\,(8\,a-1)}{27}}-2\,a=o.$$

Ovvero:

$$x^3-(1-2\,a)\,x-2\,a=o.$$

Fatta la sostituzione si trova che $x=1$ è radice. Si potrà verificare che in base all'ipotesi fatta di $a > \frac{1}{8}$ le altre due radici sono imaginarie [1].

Sebastiano Catania (Catania)

[1] Questi due esempii sono stati proposti nelle discussioni ai concorrenti a cattedre di scuole medie (Cfr. questo *Bollettino*, N. 9-10-11-12, anno 1911).

LEGGE DELLE " OPPOSIZIONI "

1. Se si considerano due qualunque degli angoli convessi, aventi i lati su due rette complanari a, b e su una loro trasversale m, si vede che essi possono essere:

omonimi od *eteronimi*, secondo che appartengano, o no, alla medesima delle due categorie di angoli esterni ed interni;

omoregionali o *eteroregionali*, secondo che giacciano, o no, nel medesimo dei due semipiani individuati da m;

convertici o *eterovertici*, secondo che abbiano, o no, il medesimo dei due vertici $(a\,m)$, $(b\,m)$.

2. Può anche dirsi che:

due angoli eteronimi sono in **opposizione di nome**;

due angoli eteroregionali sono in **opposizione di regione**;

due angoli eterovertici sono in **opposizione di vertice**.

3. Se a, b sono parallele, due qualunque degli angoli su nominati possono essere *uguali o supplementari*. Se invece le rette non sono parallele, possono essere uguali o supplementari soltanto due qualunque degli angoli convertici.

4. Nel caso del parallelismo, la relazione completa degli angoli può essere indicata dal seguente specchietto:

	OMONIMI		ETERONIMI	
	Convertici	*Eterovertici*	*Convertici*	*Eterovertici*
Omoregionali .	sovrapposti (= +)	coniugati (suppl. —)	adiacenti (suppl. —)	corrispondenti (= +)
Eteroregionali .	adiacenti (suppl. —)	alterni (= +)	opposti (= +)	contrapposti (suppl. —)

5. Facendo corrispondere il segno + alla uguaglianza, ed il segno — alla supplementarità, si vede che ogni colonna presenta una variazione.

6. Uno qualunque degli otto angoli può essere considerato come un *ente a tre indici di posizione* — nome, regione, vertice — e può quindi essere indicato col simbolo

$$A_{N,R,V}\,.$$

Un altro qualunqe degli angoli può essere indicato dallo stesso simbolo, purchè si ponga un segno — in testa a quello degl' indici che presenta una *opposizione*. Per esempio, $A_{\overline{N}, R, V}$ (che presenta una sola opposizione con $A_{N, R, V}$) indica l' angolo *omoregionale, convertice, eteronimo* di $A_{N, R, V}$ (cioè l' adiacente interno o esterno del primo, rispettivamente esterno o interno).

7. Facendo, come sopra, corrispondere il segno + alla uguaglianza ed il — alla supplementarità, si può enunciare quella che si può chiamare *legge delle opposizioni*:

Un numero di opposizioni produce + o — secondo che è pari o dispari.

Per esempio, $A_{\overline{N}, \overline{R}, V} = A_{N, R, V}$, perchè il primo angolo presenta *due* opposizioni col secondo, e perciò produce + cioè *uguaglianza*. Invece $A_{\overline{N}, R, V}$ è supplementare di $A_{N, R, V}$, perchè *una sola* opposizione produce — cioè supplementarità.

8. Quando le rette non sono parallele, vale la stessa legge con la restrizione che l' indice V si mantenga costante, onde il numero delle opposizioni non può superare 2.

Riccardo La Marca (Napoli)

CORRISPONDENZA

Egregio Collega,

Noi dimostrammo [1] che i **Quaternioni** considerati dal sig. **Aguglia** [2] *non sono i quaternioni di* **Hamilton**. Dopo la risposta del signor **Aguglia** [3], non solamente possiamo confermare quanto abbiamo già detto, ma possiamo aggiungere una terza dimostrazione che il signor **Aguglia** stesso ci fornisce.

Dalle definizioni di j_0, j_1, j_2, j_3 (p. 118) $j_0 = (1, 0)$, $j_1 = (i, 0)$, $j_2 = (0, 1)$, $j_3 = (0, i)$, il sig. **Aguglia** trae le note relazioni di **Hamilton** tra j_0, j_1, j_2, j_3 (p. 120). Ma si possono trarre anche queste:

$$j_0 + j_2 = (1, 1) \; ; \; j_1 + j_3 = (i, i),$$

(1) Vedi questo *Bollettino*, anno X (1911), pp. 192-194.

(2) In questo *Bollettino*, anno X (1911), pp. 23-34.

(3) In questo *Bollettino*, anno XI (1912), pp. 117-121.

dalle quali deriva la relazione:

$$(j_0+j_2)\,(j_1+j_3)=2\,j_1\,,$$

che non vale per lo *scalare* j_0 e i *versori unitari retti e ortogonali* j_1, j_2, j_3 di **Hamilton**; anche non volendo notare che per avere i quaternioni di **Hamilton**, j_0, cioè (1, 0) deve essere un *numero reale* e *non una coppia di numeri reali.*

La questione particolare ha poca importanza, e noi non avremmo replicato alle osservazioni del signor **Aguglia**, se a questa questione particolare non ne fossero collegate due di carattere generale e di notevole importanza scientifica e pratica. Intendiamo alludere all'*abuso delle coppie* e alla *tendenza di riportare ad un algebrismo infecondo i mirabili metodi puramente geometrici di* **Hamilton**. Una opportuna imitazione ed estensione dei concetti fondamentali di **Hamilton** ha dato dei potenti operatori geometrici (le *derivate rispetto ad un punto*), per mezzo dei quali si risolvono con grande facilità, e con *zero* coordinate, le più complesse questioni di *Meccanica*, di *Fisica* e di *Geometria differenziale*. E se in tale campo sono insufficienti i quaternioni *geometrici* di **Hamilton**, *a fortiori* lo è la rappresentazione dell'**Argand**, rappresentazione che *può* essere fatta con un sistema di quaternioni coassiali e *deve* esser fatta così perchè com'è data dall'**Argand** è del tutto inesatta.

Distinti saluti e ringraziamenti per la pubblicazione di questa breve, ed ultima, risposta.

25 giugno 1912.

C. Burali-Forti
R. Marcolongo

Caro Conti,

Nella prefazione alla terza edizione della mia « *Algebra* » ho attribuito unicamente al Prof. M. Cipolla il merito di avere svolta la teoria dei numeri reali secondo i concetti del Russel.

Una noticina del prof. V. Amato comparsa nel tuo *Bollettino* [1], e che a me non so come era fin'ora sfuggita, mi ha dato il modo di conoscere che prima che dal Cipolla, ma *senza che questi ne avesse avuto notizia*, detta teoria era stata svolta con metodo analogo, e con pari maestria, dal prof. Antonio Bindoni nella memoria dal titolo « *Qo* ».

(1) Anno IX, 1910.

Ti sarò grato se vorrai dire quanto sopra, nel tuo *Bollettino*, per far noto ai colleghi che non la conoscessero anche la memoria che il Bindoni ha avuto il torto di pubblicare particolarmente a Noto (1), aggiungendo che detto metodo è stato già maestrevolmente esposto per la scuola, dal prof. G. Sandri del Liceo di Modena (2) e che io avrei giustamente citati nella mia prefazione tanto il Bindoni quanto il Sandri se io avessi conosciuto i loro lavori.

Ringraziandoti sono

Oriolo Romano, 27 agosto 1912.

aff.mo Ettore Baroni

(1) Noto - Tipografia Zammit, 1909.
(2) *Teoria dei numeri reali ad uso dei Licei ed Istituti Tecnici* - Modena 1911.

RASSEGNA BIBLIOGRAFICA

Bourlet Carlo: *Cours abrégé de géométrie.* — I. Géométrie plane. — II. Géométrie dans l'espace. — Paris 1909-1911. — Hachette et C.ie

Questo corso di geometria, che è alla quarta edizione del primo volume e alla terza del secondo, è destinato agli allievi della sezione *B* del primo ciclo della scuola secondaria francese: periodo quadriennale, che offre una cultura generale sufficientemente completa, ma è più propriamente destinato alla preparazione degli allievi per le sezioni scientifiche e moderne del secondo ciclo. Secondo un decreto ministeriale del 27 luglio 1905, l'insegnamento della matematica ha subito importanti riforme perchè è stato abbandonato il metodo classico di Euclide, sostituendovene un altro, tutto moderno, nel quale tutto l'edificio geometrico riposa sui *movimenti* e si sono obbligati gli insegnanti a richiamarsi il più spesso possibile all'esperienza ed a sopprimere qualunque dimostrazione razionale, quando questa per la sua difficoltà riuscisse superiore alla mentalità degli alunni da 11 a 14 anni, ovvero la proposizione enunciata ammettesse delle semplici verifiche sperimentali. Tenendo poi presenti i fini speciali di questa scuola nella quale è data larga parte all'insegnamento del disegno ed alle sue applicazioni, l'insegnamento della geometria incomincia nella prima classe del corso (*sixième B*) col

solo disegno geometrico, molto opportunamente affidato all'insegnante di matematica; prosegue poi nella classe seguente (*cinquième B*) collo studio delle figure piane e loro eguaglianza; nella terza classe (*quatrième*) collo studio della similitudine, dei poligoni regolari, e della misura e termina poi nell'ultima classe del corso (*troisième B*) colla geometria nello spazio. L'ampiezza di tale programma è all'incirca la solita a darsi nelle nostre scuole tecniche, con qualche timida capatina al di là dei limiti posti tradizionalmente al campo della geometria comunemente chiamato elementare, contenendovisi qualche accenno, alla fine della geometria piana, alle coniche e a qualche curva superiore, e alle funzioni trigonometriche.

Attenendosi alle istruzioni e ai programmi suesposti, noi dobbiamo subito dire, che l'Autore, in questo suo *Cours abrégé*, per distinguerlo dal *Cours complet*, destinato al secondo ciclo, è egregiamente riuscito nel suo intento. Egli ha saputo dare ad un corso di geometria non del tutto teorico, nè del tutto intuitivo un assetto veramente rigoroso, introducendo gli enti e le figure geometriche mediante la loro costruzione, ed esponendone in *postulati* le proprietà caratteristiche desunte da ben guidate esperienze, ed in *principii* quelle proposizioni, che hanno d'uopo di dimostrazione, nè facile nè breve, che appunto per questa ragione, viene opportunamente rimandata al corso completo. Naturalmente la chiave di volta di tutto questo organismo e il quasi unico strumento di dimostrazione risiede nell'uso costante e metodico del concetto di movimento, introdotto fin dall'inizio coi principii dei movimenti elementari, *traslazioni* e *rotazioni* e colla definizione di rette parallele, come quelle deducentesi l'una dall'altra mediante una traslazione, ma ciò non esclude, che l'Autore più di una volta adoperi le dimostrazioni classiche fondate sull'uso esclusivo dell'uguaglianza dei tringoli. Ad ogni modo l'opera corre piana, chiara, ed anche nella sua veste materiale, svelta ed elegante, puramente geometrica, in quantochè non vi si fa uso del concetto di numero, che per quanto ha relazione col concetto di *rapporto* e di *misura*, e tutto questo l'Autore fa con fede di innovatore a lato di altri suoi illustri colleghi, quali il Méray, il Borel, il Grévy, fede ardente, che non lo trattiene dal lanciare i suoi strali verso chi non consente colle sue idee, o pur consentendo, si permette di avere opinione diversa in qualche lieve particolare. Così, ad es., vorrei permettermi di domandare all'Autore, perchè chiami *linee trigonometriche* il seno, il coseno e le altre note funzioni quando egli le definisce come certi *rapporti* e poi ne studia le variazioni nel cerchio unità.

Dopo ciò riportiamo il contenuto dell'opera:

Parte Prima. — Cap. I — **Il disegno geometrico.** — Definizioni fondamentali — Schizzi — Disegno cogli strumenti — Acquarello.

Cap. II. — **I movimenti elementari.** — Generalità — Traslazione — Parallele — Rotazione intorno ad un punto — Misura degli angoli — Simmetria relativamente a un punto — Gli angoli — Uso pratico del compasso.

Cap. III. — **Le figure elementari.** — Simmetria rapporto ad una retta — Distanze — Il cerchio — Eguaglianza dei triangoli — Parallelogrammi — Luoghi geometrici — Costruzioni.

Cap. IV. — **La similitudine.** — Linee proporzionali — Omotetia e similitudine — Triangoli rettangoli — Linee trigonometriche — Poligoni regolari — Misura della circonferenza.

Cap. IV. — **Le aree.** — Aree dei poligoni — Aree dei poligoni regolari e del cerchio — Rapporto delle aree.

Cap. V. — **Curve usuali.** — Tracciamento delle curve — Coniche — Concoidi — Cissoide.

Parte Seconda. — Geometria nello spazio.

Cap. I. — **I movimenti elementari.** — Determinazione ed intersezione di rette e piani — Traslazioni — Rette e piani paralleli — Angoli diedri — Rotazioni — Piani e rette perpendicolari.

Cap. II. — **Proiezioni**. — Distanze — Proiezioni ortogonali — Nozioni sui piani quotati.

Cap. III. — **I poliedri**. — Prismi. — Piramidi. — Aree e volumi.

Cap. IV. — **I corpi rotondi**. — Cilindri — Coni — La sfera — Acquarello.

Segue un' appendice con alcuni cenni sulle operazioni in campagna, levata dei piani e livellamento.

Ogni capitolo è poi corredato da un'ampia raccolta di esercizi pratici, teorici e grafici.

Giovanni Moglia

Ettore Baroni: *Algebra ad uso dei licei e del primo biennio degli istituti tecnici* (seconda edizione) [1]; volume primo. 1911. Prezzo L. 1,50.

In quest' era di passaggio tra il *vecchio* ed il *nuovo*, e di nuovo molto s' è fatto per ciò che riguarda la metodologia matematica, è sentito da molti il bisogno di libri di testo i quali, pur tenendo conto dei molti e notevoli risultati conseguiti dagli studi recenti, conservino tuttavia quella chiarezza e quella dizione facile e piana, direi quasi piacevole, dei trattati classici, che onorevolmente stanno cedendo le armi ai nuovi.

---

(1) (*N. d. D.*) In questi giorni si è pubblicala la 3ª edizione.

Mi sembra che, il libro sucitato del prof. Ettore Baroni sia tale da poter in gran parte soddisfare a questo vivo e universale desiderio degli insegnanti di matematica delle scuole medie superiori. Esso infatti è trattato con gran rigore scientifico, mentre è scritto con forma facile e svelta. Un insegnante lo legge d'un fiato, e penso con convinzione che allo stesso modo non riesca pesante all'alunno. Gli esercizi, opportunemente intercalati fra i diversi capitoli, sono facili quasi sempre, e in ogni modo graduati, assai spesso interessanti. Sono anche molto frequenti gli esempi svolti per modo che ogni concetto teorico nuovo vien per essi subito fissato nella mente dell'alunno e delucidato, se qualche dubbio vi potesse rimanere.

Cosa veramente importante da notare è la parte tipografica chiara, nitida, ricca di caratteri diversi, e di larghi spazi. La mole del libro è anche proporzionata giustamente al contenuto.

I numeri relativi sono introdotti mediante coppie con la notazione $a - b$, utile perchè con essa i concetti definiti mediante i nuovi enti appariscono come una naturale generalizzazione di concetti già noti. Il passaggio alla forma abbreviata usuale è fatto rapidamente e al più presto, col lodevole intento di liberarsi da una notazione che poi non si userà più.

Il calcolo algebrico è trattato con molto ordine, con costante chiarezza, sopratutto per ciò che riguarda l'enunciato delle proprietà e delle regole. Sono notevoli per rigore e per abbondanza di contenuto, ben ordinato, i capitoli sulla divisione, sulla divisibilità e sulla scomposizione in fattori dei polinomi.

La teoria delle equazioni è svolta con molta chiarezza mentre non vi fa difetto un irreprensibile rigore e una costante esemplificazione.

Giova insistere che il sapore dell'opera è eminentemente didattico sotto i parecchi aspetti sopra menzionati, e ciò allo scopo di invogliare gli insegnanti delle scuole secondarie alla lettura di questo pregevole lavoro, perchè piena è la fiducia che a molti piacerà.

Reggio Emilia, 14 luglio 1912.

ANTONIO BINDONI

ETTORE BARONI: *Algebra ad uso dei Licei e del primo biennio degli Istituti Tecnici* — R. Bemporad e figlio, Firenze. (Volume secondo, terza edizione). 1912. Prezzo L. 1,50.

Dopo la nuova edizione del primo volume di questa notevole opera, rifatta secondo gli ultimi programmi ministeriali, e migliorata nel senso che l'A. ha tenuto conto nella sua ristampa dei nuovi progressi fatti

dalla metodologia matematica, ecco la nuova edizione del secondo volume, che completa il primo. Ed anche in questo secondo volume apparisce fin dalle prime pagine che, l' A. ha tenute in giusto conto le recenti ricerche sui fondamenti dell'analisi, esponendo la teoria dei numeri reali definiti nominalmente mediante classi di razionali. La quale trattazione se per la sua novità ha incontrato qualche oppositore, va da altra parte acquistando il favore di molti sia per la sua semplicità e chiarezza che per il suo rigore logico, che io ritengo superiore a quello di ogni altra trattazione.

In questo secondo volume sono svolti gli argomenti di algebra, che costituiscono con quelli svolti nel primo la materia assegnata dai programmi ufficiali ai licei ed al primo biennio degli istituti tecnici.

Le considerazioni di indole generale e gli apprezzamenti, che ho esposti nella recensione del primo volume intendo di ripetere per questo secondo volume, giacchè le stesse doti di indole scientifica e didattica lo informano.

Nè ritengo inutile di insistere nell' invitare i colleghi delle Scuole Medie ad esaminare questo pregevole lavoro, perchè esso a mio avviso, come notai nella suddetta recensione, viene a soddisfare il generale desiderio di avere nelle scuole un libro, che al tempo stesso appaghi ogni desiderio di rigore logico e rivesta una forma piacevolmente facile e chiara.

Reggio Emilia, 24 agosto 1912.

ANTONIO BINDONI

A. PENSA: *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie inferiori.* — Torino — Casa Editrice G. B. Petrini, 1912.

Questi *Elementi* sono preceduti da un'ampia e laudatoria prefazione dell' illustre prof. Burali-Forti, il quale vi pone ad epigrafe le seguenti parole di G. Peano: « *Il rigore matematico è molto semplice. Esso sta* « *nell'affermare tutte cose vere e nel non affermare cose che sappiamo* « *non vere..... Quindi per essere rigorosi, non è necessario di definire tutti* « *gli enti che consideriamo..... E anche dove si può definire, non è sempre* « *utile il farlo.....* » ed aggiunge poi più tardi che « *non è necessario dimostrare tutte le proposizioni che si enunciano* ».

Queste frasi indicano chiaramente qual'è lo spirito didattico ond' è informato questo nuovo libro destinato alle scuole medie inferiori. « *Assoluta precisione di linguaggio*, riporto le parole del Burali-Forti, *somma semplicità, continuo riferimento ad enti concreti del mondo fisico e disposizione dei vari argomenti in modo tale da poter fare fin dall' inizio, e poi continuamente applicazioni o metriche o grafiche* ». Ma non è da credere,

che tale precisione e rigore sia ottenuto con un' arida, pesante e noiosa esposizione teorica, chè anzi la preoccupazione logica dell' insieme, risiede soltanto nella mente dell'Autore, per la disposizione data ai vari argomenti; le dimostrazioni vi sono soltanto quando non eccedono la potenzialità intellettuale degli alunni, negli altri casi o si indicano, quando sono possibili, le giustificazioni sperimentali ottenute in gran parte mediante la sovrapponibilità, o sono addirittura coraggiosamente soppresse le dimostrazioni di qualsiasi genere, sì chè in vari punti del libro si ha senz'altro una successione di proposizioni, che enunciano verità da dimostrarsi nei corsi superiori. Di aver fatto questo, l'Autore merita lode, anche se ciò dispiaccia ad alcuni pedagogisti, molto teneri di certe dimostrazioni sperimentali, ad es. per la misura del cerchio e della sfera. In questi ed in altri casi analoghi, in cui la falsa verifica sperimentale suggerita non può nemmeno avere valore d'approssimazione, oltre che più rigoroso e più scientifico è anche più leale avvertire chiaramente gli allievi, che la ragione rigorosa della regola o della verità proposta c' è, ma essi la potranno conoscere solo se, e quando, vorranno proseguire negli studi matematici.

Prima di procedere all' esposizione sommaria della materia contenuta nel libro, mi piace far menzione, lodandole, di alcune novità. Una è quella relativa ai calcoli con numeri irrazionali frequenti nelle applicazioni e tra questi, in ispecial modo, i calcoli contenenti il numero π, il quale viene assunto con quel numero di cifre decimali necessarie ad ottenere un'approssimazione prestabilita, o viene senz'altro indicato colla sua forma letterale π, quando approssimazione determinata non è richiesta. Così, se pure non per la prima volta, nei problemi metrici, l' Autore introduce sistematicamente il concetto di *moltiplicazione fra grandezze geometriche* e pone relazioni di questa forma:

$$\text{lunghezza} \times \text{lunghezza} = \text{area}$$

$$\text{area} \times \text{lunghezza} = \text{volume}\ ; \quad \frac{\text{area}}{\text{lunghezza}} = \text{lunghezza}$$

$$\frac{\text{volume}}{\text{lunghezza}} = \text{area} \quad \frac{\text{volume}}{\text{area}} = \text{lunghezza}$$

e scrive in conseguenza:

$$\text{cm}\ 5 \times \text{cm}\ 7 = \text{cm}^2\ 35\ ; \quad \frac{\text{m}^2\ 372}{\text{m}\ 12} = \text{m}\ 31$$

Notazioni, che, posto il concetto accennato, non hanno nulla di quell' inesattezza onde sono spesso tacciate. Sul qual punto, come su altri, mi sia lecito esprimere il voto, che si possa ottenere un'unificazione nelle

notazioni delle matematiche elementari, [1] questione anche trattata recentemente nel Congresso tenuto in Halle, nel maggio passato, dall'Associazione tedesca pel progresso delle scienze, su relazione del professore Lietzmann.

Ciò posto, ecco il sommario del libro:

Cap. I. — **Nozioni fondamentali**. — Punti, rette, piani — Distanze — Eguaglianza e sovrapponibilità.

Cap. II. — **Figure e grandezze geometriche elementari**. — Grandezze geometriche elementari — Parallelismo — Angoli: rette perpendicolari — Cerchio.

Cap. III. — **Problemi grafici fondamentali**. — Problemi sui segmenti: copia, somma e differenza — Copia di una terna di punti — Angoli: copia, somma e differenza — Bisettrice di un angolo — Perpendicolare ad una retta — Tracciamenti di circonferenze passanti per punti assegnati — Parallele — Divisione di un segmento in parti eguali.

Cap. IV. — **Triangoli**. — Nomenclatura — Somma degli angoli — Triangoli isosceli ed equilateri — Costruzioni di triangoli — Eguaglianza dei triangoli.

Cap. V. — **Poligoni**. — Nomenclatura — Somme degli angoli — Quadrilateri e loro classificazione.

Cap. VI. — **Poligoni equivalenti**. — Misura dei poligoni — Equivalenza in generale ed in particolare — Teorema di Pitagora ed applicazioni.

Cap. VII. — **Alcune proprietà della circonferenza**. — Tangenti, secanti — Circonferenze tangenti a rette date — Angoli nel cerchio — Poligoni iscritti e circoscritti — Poligoni regolari.

Cap. VIII. — **Similitudine**. — Rapporti — Teorema di Talete e sue applicazioni — Poligoni simili.

Cap. IX. — **Misura della circonferenza e del cerchio**. — Il numero π — Lunghezza della circonferenza e di un arco — Area del cerchio o di un settore.

Cap. X. — **Generalità sulle figure non piane**. — Posizioni relative di rette e piani — Diedri: piani perpendicolari.

Cap. XI. — **Poliedri**. — Poliedri in generale — Prisma — Piramide — Area, volume e sviluppo — Poliedri regolari.

Cap. XII. — **Superfici e solidi di rotazione**. — Cilindro, cono,

---

[1] (N. d. D.) *Sarebbe davvero utilissimo che fosse accolto questo voto dell'egregio Recensore. Richiamiamo perciò su di esso l'attenzione del C. D. della « Mathesis », che ci parrebbe l'organo più adatto per promuovere e disciplinare la discussione e per compilare a discussione chiusa, un prospetto delle notazioni unificate. Pertanto, per conto nostro apriamo fin d'ora la discussione, ed incominciamo dall'aprirla sulle relazioni proposte dal prof. Pensa, tanto più che su di esse non ci pare davvero che si accordino molti docenti.*

sfera — Generazione e misura della superficie e del volume di quei corpi o di talune loro parti notevoli.

Segue un'appendice con un fugace accenno ai teoremi di Guldino, e ai cilindroidi.

Poi si hanno quattro tavole numeriche contenenti:

I. Numeri interi, misure di lati di triangoli rettangoli.
II. Radici quadrate e cubiche dei numeri da 1 a 1000.
III. Quadrati dei numeri da 1 a 1000.
IV. Cubi dei numeri da 1 a 1000.

GIOVANNI MOGLIA

G. RIBONI: *Elementi di calcolo letterale di algebra per le Scuole Medie di 1° grado.* — (Società Edit. « Dante Alighieri » di Albrighi, Segati, L. 1,80).

Il piccolo volume corrisponde perfettamente al suo scopo perchè espone in forma semplice e chiara tutto quello che è necessario per una 3ª tecnica od anche per una 1ª normale. L'Autore segue il metodo di introdurre prima i numeri negativi per poi svolgere tutta la trattazione del calcolo letterale e la risoluzione delle equazioni di primo grado ad un'incognita e dei sistemi di equazioni di primo grado a più incognite. In ogni parte sono proposti vari e adatti esercizi e la risoluzione aritmetica e algebrica dei problemi di primo grado vi è trattata diffusamente oltre che in teoria in vari esempi, che guidano opportunamente l'allievo e lo addestrano dalle questioni più semplici mano a mano a quelle più complesse.

LUISA RUBINI

GIOVANNI GARBIERI: *Norme ai maestri per insegnare l'Aritmetica, la Geometria e la Computisteria pratica nelle Scuole Elementari con appunti critici di pedagogia sperimentale e numerosi esempi.* — Libro di testo per le Scuole Normali (Ditta G. B. Paravia. Prezzo L 2).

L'Autore, dopo considerazioni d'indole generale, si addentra in istruzioni speciali per le varie classi della scuola elementare. Prende in esame per ogni anno di studio il relativo programma, consiglia il modo di svolgerlo ed indica gli esercizi più opportuni. Il libro è utile per gli alunni delle Scuole Normali che vi troveranno organicamente raggruppate tutte quelle nozioni didattiche che l'insegnante di matematica avrà

date contemporaneamente alla trattazione razionale delle varie parti della matematica. E lo sarà ancora più pel maestro ai primordi del suo ministero perchè oltre alle osservazioni di indole generale vi avrà una guida minuziosa sul modo di interpretare e svolgere il programma governativo.

LUISA RUBINI

ALESSANDRO PADOA: *La logique déductive dans sa dernière phase de développement* avec une Préface de Giuseppe Peano. — In-8 (25-16) de 106 pages, 1912. 3 fr. 25 c.

Préface. — Plusieurs savants de tous pays ont adopté l'idéographie logique, telle qu'elle a été perfectionnée et complétée de nos jours. M. Padoa a donné sur ce sujet, depuis 1898, des séries de conférences très suivies dans les Universités de Bruxelles, Pavie, Berne, Padoue, Cagliari et Genéve, et a fait des communications très appréciées aux Congrès des philosophes et des mathématiciens de Paris, Livourne, Parme, Padoue et Bologne. En poursuivant son œuvre de collaborateur et de vulgarisateur, M. Padoa s'est proposé de mettre tout le monde à même d'apprécier la simplicité et la puissance du langage idéographique, qui a donné naissance à un nouveau développement de la logique déductive et à une nouvelle analyse des différentes branches des mathématiques, et de consulter avec profit et sans difficulté les nombreux Ouvrages dans lesquels on en fait l'application.

Le but me paraît atteint par ce Traité, qui est clair, ordonné, complet: il contient l'explication de tous les symboles logiques, l'étude de leurs propriétés, l'analyse de leurs liens et leur réduction au nombre minimum, due à M. Padoa. Beaucoup d'exemples, tirés du langage courant et du langage scientifique, en rendent la lecture plus intelligible et plus agréable; et des notices historiques bien choisies permettent de suivre les progres de ces études, depuis Leibniz jusqu' juqu' à nos jours. Enfin, ce Traité fait connaître tout ce qu'on sait sur cette science, qui intéresse aussi bien les philosophes que les mathématiciens.

Table des Matières. — *Avant-propos.* Termes logiques et termes scientifiques dans le langage ordinaire. Idéographie des algébristes. Le rêve de Leibniz et sa réalisation. Réfutation d'un sophisme et d'une objection sceptique. Le vocabulaire logique réduit à une ligne. La sténographie et les langues artificielles. Logique mathématique. — *Idéographie logique.* Egalités. Appartenances. Extension ou compréhension des classes. Principe de permanence. Inclusions. Quelques classes arithmétiques. Rien et tout. Réunion et intersection de classes. Réunion

disjonctive. Individu. Éléments. Agrégat. Symboles constants ou variables. Propositions catégoriques ou conditionnelles. Variables réelles ou apparentes. Implications. Ponctuation. Classes et conditions. Affirmations simultanées ou alternées. Négation. Classes contraires. Existence. Comparaison entre l'idéographie et le langage ordinaire. — *Logique déductive.* Réflexibilité, symétrie et transitivité. Propriété substitutive de l'égalité. Transformation des relations logiques. Propriétés simplificative, commutative, associative et distributive des opérations logiques. Autres propositions remarquables. Syllogistique. Relations entre les symboles « $\frown$ $\smile$ — ». Dualité logique. Principes d'identité, de contradiction et du tiers exclu. On démontre une P sans se soucier de ce qu'elle dit. Possibilité de réduire le vocabulaire logique à trois symboles.

ENRICO POINCARÉ

Dell'illustre Scienziato, la cui repentina scomparsa è stato un lutto mondiale, dell'opera Sua nei campi più elevati della Matematica pura ed applicata, dirà, in un prossimo fascicolo, un nostro Collaboratore. Ma il Bollettino *non poteva riprendere le sue pubblicazioni, senza che dalle sue colonne, pure, partisse l'espressione del maggiore rimpianto per la gravissima perdita avuta dalla scienza!*

La Direzione

IN MEMORIA
DI
COSTANTINO PITTEI

Il compianto prof. Pittei fu da me conosciuto per la prima volta, come mio esaminatore, all' esame d' ammissione al primo anno del R. Istituto tecnico di Firenze; poi lo ebbi come insegnante, d' Aritmetica e d' Algebra, durante il primo biennio. Ebbi così modo di apprezzarne le eminenti doti didattiche e le eccellenti qualità dell' animo.

Passando al secondo biennio dell' Istituto tecnico, sotto un altro distintissimo insegnante, il prof. Bellacchi, non si cancellò nè si impallidì per niente il ricordo simpatico degli studi fatti col prof. Pittei. Nè lo studente universitario, nè il professore perdettero più quel caro ricordo; nè mai più si interruppero, nè mai alcuna nube li offuscò, i bei rapporti di stima e d' affetto interceduti fra me e il compianto Pittei, alla cui Memoria mi è grato rivolgere il più reverente ed affettuoso pensiero, mentre per un adeguato Elogio della Sua vita specchiata e della operosità Sua di Scienziato e di Maestro, cedo senz' altro la parola a chi gli fu compagno fedele e affezionato, per lunghi anni, nella direzione dell' Osservatorio meteorologico della Specola fiorentina.

ALBERTO CONTI

Nato in Prato di Toscana l' 8 febbraio 1839 da specchiati genitori operai, fu da essi allevato amorosamente, come unico maschio primogenito della nascente famiglia. E quando scorsero nel giovanetto i segni del buon ingegno e della non comune saggezza, lo posero a studio in quel reputato Seminario, ove cogli alunni ecclesiastici venivano accolti i secolari. Compiutivi i corsi elementari del greco, del latino e dell' italiano, passò di lì agli studî più elevati delle lettere e delle scienze nel patrio Collegio Cicognini, celebre in Toscana e in Italia per i metodi eccellenti e per i buoni maestri che vi fioriscono. Vi ebbe insegnante di matematiche il prof. G. Guarducci, al quale serbò fino alla morte grande affetto e venerazione, come a colui che seppe coltivarlo con vero amore per questa scienza, cui si sentiva fortemente inclinato.

Per essa furono tutte le sue cure studiose, tantochè ben maturo e preparato si trasferì nel '58 a Pisa, a compiervi gli studî superiori sotto i celebri professori Mazzotti, Betti, Meneghini, Matteucci ed altri, i quali tenevano alta la fama di quel glorioso Ateneo.

Riportatovi con lode nel '61 la laurea dottorale in matematiche, entrò nel novembre Ripetitore di tali materie nel Collegio Militare di Firenze, ove restò fino a tutto il '64; carissimo sempre al colonnello Manassero, che nel Pittei scorgeva precisione, chiarezza e praticità fruttuosa d'insegnamento.

Soppresso il Collegio Militare di Firenze, il Pittei andò a Loreto insegnante alla Scuola tecnica, al Convitto, e a quel Ginnasio Comunale; ufficio che tenne fino al '66, e ai quali rinunziò per la sua nomina ad aiuto alla Cattedra d'Astronomia nel R. Osservatorio di Firenze; per la quale il pisano G. B. Donati l'avea chiesto al prof. Betti, certo d'averne indicato uno de' suoi migliori discepoli, capace di coadiuvarlo validamente nei nuovi destini che preparava alla Specola fiorentina.

I primi lavori del Pittei, negli anni '67, '68. furono calcoli di osservazioni e di orbite di comete, scoperte o ritrovate negli anni precedenti dall'illustre Donati; e nel '69 e '70 calcoli e studî sulle eclissi solari, per la importante spedizione scientifica in Sicilia, che gli astronomi italiani, capeggiati dal Santini e dal Secchi, preparavano per la grande eclisse solare del 1870.

Il triennio '70-'72 fu un periodo memorabile di attività pel Donati; il quale tutto assorto nella costruzione del nuovo Osservatorio sulla storica collina d'Arcetri, facea convergere a quella le migliori energie del personale dipendente da Lui: e C. Pittei vi ebbe parte precipua.

Morto repentinamente a Livorno nel giugno '67 il senatore Matteucci, Direttore del Museo e dell'Ufficio Meteorologico della Marina, e data la direzione di questo al Donati, egli ebbe a coadiutore nelle cresciute mansioni prima l'assistente fisico dott. Marangoni e poi pel ritiro di esso, il nostro Pittei, al quale dal 9 ottobre '70 venne affidato l'incarico della Meteorologia, della quale poi si occupò sempre fino al 1910.

Ma già nell'estate del '70, il Donati lavorava intorno ad una base geodetica fondamentale presso Pisa, per la Commissione internazionale del grado: operazioni laboriose e delicate, alle quali il Pittei portò il suo valido contributo scientifico.

Il periodo fortunoso che attraversò l'Osservatorio fiorentino nel biennio '72-'73, cambiò del tutto le sorti di esso; e il Pittei chiamato dal Ministero della Marina a succedere al Donati, defunto il 20 febbraio '73, dovette dedicarsi tutto al servizio meteorologico marittimo. Nella separazione della Meteorologia dall'Astronomia, avvenuta pochi anni prima, il posto di Assistente per la seconda era stato conferito all'ing. Cipolletti romano, il quale vi portava tutto l'ardore giovanile e la freschezza dei suoi studi, quando nel maggio '74 anche questo fervido giovane assalito da violenta meningite, si spense in pochi giorni. L'Istituto Superiore affidò di nuovo al Pittei la Direzione della nuova Spe-

cola Galileiana, che egli tenne fino al gennaio '75, per consegnarla all'Astronomo Tempel, proposto dall'insigne Schiapparelli di Milano.

Sciolto da questi uffici il Pittei concentrò l'operosità scientifica nell'Osservatorio del Museo, nell'Istituto Tecnico e in molte e varie commissioni esaminatrici, tecniche e didattiche, affidategli dal R. Istituto Superiore, dalla Provincia e dal Municipio.

Nello stesso anno '75 riunitosi a Palermo il Congresso degli scienziati italiani, i varî Ministeri aventi servizi meteorologici vi nominarono un Comitato pel riordinamento dei servizi stessi e degli Osservatorî dipendenti; e il Pittei vi fu, col Comandante Magnaghi, rappresentente del Ministero della Marina.

Inoltre nel '76 ebbe dal Ministero stesso l'onore di rappresentarlo, col Magnaghi predetto, nel Consiglio Direttivo della Meteorologia; incarico ehe tenne con molta lode ed utilità per 11 anni, cioè fino al rinnovamento del Consiglio.

Nell'aprile '79 sedette in Roma nel Congresso internazionale di Meteorologia, e vi presentò tre Rapporti di grande importanza scientifica.

Nel 1878, come preparazione al Congresso medesimo, avea tradotto dall'inglese per la *Rivista Marittima*, il classico Volume dello Scotti, « Carte del tempo ed Avvisi di tempesta », versione che gli valse le lodi del Ministero ed il plauso dei meteorologisti italiani.

Soppresso nel 1880 l'Ufficio Meteorologico della Marina in Firenze. riunito con altri servizî affini all'Ufficio Centrale della Meteorologia e Geodinamica, allora stabilito nel Collegio Romano, il Pittei pur rimanendo nel Consiglio Direttivo della Meteorologia, si dedicò esclusivamente all'Osservatorio del Museo ed al suo insegnamento delle Matematiche nel R. Istituto Tecnico, rinunziando ogni altro incarico. Nei quali uffici portò sempre, colla diligenza che gli era abituale, il contributo prezioso della molta esperienza, del suo metodo didattico lucidissimo e della incomparabile coscienziosità. L'esatta osservanza dell'orario, la disciplina della scuola di lui, vanno ammirate e citate ad esempio: e nonostante la sua fermezza disciplinare, ebbe sempre per gli scolari benevolenze di padre, facendosi tutto per essi anche fuori dell'aula scolastica. Per gli studiosi poi e forniti di buon ingegno, ebbe sollecitudini preclari; incoraggiandoli fervidamente agli studî universitarî, dai quali uscirono con lode e non poco profitto. Ed ai bisognosi fu largo eziandio di soccorsi; affinchè il buon volere non incontrasse troppi ostacoli per la nobile e più alta meta che si erano prefissi.

Nè la sua generosità si restrinse ai soli discepoli bisognosi e diligenti; ma slargandosi a cerchia più vasta, trovò modo di farsi sentire per vie occulte a quanti ebbero ricorso al suo buon cuore.

Solo ai mestieranti di carità negò recisamente l'obolo suo; affinchè

il soccorso destinato al vero ed urgente bisogno non si convertisse in incoraggiamento all'ozio ed al vizio.

Senza privarsi del necessario e conveniente alla sua onorata posizione sociale, C. Pittei seppe recidere dalle sue abitudini personali tutto ciò che apparisse lussuoso o superfluo, serbando anche nel vitto, negli indumenti e negli arredi domestici quella frugalità e decenza, che nulla tolgono alla stima e considerazione di persona distinta. Parsimonia che in lui era parte della sua natura e modestia, e che serbava anche nelle spese de' suoi uffici, limitate al puro necessario e conveniente per l'andamento regolare dei medesimi.

Con siffatte abitudini semplicissime, nessuna meraviglia che il Pittei, rinunziato virtuosamente ogni superfluo inutile per sè, abbia potuto adunare un non piccolo patrimonio, per farne dono benefico a pii Istituti della sua città natale: ove il nome di lui, proferito sempre con grande estimazione e riverenza, risuonasse pure dopo morte sul labbro riconoscente dei piccoli operai del Magnolfi, delle povere orfane pericolanti e dei vecchi ricoverati signorilmente nell'Ospizio suburbano di mendicità: tre Istituti che il cuore d'insigni concittadini hanno aperto, con esempio ammirabile di pietà alle più urgenti condizioni d'indigenza della generosa città di Prato.

Molte cose resterebbero ancora a dirsi di questo esimio e benefico scienziato; se dal rievocarle non patisse offesa la esemplare modestia, nella quale volle tenersi sempre nascosto.

Il 5 giugno decorso, questo fiore di galantuomo e di gentiluomo si aperse a vita tanto più alta e contemplativa, lasciando negli illustri colleghi, negli amici numerosi e fedeli, nei benevoli e conoscenti cospicui un acceso desiderio di sè.

Intorno al feretro di Costantino Pittei si strinsero in nobile gara di affetto gli insigni rappresentanti del nostro massimo Ateneo, degli Osservatori fiorentini, della provincia, dell'Istituto Tecnico, delle Scuole ed Istituzioni didattiche e benefiche, oltre ad un'ampia corona d'insegnanti, d'alunni, di coltissimi cittadini ed ammiratori accorsi coi dignitari della città natale e degli Enti più beneficati, a rendere solenne omaggio di onoranze alla memoria venerata del chiarissimo collega, del valoroso maestro, dell'esemplare concittadino e dell'insigne benefattore.

Firenze, 25 luglio 1912.

V. MESSERI

RASSEGNA DELLE RIVISTE

La Revue de l'Enseignement des Sciences

(Parigi. Libreria H. Le Soudier. Annata 1911)

La *Rivista* è dedicata più specialmente allo studio dei programmi nelle scuole francesi, rileva gli inconvenienti, addita modificazioni ed innovazioni. — Oltre a questi articoli che si riferiscono quasi esclusivamente all'organizzazione scolastica francese ve ne hanno altri sull'insegnamento delle scienze.

Diamo cenno di quelli di indole matematica.

A. Tresse: *Un modo di esposizione della teoria dei logaritmi.* — La teoria dei logaritmi, generalmente adottata, consiste nel definire la funzione logaritmica come l'inversa della funzione esponenziale. Questo processo, d'altronde molto semplice, ha l'inconveniente di fare richiamo alla nozione di continuità e più precisamente alla definizione di potenza con un esponente incommensurabile. Di conseguenza la teoria dei logaritmi si trova riportata assai lontano nei corsi di studio ed il suo uso nelle applicazioni pratiche ne è altrettanto ritardato.

Il metodo esposto dall'Autore nella nota, evita quest'inconveniente senza togliere nulla al rigore e alla concisione; fa solamente uso della nozione di *taglio*, cioè della definizione di un numero dai due insieme dei suoi valori commensurabili approssimati, gli uni per difetto, gli altri per eccesso. Con esso, la teoria dei logaritmi si pone immediatamente dopo lo studio degli esponenti commensurabili, studio limitato alla loro definizione, alle loro proprietà di calcolo, al loro carattere di variare nel medesimo senso dell'esponente o in senso contrario secondo che la base è maggiore o minore di uno.

Ch. Michel: *Misura di lunghezze rettilinee.* — L'Autore presenta in una maniera nuova in alcune parti, la teoria che conduce alla misura dei segmenti di retta e alla determinazione d'una corrispondenza fra i numeri reali positivi o zero e i punti di una semiretta.

G. Fonténé: *I due punti di vista della divisione.* — Considerati i due problemi seguenti:

I. Una persona ha 38 palline; essa vuole darle nella misura del possibile a dei fanciulli dando a ciascuno 7 palline. A quanti fanciulli può darle?

II. Una persona ha 38 palline; essa vuole darle nella misura del possibile a 7 fanciulli. Quante palline può dare a ciascun fanciullo?

L'Autore mostra che una medesima operazione, un medesimo calcolo, dà la risposta a questi due problemi. — Osserva inoltre l'A. che il primo problema, nel quale i due dati sono della medesima natura, è più semplice dal punto di vista delle idee del secondo e sostiene perciò che quel problema debba essere trattato dapprima e che ad esso debba essere ricondotto l'altro.

Nel I problema si tratta di scoprire *il numero 5* che dà luogo all'uguaglianza e alla disuguaglianza seguente:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \text{palline } 38 = (\text{palline } 7 \times 5) + \text{palline } 3 \\ \text{palline } \ \ 3 < \text{palline } 7 \end{cases}$$

Nel II problema si tratta di scoprire *la grandezza* palline 5, che dà luogo all'uguaglianza e alla disuguaglianza seguenti:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \text{palline } 38 = (\text{palline } 5 \times 7) + \text{palline } 3 \\ \text{palline } \ \ 3 < \text{palline } 7 \end{cases}$$

Ora essendosi dimostrata l'uguaglianza

$$\text{palline } 5 \times 7 = \text{palline } 7 \times 5$$

si può sostituire le relazioni (II) con le relazioni (I), e il secondo problema si riconduce così al primo.

A. SAINTE-LAGUË: *Le costruzioni grafiche.* — Si sa che la geometografia si propone di dare per ogni costruzione grafica il disegno più semplice. Osserva l'Autore dell'articolo che questo ramo della geometria, dovuto principalmente al Lemoine, non ha avuto sin qui una grande influenza sull'insegnamento matematico forse per la complicazione, più apparente che reale, delle notazioni del Lemoine.

Il fondatore della geometrografia ha voluto fare un'opera perfetta tenendo conto dei minimi dettagli di costruzione. Ora l'Autore della nota senza toccare lo spirito generale della geometrografia, semplifica, soltanto in vista dell'insegnamento, le notazioni del Lemoine. Dopo aver riassunte le notazioni del Lemoine espone le sue, semplificate, ne ricava le formole fondamentali e studia in quest'ordine di idee le costruzioni elementari ed altre costruzioni.

La *Rivista* ha inoltre pubblicato altre brevi note: di G. FONTÉNÉ: *Sullo spostamento di una figura.* — TH. GOT.: *Dimostrazione elementare della formola*

$$L\,ab = L\,a + L\,b \text{ e dello sviluppo di } e^x$$

di R. BLUM et F. BRACHET: *Sul senso dei triedri supplementari*; G. FONTÉNÉ: *Sulle frazioni irriducibili*; E. COMBET: *Dimostrazione della proprietà fondamentale della tangente ad una conica*; B. NIEWENGLOWSKI: *Su una formola di Gauss.* LUISA RUBINI

RUBRICA DEI CONGRESSI

Il V Congresso Internazionale dei Matematici

L'Enseignement mathématique nel n. 5 del decorso settembre pubblica un esteso resoconto del Congresso internazionale dei matematici, tenutosi a Cambridge dal 21 al 28 agosto.

Dal citato resoconto apparisce che hanno partecipato al Congresso circa 500 congressisti rappresentanti 27 diversi paesi.

Il Congresso è stato aperto il 22 agosto con un discorso del Presidente della Società filosofica di Cambridge GEORGE DARWIN, il quale dopo essersi intrattenuto sul posto che ha Cambridge nel campo matematico, bastando all'uopo ricordare Newton, Airy, Adams, Maxwell, Cayley, Stokes, Kelvin, ha commemorato Enrico Poincaré, ed ha delineato, infine. a grandi tratti alcuni problemi della Scienza attuale.

Formatosi l'ufficio di presidenza, con VITO VOLTERRA per l'Italia, fra i Vice-presidenti, FEDERICO ENRIQUES ha tenuto una Conferenza, in seduta plenaria, sul *significato della critica dei principî nello sviluppo delle matematiche* (1), intrattenendosi in modo particolare sui punti seguenti: *il continuo e i procedimenti infinitesimali presso i Greci - la fondazione del calcolo infinitesimale - la critica dei concetti infinitesimali e i nuovi sviluppi del calcolo delle variazioni - le funzioni arbitrarie e la moderna elaborazione del concetto del continuo - lo sviluppo intensivo delle matematiche: le equazioni e i numeri immaginari - la teoria delle funzioni algebriche da Riemann in poi e la critica dei principi della geometria - alcuni nuovi sviluppi dell'algebra - conclusione: il pragmatismo e il naturalismo matematico - le matematiche considerate come strumento o come modello della scienza.*

A questa Conferenza ne ha fatto seguito un'altra del prof. BROWN sulla « *Periodicità nel sistema solare* ».

Nella seconda seduta plenaria, il prof. LANDAU ha tenuto una Conferenza « *sui problemi risoluti o da risolvere nella teoria della ripartizione dei numeri primi e della funzione Zeta di Riemann;* e il Principe B. GALITZINE ha parlato sul tema: *Principî di sismologia strumentale.*

Nella terza seduta generale, E. BOREL ha tenuto una Conferenza sul tema: *Definizione e campo d'esistenza delle funzioni monogene uniformi;*

---

(1) La conferenza è pubblicata integralmente nella Rivista « *Scientia* » Bologna: Casa editrice Nicola Zanichelli.

e Sir WILLIAM H. WHITE ha parlato *sulla parte che spetta alla matematica nella pratica dell' ingegnere.*

Nella quarta seduta plenaria MAXIME BOCHER ha parlato *sui problemi di limiti a una dimensione* e Sir JOSEPH LARMOR *sulla dinamica di radiazione.*

Le comunicazioni speciali in numero d'un centinaio circa, si riferiscono a tutti i più svariati campi delle matematiche pure e applicate. In proposito l'*Enseignement Mathématique* esprime il voto che il Comitato d'organizzazione del fututo Congresso limiti le comunicazioni precisando il campo e la natura dei lavori e riservando un maggiore sviluppo alle discussioni d'interesse generale, per evitare che gli Atti del Congresso assumano semplicemente l'aspetto d'un numero straordinario d'un periodico di matematiche.

Le comunicazioni presentate sono state esposte nelle sei sezioni: I. Aritmetica, Algebra, Analisi; II. Geometria; III. *a*) Meccanica, Fisica Matematica, Aritmetica; III. *b*) Scienze economiche, Assicurazione, Statistica; IV. *a*) Filosofia e Storia delle matematiche; IV. *b*) Insegnamento matematico. Su alcune delle comunicazioni è avvenuta pure una breve discussione.

Segnaliamo fra le Comunicazioni quelle presentate da A. PADOA su *Una questione di massimo o di minimo* e *Sul principio d'induzione matematica;* da E. BOMPIANI *Sul recente progresso in geometria differenziale proiettiva;* da C. SOMIGLIANA *Sopra un criterio di classificazioni dei massimi e dei minimi delle funzioni di più variabili;* da L. AMOROSO su *I caratteri matematici della scienza economica;* da C. BURALI-FORTI *Sulle leggi generali per l'algoritmo dei simboli di funzione e d'operazione;* da G. LORIA *Intorno ai metodi usati dagli antichi greci per estrarre le radici quadrate;* da G. PEANO sulle *Proposizioni esistenziali;* e da G. VACCA *Sul valore della ideografia nella espressione del pensiero,* e, *su alcuni punti della storia del calcolo infinitesimale con particolare riguardo alle relazioni tra matematici inglesi e italiani.*

La Sezione dell'Insegnamento matematico ha tenuto cinque sedute, tre delle quali riservate ai lavori della Commissione internazionale dell'insegnamento matematico, di cui apparirà presto un resoconto completo. I delegati hanno depositato più di 280 relazioni distribuite su più di 150 fascicoli costituenti un insieme di oltre 9000 (!) pagine in 8°.

Nella seduta di chiusura del Congresso (27 agosto) è stata approvata a unanimità la seguente proposta:

« Il V Congresso internazionale dei matematici rivolge i suoi ringra-
« ziamenti ai Governi, agli Enti e alle persone che hanno accordato il
« loro aiuto alla Commissione internazionale dell'Insegnamento mate-
« matico;

« decide di prolungare i poteri del Comitato Centrale costituito da « F. Klein (Gottinga); G. Greenhill (Londra) e H. Fehr (Ginevra), e, « accogliendo la richiesta fatta al Congresso medesimo, decide di aggiun- « gere a questo Comitato David Eugène Smith (New-York); prega i dele- « gati di voler continuare nei loro uffici assicurandosi la cooperazione « dei loro rispettivi Governi e proseguendo i loro lavori, e invita la Com- « missione a presentare un ulteriore rapporto al 6° Congresso interna- « zionale e ad *organizzare* nell' intervallo tutte quelle riunioni che sa- « ranno suggerite dalle circostanze ».

Pel 6° Congresso fu acclamata come sede Stocolma, e come epoca il 1916.

Finito di stampare il giorno 31 ottobre 1912.

Alberto Conti : *Direttore Responsabile.*

stata fatta la nuova legge sui Concorsi speciali, ma che, tuttavia, furono senz'altro posposti ad altri, meno anziani e meno forniti di buoni titoli didattici.....

E potremmo continuare ancora..... ma continueremo un'altra volta.....

Solo un'aggiunta ci preme fare, che cioè *si dice ancora* che nelle graduatorie già note non mancano davvero *dei bei nomi, di valore indiscusso e indiscutibile.*

Noi anzi siamo lieti di vedere tra i vincitori più d'uno dei nostri egregi Collaboratori, e ad essi particolarmente rivolgiamo le nostre più vive congratulazioni. LA DIREZIONE

Sesta Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze

È stata tenuta a Genova dal 17 al 23 ottobre 1912 col seguente programma:

Programma generale del Congresso.

Giovedì 17 ottobre: Ore 9 $^1/_2$ - Inaugurazione del Congresso nella Sala del Palazzo Ducale: discorso del Senatore SCIALOJA. — Ore 14 $^1/_2$ - Inaugurazione del Museo Civico di Storia Naturale. — Ore 21 - Ricevimento offerto dal Municipio di Genova.

Venerdì 18 ottobre: Ore 9 - Discorsi a classi unite. — Ore 14 - Sedute di classe. — Ore 17 - Sedute di sezione.

Sabato 19 ottnbre: Ore 9 - Discorsi a classi unite. — Ore 14 - Seduta interna. — Ore 17 - Sedute di sezione.

Domenica 20 ottobre: Ore 9 - Gita per mare e colazione a Rapallo, offerta dal Consorzio Autonomo del Porto di Genova.

Lunedì 21 ottobre: Ore 9 - Discorsi a classi unite. — Ore 14 - Visita agli impianti del Porto e ai monumenti genovesi.

Martedì 22 ottobre: Ore 9 - Discorsi a classi unite. — Ore 14 - Sedute di classe.

Mercoledì 23 ottobre: Ore 9 - Sedute di classe. — Ore 11 - Seduta di chiusura. — Ore 14 - Visita ai cantieri ed altri stabilimenti indurtsiali.

Giovedí e Venerdì 24-25 ottobre: Gita sociale per mare.

Discorsi generali a Classi riunite.

L. DE MARCHI - Tema da destinarsi di Fisica del mare. — G. BRUNI - Tema da destinarsi di Chimica del mare. — G. B. GRASSI - Tema da destinarsi. — A. SCRIBANTI - Il bastimento da commercio. — A. ISSEL - Viaggiatori e naturalisti liguri del Secolo XIX. — C. IMPERIALE - La politica coloniale della repubblica di Genova. — R. BENINI - L'azione recente dell'oro sui prezzi generali delle merci. — P. FOÀ - Le secrezioni interne. — I. GUARESCHI - La storia delle scienze e Domenico Guglielmini. — E. MORSELLI - I limiti della coscienza. — V. ROLANDI RICCI - Correlazione fra l'aumento della ricchezza ed il progresso politico nell'Italia odierna. — P. CANALIS - La difesa contro le malattie esotiche nel porto di Genova. — G. ARIAS - Il porto di Genova nell'economia nazionale.

Discorsi di Classe.

Classe ***A***. — M. ABRAHAM - La teoria della gravitazione. — E. MANCINI - Fotografia stereoscopica e sottomarina. — L. ROLLA - Il terzo principio

della termodinamica. — F. Porro - I grandi cataloghi stellari. — G. Fantoli - Di alcune vedute direttive odierne nelle investigazioni idrografiche ed idrauliche. — E. Jona - I cavi del mediterraneo. — L. Gabba - L'industria dei grassi in Liguria. — F. Giolitti - Tema da destinarsi di metallografia. — P. Vinassa de Régny - Note geologiche su la Libia italiana.

*Classe **B**.* — A. Ghigi - Tema da destinarsi. — C. Parona - Elmintologia italiana. — M. Sella - Biologia della Libia. — E. De Cillis - Le condizioni agricole della Libia italiana. — G. Sterzi - La ipofisi. — Sergi - Fatti e ipotesi su l'origine dell'uomo.

*Classe **C**.* — P. Fedozzi - Nazionalismo e internazionalismo. — M. Moresco - La libertà religiosa in Liguria. — C. Bicknell - Incisioni rupestri delle Alpi marittime. — G. Loria - La storia delle scienze è una scienza. — W. Mackenzie - Biologia e filosofia. — G. Vidari - Ideale etico e ideale pedagogico. — F. Beguinot - Lingue e dialetti della Tripolitania e Cirenaica.

Vi sono state poi numerose Comunicazioni, anche di Matematica pura. Saranno presto stampate sugli Atti del Congresso.

Per G. B. GUCCIA

Con le firme che seguono, è stata diffusa una Circolare speciale, che noi di buon grado riproduciamo, unendoci al plauso tributato al benemerito fondatore del Circolo Matematico di Palermo *e Direttore dei* Rendiconti.

Chiar.mo Signore,

Sono decorsi 25 anni dal giorno nel quale il *Circolo Matematico di Palermo* ha incominciato la pubblicazione dei *Rendiconti*. Questo periodico ha acquistato, col volgere degli anni, un carattere sempre più internazionale e la sua importanza scientifica è andata sempre crescendo.

Tale felice risultato è dovuto all'opera illuminata e costante, alla rara abnegazione del fondatore del *Circolo* e Direttore dei *Rendiconti* Giovanni Battista Guccia, il quale ha consacrato tutto sè stesso alla nobile impresa.

Noi sottoscritti riteniamo che sia opportuno di manifestare a G. B. Guccia, in forma solenne, la riconoscenza del pubblico matematico per quanto Egli ha operato a vantaggio del progresso della Scienza.

Proponiamo perciò che gli venga offerta una medaglia d'oro, appositamente coniata, la quale ricordi la data di fondazione dei *Rendiconti* e ci rivolgiamo alla S. V. affinchè voglia contribuire a raggiungere tale intento.

Michele Luigi Albeggiani, Emilio Almansi, Giuseppe Bagnera, Eugenio Bertini, Luigi Bianchi, Guido Castelnuovo, Ulisse Dini, Enrico D'Ovidio, Federigo Enriques, Giuseppe Lauricella, Tullio Levi-Civita, Gino Loria, Gian Antonio Maggi, Roberto Marcolongo, Giuseppe Peano, Salvatore Pincherle, Paolo Pizzetti, Gregorio Ricci-Curbastro, Gaetano Scorza, Corrado Segre, Francesco Severi, Carlo Somigliana, Orazio Tedone, Adolfo Venturi, Giuseppe Veronese, Giulio Vivanti, Vito Volterra.

Le sottoscrizioni vanno inviate al Prof. Lucio Silla, Piazza S. Pietro in Vincoli, n. 5 — Roma.

NOTIZIE SUI CONCORSI

Concorso generale à 110 cattedre di matematica nelle scuole tecniche (100 maschili e 10 femminili).

Graduatoria per i maschi.

Vincitori: Rietti, Martinetti, Tocchi, Pasotti, Pistolesi, Belliboni, Pasquino, Tortorici, Senigaglia, Di Lando, Tancredi, Nicoletti, Antonelli, Ghigi, Sinapi, Vitanzi, Sicca, Gianasso, Moschitti, Moschetti, Scattone, Rossetti, Casali, Fresta, Brussone, Piattelli, Lorenzetti, Giovanetti, Fagiolo, Scattaglia, Venturini, Di Dia, Palmiotti, Bassan, Tirella, Ognissanti, Medecin, Lolina, Licini, Piana, Ricaldone.

Idonei: Bettini, Fabiani, Petronio, Sangiorgio.

Graduatoria per le donne.

Vincitrici: Peyrolesi, Ferrari, Abbia, Zabelli, De Castro, Girelli, Rigatti, Bellerini, Paganuzzi, Stefoni.

Idonee: Colonbo, Gaido, Moech, Astuti, Gradara, Mori-Breda, Precchia, Giusto, Osimo, Cartasegna, Zona, Dal Co, Della Bitta, Molinari, Foà, Chianchetti.

Concorso speciale a cattedre di matematica di Scuole Normali.

Vincitori: Marletta, Dell'Acqua, Benedetti, Predella Lia, Amato, Volpi, Bassi, Cordone, Manfredini, Tenca, Galvani, Cattaneo, Trafelli, Teofilato, Crespi Isabella, Cherubino, Da Rios Sante.

Designati per sedi di secondaria importanza: Pavanini, Loria, Rocchetta.

Concorso speciale a cattedre di matematica e scienze delle R. Scuole Normali Maschili.

Vincitori: Rota, Manfredini, Annibale, Trafelli, Carosi, Feliciani.

Concorso speciale a cattedre di matematica di Scuole Tecniche.

Vincitori: Stasi, Fiorentini, Minetola, Frezza, Foà, Vecchi, Tesorone, Marasco, Zappetta, Giulotto, Pavanini, Saluta, Composto, Gennari, Bocchetta, Tummarello, Scaccianoce, Cherubino, Usai, Correnti.

Vincitrici: Crespi, Pellizzari, Nalli.

Concorso generale a 16 cattedre di matematica dei R. Licei e Istituti tecnici.

Vincitori: Levi, Sansone, Usai, Cherubino, D'Escamard, Tognelli, Carosi, Pavanini, Pampana, Da-Rios, Fiorentini, Morone, Vergerio, Susani, Scrosoppi, Fortunato.

Idonei: Pistolesi, Rietti, Rossetti, Ceccherini, Tancredi, Chillemi, Aprile, Gamberini, Chini, Tocchi, Ghezzi, Paci, Chionio, Polidori, Vercelli, Loria, Pistelli, Vitolo, Mari, Bocchetta, Pession, Mago, Tagliarini, Gianasso.

Questioni proposte nelle discussioni orali per i concorsi a cattedre di scuole medie

1. — Dimostrare che l'equazione $(a_{11}+x)(a_{22}+x)-a^2_{12}=0$ ha le radici reali. Idem per $(a_{11}x+b_{11})(a_{22}x+b_{22})-(a_{12}x+b_{12})^2=0$ nella ipotesi che $b_{11}b_{22}-b^2_{12}>0$. Generalizzazione.

2. — Su due rette di un piano sono fissati due punti A ed A'; per un punto 0 del piano condurre una retta che tagli le due date in due punti M ed M' tali che $AM:A'M'=k$.

3. — Radici delle equazioni $\operatorname{sen} x=0$, $\cos x=0$, $\operatorname{tg} x=0$, $x=\operatorname{tg} x$.

4. — Condizione perchè una equazione di 2° grado abbia una radice che sia doppia dell'altra.

5. — Risoluzione del sistema:

$$ax^2+2hxy+by^2=c; \quad a_1x^2+2h_1xy+b_1y^2=c_1.$$

Interpretazioni geometrica.

6. — Della trasformazione per raggi vettori reciproci, proprietà più notevoli.

7. — Studio delle curve $y=x^2$, $y=x^3$.

8. — Su di un segmento di lunghezza a determinare un punto in modo che la somma dell'area del quadrato costruito sopra una delle due parti e del triangolo equilatero costruito sull'altra, sia eguale ad un quadrato dato. Discussione col sussidio d'una parabola.

9. — Somme delle potenze (dello stesso esponente) dei termini di una progressione aritmetica. Ricerca dei primi due termini di $1^k+2^k+\cdots+n^k$.

10. — Fra tutti i cilindri che hanno la stessa superficie totale, trovare quello che ha il volume massimo.

11. — Risoluzione delle equazioni:

$$x^4+ax^3+ax+1=0 \quad , \quad x^4+ax^3-ax-1=0$$
$$ax^4+bx^3+cx^2+mbx+m^2a=0.$$

12. — Date due rette in un piano, condurre per un punto del piano una retta che formi con le prime due un triangolo equivalente ad un quadrato dato.

13. — Trovare il:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}\, n^k$$

essendo k intero e positivo.

SOMMARIO:

straniere.

h) Resoconto dei Congressi di matematica, italiani e stranieri

i) Relazioni e graduatorie dei Concorsi per cattedre di matematica; notizie del personale insegnante.

l) Una rubrica (*rubrica intermediario*) destinata ad accoglier da tutti i lettori domande intorno a qualsiasi argomento compreso ne programma del periodico, e che accoglierà altresì le risposte via vi date alle dette domande dai lettori medesimi o dalla Direzione.

La quota d'abbonamento è di L. 6,50 per l'Italia (L. 7,50 per l'Estero).

L'abbonamento può esser preso in qualunque momento dell'anno ma termina coll'anno stesso; e la Direzione non garantisce di poter inviare tutti i numeri dell'annata a partire dal primo, a coloro che assumono l'abbonamento dopo il febbraio.

L'ammontare della quota d'abbonamento dev'essere pagato in una sola volta e anticipatamente.

La ricevuta delle quote vien data sulla copertina del *Bollettino*, a meno che non si tratti di Enti, (Istituti, Comuni, Biblioteche ecc.) che ne facciano speciale richiesta.

I fascicoli del " BOLLETTINO DI MATEMATICA „ portano la numerazione, d'anno in anno, da 1 a 12, ma escono di regola ogni due mesi. La Direzione si riserva il diritto di raccogliere in un sol fascicolo due o più numeri, all'intento di dare un proporzionato sviluppo a tutte le principali rubriche. In ogni caso l'annata comprende almeno 20 fogli (di 16 pagine ciascuno) di testo e 24 pagine almeno di copertina colorata interna.

AVVERTENZA PEI NUOVI SOCI

Non è più disponibile alcuna collezione completa, essendo esaurita l'annata II e l'annata VII. Sono però disponibili alcune copie (*ben poche ormai*) delle annate I, III, IV, V, VI, VIII, IX e X a prezzi da convenirsi, di volta in volta, a seconda della richiesta.

ESTRATTI

Per gli estratti dei loro articoli, gli Autori devono farne l'ordinazione direttamente alla *Tipografia Cuppini* (*Bologna Via Castiglione 8*), e non più tardi del giorno in cui essi hanno rispedito le bozze.

Anno XI *Roma 1912* *N. 9-10-11-12*

Che cos' è la matematica? [1]

ALESSANDRO PADOA (Genova)

A circa due millenni e mezzo risalgono sicure testimonianze del misterioso prestigio onde la Matematica si cinse per sempre al cospetto degli uomini; e l'eco non è ancor spenta del grido di reverente ammirazione che salutò le scoperte con le quali il genio di Talete e di Pitagora arricchì quel primo tesoro di coltura geometrica ed astronomica, che i Fenici e gli Egizi avevano accumulato nei secoli.

E, quantunque molte altre dottrine, che in quel tempo remoto germinavano appena, sian oggi in pieno rigoglio di sviluppo e producano fiori e frutti in gran copia, ancora non è chi non veneri l'antica quercia gloriosa, e nella Matematica non riconosca la Scienza delle scienze.

D'onde così universale consenso?

Certo, fra i popoli civili non v'è uomo così incolto che delle nozioni matematiche fondamentali non si giovi ormai quotidianamente, nei più semplici atti di compra-vendita o nell'esercizio dei più umili mestieri; ma egli le ha trovate diffuse intorno a sè, come l'aria e la luce, e di nulla forse stupirebbe quanto di ap-

---

(1) Discorso pronunciato in Genova il primo dicembre 1912, inaugurandosi il secondo anno scolastico dell'Istituto superiore scientifico di magistero. Lo lascio inalterato, sperando che il lettore voglia aver presenti le tiranniche esigenze di un discorso, là ove egli sentisse desiderio di più ampio sviluppo o del conforto di esempi.

prendere che vi fu tempo in cui, anche per i dotti, tali nozioni erano ignote o malcerte.

Sicuramente, chiunque abbia frequentato una scuola — ancorchè la Matematica gli abbia inspirato più sgomento che simpatia ed ora non se ne giovi più dell'uomo incolto — non può non avere intuito, sia pur vagamente, il pregio e l'importanza di tale disciplina.

Ma forse, ad una fama così concorde, diffusa, e durevole — più che la diretta persuasione delle moltitudini, cui fu e sarà sempre vietata l'intima conoscenza del vero, più che il fervore apologetico de' suoi scarsi cultori, la cui voce si spegne entro breve cerchia — hanno contribuito e contribuiscono coloro, di più vasta ma pur eletta schiera, che, dopo aver attinto da essa vital nutrimento, mirabilmente lo trasfondono nella Meccanica e nell'Astronomia, nella Fisica e nella Chimica.

Costoro, le cui opere e i cui nomi sono più noti al volgo e che più specialmente egli chiama scienziati, sono gli autorevoli testimoni al cospetto universale della generalità delle formole matematiche e della piena attendibilità dei risultati cui esse conducono. E, loro mercè, il prestigio della Matematica è ormai così indiscusso, che ogni nuova dottrina, la quale abbia con essa meno naturali e immediate attinenze, aspira ad imparentarsi in qualche modo con lei, per nobilitarsi ed assurgere — non sempre meritamente o forse un po' prematuramente — al grado e all'onore di Scienza.

Ma — se, pur fra gli scienziati, i più la stimano per la fecondità delle applicazioni — al pensatore invece essa appare sovratutto mirabile per la ineccepibile validità degli asserti e per la inoppugnabile vigoria delle argomentazioni: per cui — mentre intorno a lei le ipotesi scientifiche ed i sistemi filosofici sorgono, risplendono, tramontano e cadono nell'oblio — essa sola appare salda e immutabile, quasi fosse in lei qualche intima e misteriosa virtù che la preservi dalla caducità o dall'incessante rinnovellarsi d'ogni umana dottrina.

Gli è appunto a proposito di tal virtù, vera o presunta, che vorrei dirvi alcunchè di quanto io penso, per quanto possa consentirmelo il proposito di essere breve e il desiderio di evitare analisi tecniche affaticanti.

*
* *

Nelle consuete classificazioni delle scienze, la Matematica vien posta fra la logica deduttiva e le scienze sperimentali; ma tale collocazione consente ancora qualche perplessità.

Ha la Matematica qualche carattere peculiare per cui essa debba starsene solitaria nel posto assegnatole? ovvero, più che fornire un mirabile esempio di applicazione della Logica deduttiva, non sarebbe di questa lo spontaneo ed immediato proseguimento? ovvero, proprio da essa, che porge così valido anzi indispensabile ausilio alle Scienze sperimentali, non incomincierebbe la lunga schiera di queste?

La prima tesi — per cui la Matematica viene pensata come un tutto per sè stante, senza negare per questo ed anzi riconoscendo le sue immediate attinenze con la Logica deduttiva e con le Scienze sperimentali — corrisponde alla tradizione ed all'opinione volgare. Questa tesi ha la sua consacrazione nei nostri ordinamenti scolastici ed è quindi la meno compromettente; è altresì la meno significante e perciò la più facilmente accetta.

La seconda — per cui la Matematica dovrebbe in certo modo aggregarsi alla Logica deduttiva — gode oggi qualche favore, sovratutto per l'opera di un matematico inglese, il Russell, e di un filosofo italiano, il Croce.

La terza tesi — per cui la Matematica va considerata quale Scienza sperimentale, al pari della Fisica e della Chimica — è quella che mi appresto a sostenere dinanzi a voi, per quanto ciò possa sembrare strano a chi conosca soltanto la veste aridamente simbolica di alcuni miei scritti.

*
* *

Ma prima devo almeno accennare alle opinioni dei due pensatori, che molto probabilmente si ignorano a vicenda, e di cui ho avvicinato i nomi molto arditamente, poichè non potrebbero esserne più diverse la preparazione anteriore e l'indole intellettuale, nè più opposte le tendenze.

Il Russell, in un suo lavoro poderoso, scritto in parte con la collaborazione del Whitehead, dopo avere svolta e molto ampia-

mente la Logica, inspirandosi all'opera geniale del nostro Peano, stabilisce ogni concetto ed ogni asserto — non pur dell'Aritmetica, ma di ogni più elevato ramo dell'Analisi — ricorrendo esclusivamente a definizioni nominali e ad argomentazioni deduttive.

Ora, comunque vengano giudicati sott'altri aspetti, i suoi volumi, certo è ch'essi costituiscono un nobile atto di glorificazione della Matematica, mirando a salvaguardarne i principii da ogni possibile critica filosofica e a indicarne minuziosamente lo svolgimento in forma impeccabile.

Il Croce invece, che non si è peritato a dichiarare la Matematica occupazione propria degli ingegni minuti non atti ai larghi voli metafisici, e che dell'indiscusso riconoscimento del suo valore sembra si sia adombrato come di un'offesa personale, l'ha condannata con disinvolta sicurezza, quasi senza processo.

A suo avviso la Matematica — proponendo a sè stessa l'oggetto delle sue ricerche mediante definizioni nominali, ed argomentando poi solo deduttivamente — sarebbe necessariamente impeccabile; ma perciò appunto i concetti e gli asserti matematici sarebbero privi di *realtà*, nell'accezione filosofica di tale parola.

Codesto capzioso modo di spiegare la perfezione della Matematica, negandole ogni pregio sostanziale, col farla apparire un vano giuoco del pensiero, richiama alla mente quei decreti coi quali qualche comandante valoroso viene nello stesso istante promosso a generale e messo in riposo,

Comunque — e quale che sia sott'altri aspetti il valore filosofico della vasta ed assidua opera del Croce — certo è che, in alcuni seguaci, alla ammirazione deve unirsi la riconoscenza al Maestro che autorevolmente li esonera dalla preoccupazione, per essi molesta e non lieve, di penetrare, un po' più addentro che egli non abbia fatto, nell'intima essenza del sapere scientifico.

Il detto volgare « dimmi con chi vai e ti dirò chi sei » andrebbe qui invertito « dimmi in quale compagnia mi collochi e ti dirò come mi giudichi ». Invero — benchè il Russell ed il Croce concordino nell'abbattere, o meglio nel negare, ogni separazione tra la Logica deduttiva e la Matematica — le loro opposte intenzioni sono chiaramente lumeggiate dal diverso valore ch'essi attribuiscono alla Logica stessa; giacchè — mentre il Croce ripete, consapevolmente o no, gli antichi sofismi, invano mille volte confutati, per cui l'argomentazione deduttiva sarebbe una forma

illusoria di attività intellettuale — il Russell invece è un cultore appassionato ed acuto della Logica, e ritiene ch' essa nobiliti ogni ramo dello scibile che da lei, e da lei soltanto, possa ripetere la sua origine

Inoltre, per quanto vasta sia la indagine del Russell, essa abbraccia soltanto l'Aritmetica, l'Algebra e quelle parti delle Matematiche superiori che poggian su queste basi, rimanendone dunque esclusa la Geometria; mentre anch' essa avrebbe dovuto restar ferita a morte dall'apologia denigratoria del Croce.

Ora, con buona pace di questi — che ogni concetto matematico ritiene costruito dall'intelletto con semplici definizioni nominali ed ogni asserto matematico ritiene frutto di argomentazioni deduttive poggianti su tali definizioni — bastava che egli desse un'occhiata a qualsivoglia trattato di Geometria, da quello antichissimo di Euclide sino a' più recenti, per accorgersi che nessun *concetto geometrico* fu mai definito senza ricorrere a qualche *altro* concetto geometrico e che nessun *asserto geometrico* fu mai dimostrato senza ricorrere a qualche *altro* asserto geometrico, oltre a quelli espressi dalle definizioni.

*
* *

È noto che ogni scienziato — nella accezione volgare di tale parola, che esclude il logico, annoverato invece tra i filosofi — ogni scienziato, dicevo, presuppone anzitutto la Logica deduttiva. Invero, nei comuni trattati scientifici, ad esempio di Geometria e di Fisica, l'autore attinge dal linguaggio *ordinario* l'espressione più familiare dei *concetti logici* e dal cosidetto *senso comune* gli *asserti logici*, ch' egli chiama anche « *assiomi* »; e vi attinge man mano che gli giova, senza indugiarsi a redigerne un elenco e tanto meno ad analizzarli.

L'autore esplica invece tutta la sua attività logica nel *definire concetti* e nel *dimostrare asserti* che spettino esclusivamente alla Scienza di cui si occupa.

Ed anzitutto che cosa significa per lui *definire?* Fortunamente egli non tien conto di alcuno dei vieti precetti della Logica scolastica; lo scienziato — cui non importa distinguere un *concetto* dalla *parola* che lo esprime — *definisce* ogni qualvolta riesca a dichiarare il *significato* di *una* parola o frase mediante *altre* pa-

role o frasi, il cui significato egli ritenga già noto; purchè tra il *definito* e il *definente* stabilisca perfetta *eguaglianza*, sicchè al lettore sia poi lecito, dovunque e quando gli piaccia, sostituire al definito il definente od inversamente.

Per lui, nessun concetto pertinente alla sua scienza è *assolutamente indefinibile*, come erroneamente ha creduto Blaise Pascal, quando asseriva che « il y a des mots incapables d'être définis... parce que ces termes-là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient... que l'éclaircissement qu'on en voudrait faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction ». E ciò egli non ammette per due ragioni semplicissime: 1° perchè nessun termine designa *naturalmente* alcuna cosa; 2° perchè non ha alcun senso l'asserire che *un* termine può o non può essere definito, quando non si dichiari a quali *altri* termini si consente o si vieta di ricorrere nella chiesta definizione.

Gli è invece, come ho accennato, che nessun Geometra e nessun Fisico è mai riuscito a *definire* alcuna parola del suo vocabolario *tecnico* ricorrendo esclusivamente alle parole « qualche, nessun, ogni, e, o, non,... » che sole spettano al vocabolario *logico*. E perciò il Geometra ed il Fisico, proprio all'inizio della loro trattazione, si trovano costretti ad usare *alcune* locuzioni tecniche senza definirle ed a giovarsi di esse per definirne poi *altre* successivamente; ognuna delle quali sarà ben definita in ciascun trattato, in quanto sia interamente espressa con locuzioni ivi già adoperate.

Solo in tal modo lo scienziato riesce ad evitare quei circoli viziosi da cui non possono salvarsi gli autori di vocabolari, desiderosi di *tutto* definire; e di cui, ad esempio, chiunque può leggere nell'ottimo Larousse questo grazioso saggio: « coq = mâle de la poule » — « poule = femelle du coq ».

Quel che ho detto ora sembra dar ragione a Blaise Pascal e contraddire la mia critica; « sembra » perchè, se è *necessario* che il Geometra ed il Fisico ricorrano a *qualche* locuzione tecnica *senza definirla*, gli è consentita però qualche libertà di *scelta*, nel cui uso appunto si manifesta in gran parte la sua genialità di trattatista. Risulta perciò non esservi locuzione non definita in un trattato che non possa esserlo in un altro; e quindi nessuna può affermarsi *incapable d'être definie*.

*
* *

Comunque — se il trattato vuol essere d' indole elementare, vuol cioè esporre una possibile *costruzione* immediata di quella scienza e non una *ricostruzione* raffinata, intelligibile ed utile soltanto a chi abbia già dimestichezza con tutto il suo vocabolario speciale — è necessario che le parole tecniche *non definite* siano fra quelle che già hanno assunto cittadinanza nel linguaggio ordinario, esprimano cioè concetti che, traendo origine da semplici *intuizioni*, si sono già formati, anche in intelletti incolti, mediante gli abituali procedimenti *psicologici* di confronto e di scelta, di coordinazione e di subordinazione, di classificazione e di astrazione.

E cui, ciò non ostante, sembrassero mere finzioni del pensiero il punto e la retta del Geometra, osserverei che non diversamente allora egli deve giudicare il punto materiale ed il raggio luminoso isolato del Fisico.

Quasi sempre l' autore, pur non definendo alcune parole, non tralascia però di commentare ciascuna di esse in chiose, sovente utilissime ma che non fanno parte della teoria. Non vi si indugia, se questa parola ha già nel comune linguaggio un *solo* e preciso significato; se invece ne ha parecchi, manifestamente distinti e precisi, gli basta dichiarare quell' *unico* tra essi ch' egli le attribuirà e fissarne la *scelta* con opportuni esempi *intuitivi*. Altre volte però il significato tecnico della parola è alquanto diverso da tutti quelli che volgarmente le vengono attribuiti; ed allora — con appropriati richiami all' intuizione e con sottili insospettate distinzioni — egli contribuisce alla formazione del *concetto* corrispondente, affrettando ed integrando così il lavorio psicologico accennato, di cui ogni intelletto normale è capace, ma che non in tutti si svolge con eguale rapidità ed intensità.

E si badi che — mentre un lettore privo di esperienza metodologica può credere ingenuamente che le parole tecniche *definite* abbiano in qualche modo maggior *dignità scientifica* di quelle *non definite* — effettivamente la dignità scientifica delle une e delle altre è la medesima: la piena e chiara determinazione del concetto espresso da ciascuna parola definita dipendendo unicamente dalla piena e chiara determinazione del concetto espresso da ciascuna parola non definita.

Inoltre, se si dovesse metterle in gara di importanza, quelle definite giovano soltanto alla *concisione* — pregio senza dubbio grandissimo, ma non essenziale — mentre invece, per quanto ho detto, le non definite sono *necessarie*.

Anzi, se un lettore non si sgomentasse di sacrificare ogni esigenza di comodità verbale, egli sarebbe pienamente autorizzato a sopprimere ad una ad una tutte le definizioni, sostituendo dovunque al definito il definente, così da ridursi ad esprimere tutto il contenuto di quel trattato con le sole parole tecniche non definite; le quali per tal modo si chiariscono sostanzialmente *sufficienti*, oltrechè necessarie.

Sicchè, per riassumere queste considerazioni inoppugnabili in una forma paradossale, che più apertamente contrasti alla tesi filosofica criticata, ogni trattato scientifico di null' altro effettivamente si occupa fuorchè di ciò ch' esso non definisce.

***

Ed ora dai concetti passiamo agli asserti.

Mediante un' osservazione od un esperimento un Fisico accerta un *fatto*; se questo gli appare notevole, egli estende il campo delle sue osservazioni e dei suoi esperimenti per accertare altri fatti analoghi; poi, con cauto ardimento *induttivo*, da quei singoli fatti egli osa assurgere ad una *legge* cui assegna validità più ampia che le sue osservazioni ed i suoi esperimenti non consentirebbero, nè potrebbero mai consentire: le leggi fisiche essendo giudizi universali, racchiudenti infiniti giudizi singoli, di alcuni soltanto dei quali è quindi possibile l'accertamento.

Altra volta però egli giunge alla scoperta di una legge con semplici argomentazioni logiche; egli riesce cioè a porre in luce che codesta legge è *conseguenza* di altre leggi già note e comunemente *ammesse*.

Volgarmente, si dice in ambo i casi che l'asserto è *dimostrato*; ma il Fisico distingue le due specie di dimostrazione, chiamando l'una *sperimentale* e l'altra *deduttiva*.

E in ciò apparentemente differisce dal Geometra, il quale chiama dimostrazioni soltanto le deduttive. Dico apparentemente, perchè nè il Geometra nè il Fisico sono riusciti ancora, come ho accennato, a dedurre alcun loro asserto dagli asserti logici o *assiomi*

(quali il principio d'identità, di contraddizione, del terzo escluso, ecc.; e perciò l'uno e l'altro, proprio all'inizio della loro trattazione, si trovano costretti ad ammettere alcuni asserti tecnici — che il Fisico chiama *leggi sperimentali* ed il Geometra chiama *postulati* — ed a giovarsene, assieme alle definizioni ed agli assiomi, per dedurne poi successivamente altri asserti — che il Fisico chiama *conseguenze* delle leggi sperimentali ed il Geometra chiama *teoremi*.

Lo scienziato non ammette che alcun suo asserto sia *assolutamente indeducibile*, come erroneamente ha creduto Blaise Pascal, quando scriveva che « on arrive nécessairement... à des principes si claires qu'on n'en trouve plus qui le soient davantange pour servir à leur preuve ». E ciò non ammette perchè non ha alcun senso il dire che *un* asserto può o non può essere dedotto, senza dire da quali *altri* asserti; e perchè la *necessità* in cui egli si trova di ammetterne alcuni senza dimostrazione deduttiva non gli vieta qualche libertà di *scelta*, nel cui uso appunto compie di esplicarsi la sua genialità di trattatista; ed infatti ogni lettore che si prenda la cura di confrontare vari trattati può rilevare sovente che un medesimo asserto in taluno si presenta quale postulato ed in tal altro quale teorema.

Nè il fatto che siano dimostrati conferisce ai teoremi il diritto di inspirare maggior *fiducia* dei postulati, poichè la verità dei teoremi dipende da quella dei postulati e dalla legittimità logica delle argomentazioni.

*
* *

Quale divario è dunque fra un trattato di Geometria ed un trattato di Fisica? Che in quello di Geometria i *postulati* sono *pochi*, rispetto ai teoremi, e vengono semplicemente enunciati o brevissimamente chiosati, per dare invece ampio, minuzioso sviluppo alle argomentazioni deduttive, che sole vengono chiamate dimostrazioni; e che in quello di Fisica, invece, le *leggi sperimentali* sono *molte*, e vi si trovano riferite ampiamente le osservazioni e le esperienze che hanno condotto alla loro scoperta od alla loro conferma, mentre le loro conseguenze deduttive sono esposte con rapidi cenni, fatti ancor più brevi dall'uso di formule matematiche.

Divario adunque solo quantitativo, dove non è apparente; perchè se la Logica insegna del pari alla Geometria ed alle Scienze sperimentali l'arte del definire e del dedurre, però non fornisce loro alcun concetto ed asserto; che esse traggono invece, mediante elaborazione psicologica, dalla conoscenza *intuitiva* e *sperimentale* del mondo *reale*.

Un divario v'è nella diversa facilità di eseguire le esperienze comprovanti o non contrastanti la verità di un postulato geometrico o di una legge fisica; le prime essendo quasi sempre immediatamente ripetibili da chiunque, senza particolari istrumenti; le seconde invece richiedendo l'ausilio di apparecchi delicati, che non possono essere adoperati utilmente da mani inesperte. Inoltre, mentre il mondo geometrico è perfettamente omogeneo, sicchè pronta e poco insidiosa è l'ascesa dal fatto singolo alla legge generale, il mondo fisico invece è inesauribilmente vario, ed ogni fenomeno è così complesso, che molta pazienza e molto acume si richiedono per sceverarne le circostanze essenziali dalle accessorie.

E questo fuggevole accenno alle maggiori difficoltà frapposte al progresso della Fisica basti a spiegare perchè oggi soltanto essa si avvii a quel grado di perfezione cui già da secoli è pervenuta la Geometria. Le quali due Scienze mi sembrano perciò paragonabili a due pianeti, che, pur appartenendo ad un medesimo sistema, si trovano in diversa fase di sviluppo.

*
* *

Ma, pur lasciando da parte ogni ulteriore raffronto tecnico che qui non sarebbe opportuno, voglio indurvi per un istante a pensare che vi fu tempo in cui la Geometria — nata dai bisogni dell'Agrimensura, donde trasse il nome — era in contatto più intimo che oggi non appaia con l'intuizione e l'esperienza; e che essa dovette subire ben laboriose e profonde trasformazioni prima di assumere l'assetto ordinato e solido che oggi presenta.

A tal fine, convien risalire oltre i tre sommi geometri dell'antichità — Euclide, Archimede ed Apollonio — e soffermarsi ad alcuni loro precursori storicamente noti, per trovare negli in-

certi e scarsi cenni biografici un indizio della loro complessa e multiforme attività intellettuale [1].

Invero, Talete dedicò i primi suoi anni a privati e pubblici affari; e proprio dai suoi negozi fu tratto in Egitto, ove ebbe occasione di apprendere Geometria ed Astronomia; già maturo di anni abbandonò i commerci e fondò a Mileto la prima scuola greca di Matematica e di Filosofia. E fama egli ebbe sovratutto per aver misurato, mediante una proporzione, l' altezza delle Piramidi egizie, confrontandone l' ombra a quella del suo bastone, e mediante un triangolo, la distanza di una nave in alto mare, osservata dal basso e dal sommo di una torre di altezza nota; e per aver presagito un' eclisse solare, forse servendosi di effemeridi egizie o caldee.

Pitagora si temprò anzitutto viaggiando nell' Asia minore e in Egitto; nella natìa Samo non ebbe fortuna, e già quarantenne emigrò in Sicilia, poi a Taranto e da ultimo a Crotone, ove fondò la celebre Scuola; nè mai lasciò d' occuparsi ad un tempo di Matematica, di Filosofia e di Politica, suscitando anzi accese ire di parte ch' ebbero triste epilogo nell' assassinio suo e di alcuni seguaci.

Ippocrate fu un mercante di Chio, che, recatosi in Atene per ricuperare una proprietà della quale riteneva essere stato defraudato, per campare, mentre proseguiva la lite, aprì una scuola di Geometria.

E d'altronde Archimede pur ritenendo, al pari di Platone, il filosofo non essere tenuto ad applicare la Scienza agli usi comuni, proprio alle sue invenzioni e scoperte d'indole pratica deve gran parte della sua fama: dalla vite alla ruota dentata, dagli specchi ustori alle catapulte.

A mio avviso dunque nessun carattere originario d' indole storica o filosofica distingue la Geometria dalle Scienze sperimen-

[1] Per i cenni seguenti mi sono valso del *Breve Sommario della storia della Matematica* compilato dal dott. DIONISIO GAMBIOLI — Bologna, Zanichelli, 1902.

tali; gli è unicamente per il diverso campo d' indagine che essa se ne differenzia, come in tal modo le Scienze sperimentali si distinguono fra loro.

Ma, avendo il campo di investigazione della Matematica terreno più compatto e meno accidentato, riuscì più agevole delineare e consolidare i confini entro i quali essa svolge la sua attività inesausta e inesauribile. Quelli invece che sono interposti fra le varie Scienze sperimentali appaiono oggi ancora qua e là provvisori, dovuti sovente ad esigenze di divisione del lavoro corrispondenti a fasi di cultura ormai superate; e perciò talvolta giova abbattere o rimuovere qualche siepe e tal altra conviene farne sorgere, a suddividere un campo che si riveli troppo vasto ed eterogeneo per essere investigato utilmente da una sola schiera di lavoratori.

E d'altronde ciò accade proprio ai nostri giorni a proposito dell' Aritmetica, che parrebbe essere uscita armata dal cervello dell'uomo, come Minerva da quello di Giove.

Nata col bisogno del pastore di noverare il suo gregge, tuttavia, quale è volgarmente conosciuta, attraverso le cifre ed i segni consueti, è molto più recente della Geometria: un tempo le operazioni aritmetiche venivano eseguite con veri *calcoli*, cioè con sassolini, e più tardi col pallottoliere, sicchè nei conteggi i numeri erano materialmente rappresentati da gruppi di oggetti.

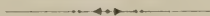
Pochi decenni fa l'Aritmetica, quale teoria deduttiva, emergeva ancora confusamente dal sapere volgare, senza alcuna analisi de' suoi concetti fondamentali e de' suoi postulati; quasi gli uni e gli altri occorressero soltanto per la Geometria. Fu merito principalmente del Dedekind, del Frege e del Peano, l'aver posto in chiara luce che l' Aritmetica non poteva svolgersi deduttivamente senza un sistema di *concetti* desunti dall' *intuizione* e di *asserti* desunti dall' *esperienza*.

Che se questo non appare nella recentissima opera accennata del Russell, gli è solo che questi ha allargato il campo tradizionale della Logica deduttiva, includendovi altri concetti ed altri asserti mediante i quali egli ha potuto legittimamente considerare l'Aritmetica un semplice proseguimento della Logica deduttiva. E perciò il mio dissenso da lui è solo a proposito di un criterio di opporunittà, circa l' estensione da attribuirsi alla Logica.

E del resto, come il Fisico conosce l'ansia di cercare nell'esperienza la conferma o la smentita di una nuova legge vagamente intuita, così l'Aritmologo si affatica indarno, con alterne speranze e delusioni, a meditare ad esempio su alcune proprietà dei numeri asserite da Fermat e da Goldbach, che migliaia di esperimenti non hanno smentito ma che nessun ragionamento ha ancora convalidato.

Che cosa è dunque per me la Matematica?

È la più antica e veneranda, fra tutte le Scienze sperimentali ed è la buona sorella maggiore — vigorosa di giovinezza eterna — che più sicura e più destra, non solo porge incessante e valido aiuto alle minori — varie d' anni e d' aspetto, ciascuna intenta ad un suo proprio lavoro — ma vigila sugli ostacoli che si frappongono all' opera di ciascuna, per escogitare, ove possa, nuovi strumenti atti a superarli.

E alle sorelle sue, e con esse agli uomini tutti, porge il salutare esempio d'ogni migliore e più feconda virtù : educando a disinteressata e infaticabile ricerca del vero, a consapevolezza ed onestà intellettuale, a giusta estimazione di sè scevra di vanità, e ad incrollabile fede nel progressivo sviluppo del sapere, per cui l' uomo — trascendendo le proprie origini — perfora i monti, varca gli oceani, si libra nell' aria e lancia i suoi messaggi per l' etere.

SULL' ESISTENZA DELLA QUARTA PROPORZIONALE

FRANCESCO PODETTI (Novara)

1. È noto come dal postulato della continuità del Dedekind discenda immediatamente il postulato di Archimede, e discenda anche la possibilità di dividere un segmento in un qualsivoglia numero di parti uguali (1).

Mi propongo di dimostrare la esistenza di un segmento quarto proporzionale dopo altri tre, come conseguenza dello stesso postulato di Dedekind e indipendentemente dalla teoria delle parallele.

In questa dimostrazione mi varrò delle prime proposizioni del V libro di Euclide, e della proposizione seguente che consegue dal postulato di Archimede e dalla divisibilità del segmento in parti uguali:

« Dati due segmenti diseguali a e b $(a < b)$ ed un terzo segmento c, esistono due interi assoluti m ed n per cui si ha: $a < m\frac{c}{n} < b$ ».

È inoltre ovvia la estensione che di questa dimostrazione può darsi per tutte quelle classi di grandezze che sono continue nel senso di Dedekind (2).

---

(1) Cfr. F. Enriques: *Questioni riguardanti le matematiche elementari* — Bologna, Zanichelli, 1912 - 1° Vol. (Art. V. di G. Vitali).

(2) La dimostrazione della 18ª prop.e del V libro di Euclide, come si trova nel testo originale, ammette implicitamente la esistenza della quarta proporzionale (Cfr. Enriques - Op. cit. - Art. VII di G. Vailati - pag. 213-214). Sulla esistenza della quarta proporzionale, ammessa per postulato, sono pure fondate le teorie delle proporzioni che si trovano in alcuni testi del XVII secolo, come, ad esempio in quello dovuto a G. A. Borelli (*Euclides restitutus* - Pisa, 1658).

2. Dati tre segmenti a, b, c è sempre possibile determinare un quarto segmento e tale che a abbia a b maggior ragione [1] che c ad e, ciò che esprimeremo scrivendo $\frac{a}{b} > \frac{c}{e}$. Sia il segmento AB uguale al segmento e ora determinato.

I punti del segmento AB si possono pensare divisi in due parti:

1°) punti S pei quali si ha $\frac{a}{b} > \frac{c}{AS}$;

2°) punti R pei quali sia $\frac{c}{AR} = \frac{a}{b}$ [2], ovvero $\frac{c}{AR} > \frac{a}{b}$.

Si ottiene così una ripartizione della totalità dei punti di AB che soddisfa al postulato di Dedekind, perchè:

α) Ogni punto del segmento AB appartiene ad una e ad una soltanto delle due parti.

Infatti questo punto, quando non sia lo stesso punto A, determina con A un segmento, di cui A e il punto considerato sono gli estremi, che indicheremo con h. Se avrà luogo la proporzione $a : b = c : h$, il punto considerato sarà un R. Se non avrà luogo l'accennata proporzionalità, dovrà verificarsi l'esistenza di una coppia di numeri interi assoluti m ed n tali che si abbiano contemporaneamente verificate le disuguaglianze $ma > nb$ ed $mc \leqq nh$ [3] ovvero le altre $ma \leqq nb$ ed $mc > nh$ [4].

---

(1) Euclide - lib. V, def. 7ª. - Basta determinare due interi m ed n tali che si abbia $na > mb$, ed infine determinare e in modo che sia $e \geqq n \frac{c}{m}$.

(2) Euclide, lib. V. def.ᵉ 5ª.

(3) A questo caso si riconduce l'altro in cui si abbia $ma = nb$ ed $mc < nh$: Infatti si ha allora $c < n \frac{h}{m}$, e per determinati interi m_1 ed n_1 si avrà $c < n_1 \frac{h}{m_1} < n \frac{h}{m}$. Ne risulta, $n_1 \frac{b}{m_1} < n \frac{b}{m}$, ed avendosi $a = n \frac{b}{m}$ se ne deduce $a > n_1 \frac{b}{m_1}$ ossia $m_1 a > n_1 b$. Questa diseguaglianza dimostra, coll'altra $m_1 c < n_1 h$, quanto si è affermato.

(4) A questo caso si riduce l'altro in cui si abbia $ma < nb$ ed $mc = nh$.

È facile verificare che uno di questi casi esclude l' altro, per cui il punto considerato è un S nel 1° caso ed un R nel secondo.

Se infine il punto di AB che si considera coincide con B, esso è un S; qualora esso coincida con A esso determina con A un segmento nullo, ed in tal caso essendo mc per ogni intero m maggiore di un segmento nullo, e potendosi determinare gli interi m ed n tali che sia $ma < nb$, considereremo il punto A come un R.

β) Un qualunque punto R precede ogni punto S nell' ordine AB del segmento.

Siano infatti r ed s due segmenti con un estremo comune in A e tali che l' altro estremo sia per r un punto R e per s un punto S. Avremo per r l' una o l' altra delle condizioni $\frac{a}{b} = \frac{c}{r}$ ovvero $\frac{c}{r} > \frac{a}{b}$, e per s dovremo iuvece avere $\frac{a}{b} > \frac{c}{s}$. Dalle relazioni $\frac{a}{b} = \frac{c}{r}$ e $\frac{a}{b} > \frac{c}{s}$ si deduce (1) $\frac{c}{r} > \frac{c}{s}$ e quindi (2) $s > r$.

Se invece si ha $\frac{c}{r} > \frac{a}{b}$ e $\frac{a}{b} > \frac{c}{s}$, dovremo pure avere, per due determinati interi m ed n, $c > m\frac{r}{n}$ ed $a \leqq m\frac{b}{n}$, e per altri due determinati interi p e q, $a > p\frac{b}{q}$ e $c \leqq p\frac{s}{q}$. Risulta di qui $m\frac{b}{n} > p\frac{b}{q}$ e quindi $m\frac{r}{n} > p\frac{r}{q}$; ma è pure $p\frac{s}{q} > m\frac{r}{n}$ per le ipotesi fatte, dunque $p\frac{s}{q} > p\frac{r}{q}$ cioè $s > r$.

3. Esisterà dunque, per il postulato di Dedekind, un punto L di AB tale che il segmento AL non sia minore di alcun segmento AR, nè maggiore di alcun segmento AS (3). Indicando

---

(1) Euclide, V, prop.^e 13^a.

(2) Euclide, V, prop.^e 10^a.

(3) Il punto L non può coincidere con A, perchè come si è già dimostrata l' esistenza di un segmento e tale che sia $\frac{a}{b} > \frac{c}{e}$, potrebbe dimostrarsi l' esistenza di un segmento non nullo l^1 tale che si abbia $\frac{c}{e'} > \frac{a}{b}$.

con l detto segmento AL, proveremo che esso è il segmento quarto proporzionale dopo i segmenti a, b, c, cioè che si ha la proporzione: $a : b = c : l$.

Dovremo dimostrare che per qualsivoglia coppia di numeri interi assoluti m ed n, secondo che si ha $ma \gtreqless nb$, si ha corrispondentemente $mc \gtreqless nl$.

Si abbia ad esempio $ma > nb$ ed $mc \leqq nl$; allora L sarà un S e non dovrà esistere un altro punto S tale che sia $AS < AL$.

Dalle relazioni $a > n \frac{b}{m}$ e $c \leqq n \frac{l}{m}$ risulta anzitutto l'esistenza di due interi m_1 ed n_1 tali che si abbia $a > n_1 \frac{b}{m_1} > n \frac{b}{m}$. Consegue di qui che $m_1 a > n_1 b$ e che $n_1 \frac{l}{m_1} > n \frac{l}{m} \geqq c$, cioè $n_1 \frac{l}{m_1} > c$ ed $l > m_1 \frac{c}{n_1}$.

Sia ora l' un segmento tale che si abbia $l > l' > m_1 \frac{c}{n_1}$, e quindi $m_1 c < n_1 l'$. Il punto S' della semiretta AB tale che sia $AS' = l'$ è un punto di AB, perchè $l' < l$ e perciò $AS' < AL$, ed è inoltre un punto S perchè le diseguaglianze dimostrate $m_1 a > n_1 b$ e $m_1 c < n_1 l'$ ci dicono che è $\frac{a}{b} > \frac{c}{l'}$. Non potendo però esistere un punto S tale che sia $AS < AL$, risulta assurda l'ipotesi fatta.

Risulterebbe da un analogo ragionamento che non possono esistere determinati interi m ed n pei quali si abbia: $ma \leqq nb$, $mc > nl$.

È dunque così dimostrata l'esistenza del segmento l quarto proporzionale dopo a, b, c.

Sul numero delle cifre del periodo del numero decimale
GENERATO DA UNA FRAZIONE ORDINARIA

FRANCESCO STASI (Ancona)

La conoscenza del numero delle cifre del periodo, al quale dà luogo una frazione ordinaria quando si svolge in decimale, oltre che in sè, ha importanza in molte questioni d'aritmetica. Tale numero, relativo alla frazione $\frac{1}{a}$, con a primo con 10 coincide col minor numero m tale che $10^m - 1$ sia divisibile per a (¹).

(¹) Difatti se $\frac{1}{a} = \frac{A}{10^m} + \frac{1}{10^m} \cdot \frac{1}{a}$, dove A è il periodo di $\frac{1}{a}$, e che evidentemente diviso per 10^m ha 0 come parte intera ed una parte decimale contenente m cifre, si ha pure

$$\frac{10^m - 1}{a} = A$$

e di qua si vede, essendo A intero, che $10^m - 1$ è divisibile per a.

Inoltre il più piccolo numero h tale che $10^h - 1$ sia divisibile per a è proprio m. Perchè se fosse $h = n < m$ un tale numero si avrebbe

$$\frac{10^n - 1}{a} = B$$

e quindi

$$\frac{1}{a} = \frac{B}{10^n} + \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{a}.$$

Ora essendo $\frac{1}{a} < 1$, a fortiori $\frac{B}{10^n} < 1$, onde $\frac{B}{10^n}$ si compone d'una parte intera uguale a zero e d'una parte decimale contenente n cifre, e la precedente uguaglianza ci dice dunque che il periodo della frazione $\frac{1}{a}$ contiene un numero di cifre uguale ad n o ad un suo summultiplo, contrariamente al supposto.

e con esso è intimamente legato il carattere di divisibilità di un numero qualunque A per un altro a [1].

Ora la questione di decidere, basandosi su semplici caratteri dei termini di una data frazione, quale sia il numero delle cifre del periodo al quale essa dà luogo, quando si svolge in decimale, non è a quanto sembra, di agevole risoluzione.

Qua mi propongo di apportare un contributo all' importante argomento, stabilendo prima che quando si sa determinare il numero delle cifre del periodo della frazione $\frac{1}{p}$, con p primo qualunque, si può assegnare un minimo per il numero delle cifre del periodo della frazione $\frac{m}{n}$, con m ed n qualunque; secondo che la determinazione del numero di tali cifre per la frazione $\frac{1}{n}$, dipende dalla risoluzione dell' una o dell' altra delle due congruenze quadratiche

$$x^2 \equiv 1 \quad , \quad x^2 \equiv 10 \pmod{n}$$

e dalla ricerca, mediante l' effettivo svolgimento di $\frac{1}{n}$ in decimale, del resto, radice di una delle soprascritte congruenze.

I.

1. Il numero delle cifre del periodo della frazione $\frac{b}{a}$, non supera quello di $\frac{1}{a}$.

Supporremo $b < a$, perchè se $b = qa + r$, con q diverso da zero ed $r < a$, $\frac{b}{a} = q + \frac{r}{a}$ e quindi il periodo di $\frac{b}{a}$ è quello della frazione $\frac{r}{a}$, in cui $r < a$.

---

[1] V. in *Bollettino di Matematica*, Anno I, N. 1 la Nota di G. Loria: « Carattere di divisibilità per un numero intero qualunque », pag. 3 seg.

1°) Sia in primo luogo $(b, a) = 1$, $(a, 10) = 1$. Se

$$\frac{1}{a} = \frac{A}{10^n} + \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{a}$$

dove A è il periodo di $\frac{1}{a}$, è pure

$$\frac{b}{a} = \frac{Ab}{10^n} + \frac{1}{10^n} \cdot \frac{b}{a}$$

dalla quale risulta che Ab o è il periodo di $\frac{b}{a}$, oppure è uguale al periodo ripetuto un certo numero di volte. Essendo $\frac{b}{a} < 1$, è a forziori $\frac{Ab}{10^n} < 1$, ond'è che $\frac{Ab}{10^n}$ contiene n cifre decimali.

Dunque il periodo di $\frac{b}{a}$ contiene n cifre, cioè tante quante ne contiene $\frac{1}{a}$, ovvero un summultiplo di tale numero. Possiamo anzi in questo caso affermare che il numero in questione è proprio n.

Se fosse difatto

$$Ab = A' \, 10^{(m-1)\alpha} + A' \, 10^{(m-2)\alpha} + \cdots + A' = A' \, \frac{10^{m\alpha} - 1}{10^{\alpha} - 1}$$

dove A' sia il periodo di $\frac{b}{a}$ ed $n = m\alpha$, sarebbe

$$A' = \frac{10^{\alpha} - 1}{10^n - 1} Ab = (10^{\alpha} - 1) \frac{b}{a}.$$

Essendo A' intero e quindi anche $(10^{\alpha} - 1)\frac{b}{a}$, poichè a è primo con b, dovrebbe $10^{\alpha} - 1$ essere divisibile per a. Ciò è assurdo, perchè essendo il periodo di $\frac{1}{a}$ composto di n cifre, il minimo numero i tale che $10^i - 1$ sia divisibile per a è proprio n. Non può dunque Ab essere formato di m gruppi di cifre ripetuti con lo stesso ordine, e ne consegue perciò che il periodo di $\frac{b}{a}$ è la parte decimale di $\frac{Ab}{10^n}$.

2°) Sia in secondo luogo $(b, a) = \alpha$ ed $a = \alpha a'$, $b = \alpha b'$, con $(a', b') = 1$, ferma restando l'altra ipotesi. Il periodo di $\frac{b}{a}$ è lo stesso di quello di $\frac{b'}{a'}$ ed il periodo di $\frac{b'}{a'}$, per quanto abbiamo innanzi visto, ha tante cifre per quante ne ha $\frac{1}{a'}$. Ma

$$\frac{1}{a'} = \alpha \frac{1}{a} = \frac{A\alpha}{10^n} + \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{a'}$$

onde $\frac{1}{a'}$ contiene al periodo n cifre o un summultiplo di tale numero, vale a dire che il numero delle cifre del periodo di $\frac{b}{a}$ non supera quello di $\frac{1}{a}$.

3°) Sia ora $\frac{1}{n} = \frac{1}{p_1{}^\alpha p_2{}^\beta p}$, dove p_1 e p_2 sono 2 o 5 e $(p, 10) = 1$. Dico che il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{n}$ è uguale a quello del periodo di $\frac{1}{p}$.

Di fatto

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^\beta} \frac{p_1{}^{\beta-\alpha}}{p} \quad , \ (\beta \geqq \alpha)$$

e se

$$p_1{}^{\beta-\alpha} = pq + r \quad , \quad r < p$$

si ha che $(r, p) = 1$, perchè se r e p non fossero primi fra loro, anche p e p_1 non sarebbero primi fra loro, contrariamente al supposto.

Si ha quindi

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^\beta}\left(q + \frac{r}{p}\right)$$

e se

$$\frac{r}{p} = \frac{A}{10^m} + \frac{1}{10^m} \cdot \frac{r}{p}$$

dove A sia il periodo di $\frac{r}{p}$,

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^\beta} q + \frac{A}{10^{m+\beta}} + \frac{1}{10^{m+\beta}} \cdot \frac{r}{p}.$$

Di qua si vede che le cifre del numero q non si ripetono più e costituiscono perciò l' antiperiodo, mentre che il periodo comincia dalla $(\beta + 1)^{ma}$ cifra e le sue cifre non sono che quelle del periodo della frazione $\frac{r}{p}$. Ma, per quanto abbiamo innanzi visto, il numero delle cifre del periodo di $\frac{r}{p}$ è uguale a quello di $\frac{1}{p}$, si deduce quindi che il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{n}$ è uguale a quello di $\frac{1}{p}$.

Ciò premesso, se

$$(a, b) = 1 \quad \text{ed} \quad a = p_1^\alpha p_2^\beta a'$$

dove p_1 e p_2 sono 2 o 5 ed $(a', 10) = 1$ essendo che $\frac{1}{a}$ ed $\frac{1}{a'}$ hanno egual numero di cifre al periodo, se

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{10^\beta}\left(q + \frac{r}{a'}\right)$$

dove $p_1^{\beta - \alpha} = a' q + r \quad , r < p$, è pure

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{10^\beta}\left(b q + \frac{br}{a'}\right)$$

e questa ci dice che il periodo di $\frac{b}{a}$ è uguale a quello di $\frac{br}{a'}$, ed essendo $(br, a') = 1$ il numero delle cifre del periodo di $\frac{br}{a'}$ è uguale a quello del periodo di $\frac{1}{a'}$. Ma per quanto si è visto il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{a'}$ è quanto quello di $\frac{1}{a}$, ond'è che, anche in questo caso il periodo di $\frac{b}{a}$ ha tante cifre quante $\frac{1}{a}$.

4°) Sia infine

$$b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \propto b' \quad , \quad a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \propto a' \quad , \quad \text{dove}$$

$$(a', b') = 1 \quad , \quad (a', 10) = 1 \quad , \quad (b', 10) = 1.$$

Sarà

$$\frac{b}{a} = \frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}}{p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}} \cdot \frac{b'}{a'} .$$

Ora se $\alpha_1 > \beta_1 \quad , \quad \alpha_2 > \beta_2$

$$\frac{b}{a} = p_1^{\alpha_1 - \beta_1} p_2^{\alpha_2 - \beta_2} \cdot \frac{b'}{a'}$$

ed il periodo di $\frac{b}{a}$ ha tante cifre per quante ne ha $\frac{1}{a'}$, che, per quanto si è visto innanzi, ne ha a sua volta tante per quante ne ha $\frac{1}{a}$.

Se $\alpha_1 < \beta_1 \quad , \quad \alpha_2 < \beta_2$ è

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{p_1^{\beta_1 - \alpha_1} p_2^{\beta_2 - \alpha_2}} \cdot \frac{b'}{a'}$$

e per quanto abbiamo innanzi visto il periodo di $\frac{b}{a}$ ha tante cifre quante ne ha $\frac{1}{a'}$, che ne ha quanto $\frac{1}{a}$.

Infine, se per esempio: $\alpha_1 < \beta_1$, $\alpha_2 > \beta_2$ sarà

$$\frac{b}{a} = \frac{p_2^{\alpha_2 - \beta_2}}{p_1^{\beta_1 - \alpha_1}} \cdot \frac{b'}{a'} = \frac{p_2^{\alpha_2 - \beta_2 + \beta_1 - \alpha_1}}{10^{\beta_1 - \alpha_1}} \cdot \frac{b'}{a'}$$

e se

$$\frac{p_2^{\alpha_2 - \beta_2 + \beta_1 - \alpha_1} b'}{a'} = q + \frac{r}{a'}$$

dove $r < a'$, ed r ed a' sono evidentemente primi fra loro, sarà

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{10^{\beta_1 - \alpha_1}} \left(q + \frac{r}{a'} \right)$$

e quindi il periodo di $\frac{b}{a}$ ha tante cifre quante ne ha il periodo di $\frac{r}{a'}$ che a sua volta non ne ha più di quello di $\frac{1}{a'}$, la quale frazione non ne ha più di quello di $\frac{1}{a}$.

Il teorema è così dimostrato.

2. Possiamo dalla dimostrazione del precedente teorema dedurre alcune notevoli conseguenze.

1°) Nelle ipotesi $(a, b) = 1$, $(a, 10) = 1$ essendo sempre $b < a$, quando si conosce il periodo di $\frac{1}{a'}$, si ottiene quello di $\frac{b}{a}$, moltiplicando il primo per b.

2°) $\frac{1}{a^{\alpha-\beta}}$ con $\alpha > \beta$ ha un periodo con un numero di cifre non superiore a quello di $\frac{1}{a^\alpha}$, essendo $\frac{1}{a^{\alpha-\beta}} = \frac{a^\beta}{a^\alpha}$.

3°) Se $(a, 30) = 1$, il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{9a}$ è uguale a quello del periodo di $\frac{1}{a}$ diviso per 9.

Se $\frac{1}{a} = \frac{A}{10^n} + \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{a}$ e quindi $\frac{10^n - 1}{a} = A$, essendo a primo con 3, si ha che A è multiplo di 9. Sarà quindi $\frac{A}{9}$ un intero A' e verrà

$$\frac{10^n - 1}{9a} = A'$$

onde

$$\frac{1}{9a} = \frac{A'}{10^n} + \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{9a}$$

da cui si vede che A' o è il periodo di $\frac{1}{9a}$, o si compone del periodo ripetuto un certo numero α di volte. Quest' ultima ipotesi però è assurda, perchè se il periodo di $\frac{1}{9a}$ avesse m cifre, con $n = m\alpha$, quello di $\frac{1}{a}$ avrebbe, pel teorema precedente, un numero di cifre non maggiore di m, contrariamente al supposto.

3. Dati i due numeri a e b, dove a ha m cifre, esiste sempre un numero della forma

$$A = 10^{\rho} (a\, 10^{mi} + a\, 10^{m(i-1)} + \ldots + a)$$

con $\rho \geqq 0$, divisibile per b.

1°) Supponiamo $(a, b) = 1$, $(b, 10) = 1$ e sia

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 \\ r_1\, 10^m + a &= bq_2 + r_2 \\ r_2\, 10^m + a &= bq_3 = r_3 \qquad\qquad (1) \\ \ldots\ldots\ldots & \qquad 0 \leqq r_j < b \\ r_{i-1}\, 10^m + a &= bq_i + r_i \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Osserviamo intanto che proseguendo nel calcolo delle (1) si trova che i successivi resti sono fra loro differenti e che si deve pervenire ad una di esse

$$r_i\, 10^m + a = bq_{i+1} + r_{i+1}, \quad r_{i+1} < b$$

tale che $r_{i+1} = 0$.

Se in effetti $r_\nu = r_\mu$ $(\nu \neq \mu = 1, \ldots, i+1)$ diversi da zero, essendo

$$r_{\nu-1}\, 10^m + a = bq_\nu + r_\nu \quad ; \quad r_{\mu-1}\, 10^m + a = bq_\mu + r_\mu$$

avremmo

$$(r_{\nu-1} - r_{\mu-1})\, 10^m = b\,(q_\nu - q_\mu)$$

ed il primo membro sarebbe divisibile per b. Ma se ciò accadesse b, essendo primo con 10 e quindi con 10^m, dovrebbe dividere $r_{\nu-1} - r_{\mu-1}$ e ciò è assurdo, a meno che non sia $r_{\nu-1} = r_{\mu-1}$, nel qual caso sarebbe pure $q_\nu = q_\mu$ e quindi $\nu = \mu$, contrariamente al supposto. Ora i resti r_j, tutti differenti essendo al più in numero di b, lo zero compreso, si vede che al più il b^{mo} deve essere uguale a zero.

Se $r_{i+1} = 0$, moltiplicando la prima delle (1) per 10^{mi}, la seconda per $10^{m(i-1)}, \dots$, la i^{ma} per 10^m, sommando e sopprimendo i termini comuni ai due membri si ricava

$$A = a\,10^{mi} + \dots a = b\,(q_1\,10^{mi} + \dots + q_{i+1}) \qquad (2)$$

e questa uguaglianza dimostra il teorema.

2°) Se $a = \alpha a'$, $b = \alpha b'$, $(a', b') = 1$, $(b', 10) = 1$ per il caso precedente vi sarà un numero $A' = a'\,10^{mi} + \dots + a'$ divisibile per b'. Si ha dunque:

$$A' = Qb'$$

ed in conseguenza

$$A = A'\alpha = a\,10^{mi} + \dots + a$$

divisibile per b.

c) Se $a = 10^h a_1$, $b = 10^k b_1$, $(a_1, 10) = 1$, $(b_1, 10) = 1$, sia

$$A_1 = a_1\,(10^{mi} + \dots + 1)$$

il numero, sempre esistente, giusta il caso precedente, divisibile per b_1. Ora a_1 e $10^{mi} + \dots + 1$ sono entrambi primi con 10, onde anche A_1 è primo con 10. Ne consegue che

$$A = a_1\,10^k\,(10^{mi} + \dots + 1)$$

è divisibile per b.

Se $k = h$, il numero in quistione è

$$A = a\,(10^{mi} + \dots + 1)$$

Se $k = h + \alpha$, allora

$$A = 10^\alpha\,a\,(10^{mi} + \dots + 1)$$

è il numero divisibile per b.

Se infine $k < h$, allora essendo

$$A = \frac{a}{10^{h-k}}\,(10^{mi} + \dots + 1)$$

divisibile per b, sarà a forziori

$$A = a(10^{mi} + \ldots + 1)$$

divisibile per b.

Dal precedente teorema si può trarre un' utile conseguenza Se $(a, b) = 1$, $(b, 10) = 1$ ed

$$A = a(10^{mi} + \ldots + 1)$$

è divisibile per b, essendo b primo con a, deve b dividere $10^{mi} + \ldots + 1$. Ora questo numero si compone di i gruppi di m cifre ciascuno, delle quali la prima uguale ad 1 e le $m - 1$ seguenti uguali a zero. Dunque, dato un numero qualunque primo con 10, esiste sempre un numero composto di un certo numero di gruppi di m cifre ciascuno, delle quali la prima uguale ad 1 e le $m - 1$ seguenti uguale a zero, divisibile per b. Se $m = 1$ si ha come caso particolare il teorema di Plateau.

4. Sia $(n, 10) = 1$, $n = pq$ ed

$$\frac{1}{p} = \frac{A}{10^m} + \frac{1}{10^m} \cdot \frac{1}{p} \quad , \quad A = A'q$$

allora $\frac{1}{n}$ non può contenere meno di m cifre al periodo, diversamente anche $q \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$ conterrebbe meno di m cifre, contrariamente al supposto. Ma essendo

$$\frac{1}{n} = \frac{A'}{10^m} + \frac{1}{10^m} \cdot \frac{1}{n}$$

non può contenere più di m cifre, onde $\frac{1}{n}$ contiene un periodo di m cifre.

Sia in secondo luogo $(A, q) = 1$ e sia $A(10^{m(i-1)} + \ldots + 1)$ il più piccolo numero di questa forma divisibile per q. Si ha

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{q}\left(\frac{A}{10^m} + \frac{A}{10^{2m}} + \ldots + \frac{A}{10^{mi}} + \frac{1}{10^{mi}} \cdot \frac{1}{p}\right) =$$

$$= \frac{A(10^{m(i-1)} + \ldots + 1)}{q\,10^{mi}} + \frac{1}{10^{mi}\,pq}$$

ed essendo il numeratore della prima parte di quest' ultima espressione divisibile per q, se $A(10^{m(i-1)}+\ldots+1)=A'q$ avremo

$$\frac{1}{n}=\frac{A'}{10^{mi}}+\frac{1}{10^{mi}n}.$$

Quest' uguaglianza ci dice che il periodo di $\frac{1}{n}$ contiene mi cifre o un summultiplo di tale numero.

Quest' ultima ipotesi è assurda, perchè se fosse

$$A'=A''\,10^{\alpha(r-1)}+\cdots+A''=A''\frac{10^{\alpha r}-1}{10^{\alpha}-1}$$

dove $mi=\alpha r$, avremmo

$$A'=A''\frac{10^{mi}-1}{10^{\alpha}-1}=\frac{10^{mi}-1}{n}$$

onde

$$\frac{A''q}{10^{\alpha}-1}=\frac{1}{p}$$

Ma per ipotesi $\frac{1}{p}=\frac{A}{10^{m}-1}$

onde

$$\frac{A}{10^{m}-1}=\frac{A''q}{10^{\alpha}-1}$$

ossia

$$A\frac{10^{\alpha}-1}{10^{m}-1}=A''q.$$

Ora q essendo primo con A, deve dividere $\frac{10^{\alpha}-1}{10^{m}-1}$, e ciò è assurdo perchè per ipotesi il minimo numero della forma $A\frac{10^{k}-1}{10^{m}-1}$ divisibile per q si ha quando $k=mi$ e non quando $k=\alpha<mi$.

Sia infine $(A,q)=\alpha$ ed $A=A'\alpha$, $q=q'\alpha$. Applicando ad A' e q' quanto innanzi è detto si ha che se $A'\frac{10^{mj}-1}{10^{m}-1}$ è il minimo numero di questa forma divisibile per q', $\frac{1}{n:\alpha}$ ha mj cifre

al periodo, ed altrettanto ne ha $\frac{1}{n}$, perchè $\frac{1}{n}$ non potendone avere meno di mj e d'altra parte essendo $A\,\frac{10^{mj}-1}{10^m-1}$ divisibile per q, non ne può avere più di mj, e quindi il numero in quistione è proprio mj.

Conchiudendo, il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{n}=\frac{1}{pq}$ è uguale a quello di $\frac{1}{p}$ se, essendo A il periodo di $\frac{1}{p}$, A è divisibile per q; è mi se, essendo $(A\,,q)=1$ il minimo numero della forma $A\,(10^{m\,(k-1)}+\ldots+1)$ divisibile per q si ha quando $k=i$. Infine tale numero è mj, se essendo $(A\,,q)=\alpha$ ed $A=A'\,\alpha$ $q=\alpha q'$ il minimo numero della forma $A'\,(10^{m\,(k-1)}+\ldots+1)$ divisibile per q' si ha quando $k=j$.

5. Se p è primo ed è $(p\,,10)=1$, $\frac{1}{p}=\frac{A_1}{10^m-1}$, dove A_1 è il periodo di $\frac{1}{p}$, può accadere che il resto r di A_1 per p sia zero o diverso da zero. Se $r=0$ pel teorema precedente $\frac{1}{p^2}$ ha pure m cifre al periodo. Analogamente se $A_1=A_2 p$ ed è A_2 divisibile per p, anche $\frac{1}{p^3}$ ha m cifre al periodo e così di seguito.

Sia $\frac{1}{p^h}=\frac{A_h}{10^m-1}$ e sia A_h il primo dei periodi delle successive potenze di $\frac{1}{p}$, non divisibile per p. Avremo allora.

$$\frac{1}{p^{h+k}}=\frac{A_h}{(10^m-1)\,p^k}\quad(0<k\leq h)$$

Consideriamo il numero della forma

$$B=A_h\frac{10^{mi}-1}{10^m-1}$$

sempre esistente, divisibile per p^k, e vediamo qual'è il minimo valore di i. Essendo il fattore A_h di B primo con p e quindi con

p^k, per l' ipotesi che p è primo ed A_h non divisibile per p^k, deve essere divisibile per tale numero il fattore

$$\frac{10^{mi}-1}{10^m-1} = 10^{m(i-1)} + \ldots + 1$$

Ora essendo $10^m - 1$ divisibile per p^h e quindi per p^k, il resto di 10^m e quindi di 10^{mj} per p^k è uguale ad 1, onde il resto di $10^{m(i-1)} + \ldots + 1$ per p^k sarà

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{i}$$

Questa somma sarà divisibile per p^k allorquando $i = p^k$, ed un tale valore di i è evidentemente il minimo. Adunqne

$$B = A_h \frac{10^{mp^k}-1}{10^m-1}$$

è il minimo numero di tale forma divisibile per p^k ed avremo

$$\frac{B}{p^k} = \frac{A_h(10^{mp^k}-1)}{(10^m-1)p^k} = A_{h+k}$$

ossia

$$\frac{1}{p^{h+k}} = \frac{A_{h+k}}{10^{mp^k}-1}$$

che ci dice che il periodo di $\frac{1}{p^{h+k}}$ contiene mp^k cifre.

Consegue dalle precedenti considerazioni che, nelle ipotesi stabilite, mentre i periodi $A_1, A_2, \ldots, A_h$ delle frazioni $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p^2}$, $\ldots, \frac{1}{p^h}$ rispettivamente hanno sempre lo stesso numero di cifre allorquando A_1 è divisibile per p^{h-1} e non per p^h, i periodi delle rispettive frazioni $\frac{1}{p^{h+1}}, \ldots, \frac{1}{p^{2h}}$ hanno $mp, mp^2, \ldots, mp^h$ cifre. Nel primo caso i periodi $A_2, A_3, \ldots, A_h$ si ottengono dividendo A_1 per $p, p^2, \ldots, p^{h-1}$ rispettivamente, mentre che nel secondo caso A_{h+k} si ottiene dividendo il numero composto di k gruppi di cifre uguali ad A_h per p^k.

E si badi che nessuna delle A_{h+k} $(k=1,\ldots,h)$ può essere divisibile per p, diversamente $A_h \dfrac{10^{mp^k}-1}{10^m-1}=B$ sarebbe divisibile per p^{k+1}, e ciò non può essere, giacchè, per quanto abbiamo innanzi visto, il minimo valore di i tale che $\dfrac{10^{mi}-1}{10^m-1}$ sia divisibile per p^{k+1} si ha quando $i=p^{k+1}$.

Analogamente il periodo A_{2h} di $\dfrac{1}{p^{2h}}$, non può essere divisibile per p, onde su di esso si può ragionare come su A_h e si possono così determinare il numero delle cifre dei periodi ed i periodi stessi di $\dfrac{1}{p^{2h+1}},\ldots,\dfrac{1}{p^{2h+i}}$ e così di seguito.

In ogni caso si vede facilmente che qualunque ci sia ν, purchè maggiore di h,

$$\frac{1}{p^\nu}=\frac{A_h\,(10^{mp^{\nu-h}}-1)}{(10^m-1)\,p^{\nu-h}}.$$

Per esempio siccome il periodo di $\dfrac{1}{3}$ contiene una cifra, che è divisibile per 3, quello di $\dfrac{1}{9}$ conterrà pure una cifra, e non essendo questa più divisibile per 3 il periodo di $\dfrac{1}{3^k}$, $(k>2)$ conterrà 3^{k-2} cifre.

Ancora, $\dfrac{1}{7}$ contiene sei cifre ed il numero formato da tali cifre non è divisibile per 7, onde il periodo di $\dfrac{1}{7^k}$ $(k>1)$ contiene $6\cdot 7^{k-1}$ cifre, ecc.

6. Se $\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p_1^{\alpha_1}}\cdots\dfrac{1}{p_i^{\alpha_i}}$ con $p_1,\ldots,p_i$ numeri primi e primi con 10, se $r_1, r_2,\cdots, r_i$ sono rispettivamente i numeri delle cifre dei periodi di $\dfrac{1}{p_1},\ldots,\dfrac{1}{p_i}$ e se infine $\dfrac{1}{p_1^{\alpha'_1}},\ldots,\dfrac{1}{p_i^{\alpha'_i}}$ dove $\alpha'_1\leqq\alpha_1,\ldots$ $\ldots,\alpha'_i\leqq\alpha_i$, sono le più grandi potenze di $\dfrac{1}{p_1},\ldots,\dfrac{1}{p_i}$ che hanno pure i periodi rispettivi di $r_1,\ldots,r_i$ cifre, essendo quelli delle

frazioni $\frac{1}{p_1^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$ di $r'_1 = r_1 p_1^{\alpha_1 - \alpha'_1}, \ldots, r'_i = r_i p_i^{\alpha_i - \alpha'_i}$ cifre rispettivamente, il periodo di $\frac{1}{n}$ avrà un numero di cifre uguale ad un multiplo di $r'_1 \ldots r'_i$.

Adunque, quando si conoscono i periodi di $\frac{1}{p_1^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$, dove le p hanno il significato già stabilito, si può assegnare un minimo per il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{n} = \frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \ldots \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$. Tale minimo è evidentemente il minimo multiplo comune dei numeri $r'_1, \ldots r'_i$, dove le r' hanno il significato stabilito. Se M è un tale minimo, il numero in quistione sarà uguale ad uno dei numeri M, $2M, \ldots, hM$ dove $hM \leqq n - 1$.

II.

Da quanto abbiamo visto risulta che il numero delle cifre del periodo di una frazione qualunque, dipende dai numeri delle cifre dei periodi delle frazioni $\frac{1}{p}$, con p fattore primo di n e primo con 10. In ciò che segue noi ci occuperemo di tali frazioni, ma prima dimostriamo la seguente fondamentale proposizione.

1. I successivi resti che si ottengono, quando si riduce $\frac{1}{n}$ in decimale, con n primo con 10, sono residui quadratici del modulo n. E se $r_1, r_2, \ldots, r_m = 1$ sono tutti i differenti resti, r_i ed r_{2i} soddisfano alla congruenza $r_i^2 \equiv r_{2i}$ (mod. n).

Infatti se

$$\frac{1}{n} = \frac{A_i}{10^i} + \frac{r_i}{10^i n}$$

dove A_i è la parte del periodo fino al resto r_i, si ha

$$\frac{r_i}{n} = \frac{A_i}{10^i} r_i + \frac{r_i^2}{10^i n}$$

onde

$$\frac{1}{n} = \frac{A_i}{10^i} + \frac{A_i}{10^{2i}} r_i + \frac{r_i^2}{10^{2i} n}$$

e se $r_i^2 = n\alpha + r$

$$\frac{1}{n} = \frac{A_i}{10^i} + \frac{A_i r_i + \alpha}{10^{2i}} + \frac{r}{10^{2i} n}$$

ossia

$$\frac{1}{n} = \frac{A_i 10^i + A_i r_i + \alpha}{10^{2i}} + \frac{r}{10^{2i} n} \qquad (1)$$

Quest'ultima uguaglianza afferma che $r_{2i} = r$, e quindi che

$$r_i^2 \equiv r_{2i} \pmod{n}.$$

Osserviamo che se $2i > m$, poichè i resti r_i si ripetono dopo l'm^{mo} collo stesso ordine sarà $r_{2i} = r_{2i-m}$.

2. Consegue dalla precedente dimostrazione:

a) Le i cifre del periodo di $\frac{1}{n}$ successive alla i^{ma}, si possono ottenere moltiplicando le i cifre già trovate per r_i ed aggiungendo a tale prodotto il quoto α della divisione di r_i^2 per n.

b) Se nel ridurre $\frac{1}{n}$ in decimale il numero delle cifre del periodo è pari $2i$, il resto r_i soddisfa alla congruenza $r_i^2 \equiv 1 \pmod{n}$.

c) Reciprocamente, se nel ridurre $\frac{1}{n}$ in decimale, si perviene al resto r_i tale che $r_i^2 \equiv 1 \pmod{n}$, vi sono, oltre le i trovate, altre i cifre soltanto del periodo di $\frac{1}{n}$.

Difatto per l'ipotesi e pel teorema precedente si ha $r_{2i} = 1$ e quindi il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{n}$ è $2i$, cioè un numero pari, doppio di i.

Se $r_i = n - 1$, essendo $(n-1)^2 = n(n-2) + 1$ e quindi $r_i^2 \equiv 1 \pmod{n}$, si può affermare che vi sono altre i cifre soltanto del periodo di $\frac{1}{n}$. Queste ultime i cifre sono i complementi a 9 collo stesso ordine delle prime i. Difatto

$$\frac{1}{n} = \frac{A_i}{10^i} + \frac{n-1}{10^i n} = \frac{A_i}{10^i} + \frac{1}{10^i} - \frac{1}{10^i n} =$$

$$= \frac{A_i}{10^i} + \frac{1}{10^i} - \frac{1}{10^i}\left(\frac{A_i}{10^i} + \frac{1}{10^i} - \frac{1}{10^i n}\right) =$$

$$= \frac{A_i}{10^i} + \frac{1}{10^i}\left(1 - \frac{A_i + 1}{10^i}\right) + \frac{1}{10^{2i} n}$$

e questo prova l'enunciato.

In questo caso si ha inoltre

$$r_{i+1} = n - r_1 \ , \ r_{i+2} = n - r_2, \ldots , r_{2i} = n - r_i = 1.$$

E difatto r_{i+1} soddisfa alla relazione

$$(n - 1)\,10 = nq_i + r_i + 1.$$

Ma essendo, per quanto innanzi s'è visto, $q_i = 9 - q_1$ ed inoltre $10 = nq_1 + r_1$, sostituendo si ricava

$$n - r_1 = r_i + 1.$$

Analogamente il resto r_{i+2} soddisfa alla relazione

$$(n - r_1)\,10 = nq_{i+1} + r_{i+2}.$$

Ma $q_{i+1} = 9 - q_2$, $r_1\,10 = nq_2 + r_2$ onde

$$n - r_2 = r_{i+2}$$

e così di seguito. Si ha dunque in generale

$$n - r_x = r_{i+x}.$$

d) Se nel ridurre $\frac{1}{n}$ in decimale, con $n > 10$ e sempre primo con 10, il numero delle cifre del periodo è un numero dispari $2i + 1$, il resto r_{i+1} soddisfa alla congruenza $r^2_{i+1} \equiv 10$ (mod. n).

Dalla (1) si ha difatto cambiando i in $i + 1$, $r_{2i+2} = r$. Ma essendo le cifre del periodo $2i + 1$ sarà $r_{2i+1} = 1$ $r_{2i+2} = 10$, onde $r = 10$ ed essendo $r^2_{i+1} \equiv r$ (mod. n) sarà

$$r^2_{i+1} \equiv 10 \text{ (mod. } n).$$

e) Reciprocamente, se nel ridurre la frazione $\frac{1}{n}$ in decimale, con $n > 10$, si perviene ad un resto r_{i+1} tale che $r^2_{i+1} \equiv 10$ (mod. n), vi sono, oltre le $i + 1$ cifre trovate, altre i cifre soltanto del periodo di $\frac{1}{n}$.

Difatto la (1), quando si cambia i in $i + 1$, diventa

$$\frac{1}{n} = \frac{A_{i+1}}{10^{i+1}} + \frac{A_{i+1}\,r + \alpha_{i+1}}{10^{2i+2}} + \frac{1}{10^{2i+1}}$$

e poichè il resto 1 si presenta dopo $2i+1$ divisioni successive, il periodo del numero decimale derivante da $\frac{1}{n}$ si compone di $2i+1$ cifre.

3. Consegue da quanto abbiamo detto che dovendo il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{n}$ essere pari o dispari, vi deve essere un certo resto, fra quelli che si ottengono riducendo $\frac{1}{n}$ in decimale, che deve soddisfare l'una o l'altra delle due congruenze.

$$x^2 \equiv 1 \ , \ x^2 \equiv 10 \ (\text{mod. } n).$$

E si noti che fra i resti che si ottengono riducendo $\frac{1}{n}$ in decimale, non ne possono esistere due r_i ed r_j tali che siano contemporaneamente soddisfatte le due congruenze

$$r_i^2 \equiv 1 \ , \ r_j^2 \equiv 10 \ (\text{mod. } n).$$

Di fatto se ciò si verificasse, essendo per quanto abbiamo visto

$$r_i^2 \equiv r_{2i} \ , \ r_j^2 \equiv r_{2j} \ (\text{mod. } n)$$

sarebbe

$$r_{2i} = 1 \ , \ r_{2j} = 10$$

e si avrebbe che, nell'ordine di successione dei resti, tanto 1 che 10 sarebbero resti di ordine pari e ciò è assurdo, essendo il resto 10 successivo di 1.

Risolvendo per ogni numero n, l'una o l'altra delle congruenze

$$x^2 \equiv 1 \ , \ x^2 \equiv 10 \ (\text{mod. } n)$$

la seconda quando è possibile e passando a ridurre $\frac{1}{n}$ in decimale, se dopo l' i^{ma} divisione si ottiene un resto r_i uguale ad una delle radici x_i della prima congruenza, possiamo affermare che vi sono altre i cifre del periodo di $\frac{1}{n}$, che si possono ottenere nella maniera indicata in 2 a). Se invece il resto r_i è uguale ad una delle radici x'_j della seconda congruenza possiamo affermare

che vi sono altre $i-1$ cifre del periodo di $\frac{1}{n}$, che si ottengono nella stessa maniera indicata in 2 a), esclusa l'ultima cifra che non è altro che la prima di tutto il periodo di $\frac{1}{n}$.

III.

A questo punto la questione è ridotta a dovere risolvere, per ogni particolare valore di n, le congruenze

$$x^2 \equiv 1 \qquad x^2 \equiv 10 \pmod{n}$$

e se $p_1, \ldots, p_r$ sono i fattori primi differenti di n, che supponiamo sempre primo con 10, com'è noto le altre

$$x^2 \equiv 1 \ , \ x^2 \equiv 10 \pmod{p_i}.$$

Ora per la risoluzione della prima congruenza si hanno, com'è noto quando p_i è primo, le due radici 1 e $p_i - 1$.

Per l'altra si potrebbe ricorrere alla teoria degli indici, o fare uso della seguente formola generale [1].

Se $x^2 \equiv b \pmod{p_i}$ è la congruenza ed è $p_i = 2^s h + 1$, con h dispari, soddisfatta la condizione di possibilità $b^{2^{s-1}h} \equiv 1 \pmod{p_i}$, che si traduce, com'è noto, nell'altra $\left(\frac{b}{p_i}\right) = 1$, dove $\left(\frac{b}{p_i}\right)$ è il simbolo di Legendre, se g è un non residuo quadratico di p_i, le radici sono date da

$$x \equiv \pm b^{\frac{h+1}{2}} g^{h(\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 + \cdots + 2^{s-2}\varepsilon_{s-2})} \pmod{p_i}$$

dove $\varepsilon_i = 0$ o 1 secondochè

$$b^{2^{s-i-2}h} g^{2^{s-i-1}h(\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 + \cdots + 2^{i-1}\varepsilon_{i-1})} \equiv \pm \pmod{p_i}.$$

Nel caso nostro la formola che dà le radici diventa

$$x \equiv \pm 10^{\frac{h+1}{2}} g^{h(\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 + \cdots + 2^{s-2}\varepsilon_{s-2})} \pmod{p_i}$$

---

(1) V. A. Tonelli: « Sulla risoluzione della congruenza $x^2 \equiv c$ (mod p^λ) » - *Rendiconti dei Lincei*, S. V., Vol. I, 1° semestre, 1892, p. 116 e seguenti.

ammessa la condizione di possibilità $\left(\frac{10}{p_i}\right) = 1$, e restando fisso il significato delle ε.

Determinati i numeri delle cifre dei periodi delle frazioni $\frac{1}{p_i}$ e quindi quelli di $\frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$, essendo $\frac{1}{n} = \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}}$, si può, per quanto abbiamo visto, determinare un minimo per il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{n}$. Ma se interessa determinare il numero preciso di tali cifre, basterà risolvere le congruenze $x^2 \equiv 1$, $x^2 \equiv 10 \pmod{n}$, passare a ridurre $\frac{1}{n}$ in decimale e fermarsi a quel resto radice di una delle soprascritte congruenze, che evidentemente non può incontrarsi prima di avere calcolato un numero di cifre uguale al minimo in quistione.

IV.

Passiamo a fare qualche applicazione dei precedenti risultati.

1°) Consideriamo la frazione $\frac{1}{19}$.

La congruenza $x^2 \equiv 10 \pmod{19}$ non è possibile, non essendo soddisfatta la condizione $10^9 \equiv 1 \pmod{19}$. E giacchè si ha $10^9 \equiv 18 \pmod{19}$, possiamo affermare che $\frac{1}{19}$ ha un periodo di 18 cifre.

2°) Sia in secondo luogo $\frac{1}{31}$ la frazione data. La congruenza $x^2 \equiv 10 \pmod{31}$ è possibile, ed essendo $x \equiv 10^8 \pmod{31}$, vi sono $2 \cdot 8 - 1 = 15$ cifre al periodo di $\frac{1}{31}$.

3°) Sia ora $\frac{1}{31^3}$ la frazione data. Poichè il periodo di $\frac{1}{31}$ ha quindici cifre, e tale periodo non è divisibile per 31, per quanto innanzi s'è visto, $\frac{1}{31^3}$ contiene $15 \cdot 31^2$ cifre al periodo.

4°) Sia ancora $\frac{1}{217} = \frac{1}{7 \cdot 31}$ la frazione data.

Poichè $10^3 \equiv 6 \pmod{7}$, $\frac{1}{7}$ ha sei cifre al periodo, e poichè

$\frac{1}{31}$ ne ha quindici, $\frac{1}{217}$ ha al periodo un numero di cifre uguale a 30, oppure uguale ad un multiplo di 30 minore di 217. Volendosi determinare con precisione, si osservi che tale numero deve essere pari, ond'è che nel ridurre $\frac{1}{217}$ in decimale si deve presentare un resto radice della congruenza $x^2 \equiv 1 \pmod{217}$. Questa congruenza oltre 1 e 257 ha le altre due radici 92 e 125 e siccome riducendo $\frac{1}{217}$ in decimale, dopo il 15^{mo} si presenta il resto 125, si deduce che la frazione $\frac{1}{217}$ ha un periodo di 30 cifre.

5°) Consideriamo inoltre la frazione $\frac{1}{1517} = \frac{1}{37 \cdot 41}$. Siccome $\frac{1}{37}$ ha un periodo di tre cifre ed $\frac{1}{41}$ di cinque, $\frac{1}{1517}$ ne avrà o 15 od un multiplo di 15 minore di 1517. Volendo assegnare un tale numero, si osservi che la congruenza $x^2 \equiv 1 \pmod{1517}$ oltre 1 e 1516 ha per radici 778 e 739. Quelle dell'altra $x^2 \equiv 10 \pmod{1517}$ sono 877, 640, 344, 1173. Siccome riducendo $\frac{1}{1517}$ in decimale, dopo l'ottava divisione si presenta il resto 877, vuol dire che il periodo di $\frac{1}{1517}$ si compone di 15 cifre.

6°) Consideriamo infine la frazione $\frac{517}{2^2 \cdot 5 \cdot 3^4 \cdot 7^3 31}$, che è ridotta ai minimi termini.

Una tale frazione ha al periodo tante cifre quante ne ha la frazione $\frac{1}{2^2 \cdot 5 \cdot 3^4 \cdot 7^3 \cdot 31}$ e questa quante ne ha l'altra $\frac{1}{3^4 \cdot 7^3 \cdot 31}$. Ora le frazioni $\frac{1}{3^4}$, $\frac{1}{7^3}$, $\frac{1}{31}$, per quanto s'è visto, hanno al periodo un numero di cifre uguale a $3^2 = 9$, $6 \cdot 7^2 = 294$ e 15 rispettivamente, onde $\frac{1}{3^4 \cdot 7^3 \cdot 31}$ avrà al periodo un numero di cifre composto di $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 4410$ cifre, ovvero un multiplo di tale numero minore di $3^4 \cdot 7^3 \cdot 31 = 861273$.

Ancona, Agosto 1912.

Della estrazione di radice quadrata col procedimento delle medie

ARNALDO GNAGA (Brescia)

Premessa. — La risoluzione del problema $x^2 = n$ si opera in quella maniera, esposta similmente in tutti i libri di testo, la quale risale all' aritmetica araba, come ricorda il Tartaglia ne' suoi trattati Tale metodo si basa precisamente sul teorema del quadrato del binomio, e non si presta affatto ad una spiegazione elementare, poichè a quel metodo manca il sussidio della intuizione.

In conseguenza di che, quasi tutti i libri di testo elementari si accontentano di dare la regola nuda, regola complicata e enigmatica, la quale viene affidata — in aperta opposizione con lo spirito dello insegnamento matematico — alla sola memoria.

Ora mi è parso esservi un metodo il quale si presti assai bene ad una spiegazione elementare e abbia per di più il sussidio della intuizione.

Sembrami che tale procedimento debba avere la preferenza sul vecchio, ove si arrivi a mostrare che, nella pratica dei problemi elementari, la nuova operazione, oltre i vantaggi suesposti, presenta anche quelli non trascurabili di una maggior semplicità e speditezza.

È quanto spero di mettere in evidenza con la esposizione che presento.

Sarà cura del lettore il separare la parte teorica dalle spiegazioni elementari, le quali formano parte da sè e sono date a titolo di esempio.

1. Esempî. — Consideriamo le seguenti eguaglianze:

$$144 = 144 \times 1 = 72 \times 2 = 48 \times 3 = 36 \times 4 = \left(28 + \frac{4}{5}\right) \times 5 =$$
$$= 24 \times 6 = \left(20 + \frac{4}{7}\right) \times 7 = 18 \times 8 = 16 \times 9 =$$
$$= \left(14 + \frac{4}{10}\right) \times 10 = \left(13 + \frac{1}{11}\right) \times 11 = 12 \times 12$$

$$134 = 134 \times 1 = 67 \times 2 = \left(44 + \frac{2}{3}\right) \times 3 = \left(33 + \frac{2}{4}\right) \times 4 =$$
$$= \left(26 + \frac{4}{5}\right) \times 5 = \left(22 + \frac{2}{6}\right) \times 6 = \left(19 + \frac{1}{7}\right) \times 7 =$$
$$= \left(16 + \frac{6}{8}\right) \times 8 = \left(14 + \frac{8}{9}\right) \times 9 = \left(13 + \frac{4}{10}\right) \times 10 =$$
$$= \left(12 + \frac{2}{11}\right) \times 11 = \left(11 + \frac{2}{12}\right) \times 12 = \left(12 - \frac{10}{12}\right) \times 12.$$

2. Teorema. — *Dato un numero, se si considera come il prodotto di altri due, questi variano in senso inverso.* Difatti, se n è un numero dato, intero o frazionario, e p e r rappresentano due suoi fattori che bastano a formarlo, avremo la identità

$$n = p \cdot r = (p \cdot q) \cdot \frac{r}{q}$$

che dimostra il teorema.

3. Teorema. — *Date due frazioni eguali, non apparenti, il loro prodotto è una frazione non apparente, ossia non è mai un numero intero.* (Si richiama la dimostrazione svolta nella teoria delle frazioni).

4. Definizione. — Quando un numero è il prodotto di due fattori eguali chiamasi *quadrato perfetto*, e ciascuno dei fattori si dice la sua *radice quadrata*.

Dagli esempi dati si rileva che il 144 è un quadrato perfetto, mentre il 134 non lo è. Infatti quando il moltiplicatore è 11 il moltiplicando è maggiore di 12 ma non 13; quando invece il moltiplicatore è 12 il moltiplicando è minore di 12 ma non 11. Dunque il numero cercato dovrebbe essere maggiore di 11 e minore di 12, e perciò non può essere intero. Ma per il Teor. 3 non può nemmeno essere una frazione. Per conseguenza si ha il

5. Teorema. — *Non esiste sempre il numero che moltiplicato per sè stesso è eguale a un numero dato.*

Esempi. — Date le due equazioni:

$$x^2 = 144 \qquad\qquad z^2 = 134$$

la prima è risolvibile e dà $x = 12$; la seconda invece non è risolvibile, con numeri razionali. Risulta dagli esempi al N.° 1, che $121 = 11^2$ è il maggior quadrato perfetto contenuto da 134, poichè $144 = 12^2$ è maggiore di 134. Il numero cercato differisce dall' undici di meno di una unità.

6. Definizione. — Si chiama *radice quadrata di un numero a meno dell' unità per difetto* la radice quadrata del maggior quadrato perfetto in esso contenuto. Così 11 si direbbe la radice quadrata a meno dell' unità per difetto del numero 134. — (Simbolo e nomenclatura).

Dunque:

$$x = \sqrt[2]{144} = 12 \text{ è una eguaglianza esatta}$$

$$z = \sqrt[2]{134} = 13 \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{erronea.}$$

7. Esempio. — Confrontiamo i tre prodotti

$$14 \times 7\,;\ 14 \times 8 = 14 \times (7 + 1)\,;\ 14 \times 9 = 14 \times (7 + 2) =$$
$$= (14 \times 7) + (14 \times 2) = 14 \times 7 + 14 + 14\,.$$

Il secondo prodotto è una somma simile a quella primo, ma ma con un addendo di più; il terzo prodotto è invece una somma simile a quella del primo ma con due addendi di più. Donde il

Teorema. — *Dato un prodotto di due fattori, se il moltiplicatore aumenta di una unità, il prodotto aumenta di tante unità quante ne à il moltiplicando; se invece aumenta di due, il prodotto aumenta di tante unità quante ne à il doppio del moltiplicando*, e così di seguito.

8. Esempio. — Prendiamo i due numeri successivi

$$14 \text{ e } 15 = (14 + 1)$$

Allora, per quanto è spiegato al N.° 6, avremo

$$15^2 = 15 \times 15 = 15 \times (14 + 1) = 15 \times 14 + 15 =$$
$$14 \times (14 + 1) + (14 + 1) = 14^2 + 14 + 14 + 1 = 14^2 + 14 \times 2 + 1$$

TEOREMA. — *Dati due numeri, se sono successivi, il quadrato del maggiore supera il quadrato del minore del doppio di quest'ultimo, più l'unità.*

9. ESEMPIO. — Poniamo che il 14 sia la radice quadrata a meno dell'unità, per difetto, di un certo numero. Dividendo questo numero per 14 il quoto non può essere maggiore di 16, ossia non può superare il divisore di più di due unità. Immaginiamo che il quoto abbia tre unità di più del divisore, e sia $17 = (14 + 3)$. Allora $(14 + 3) \times 14$ sarebbe eguale al numero dato, o più piccolo. Ma $(14 + 3) \times 14 = 14^2 + 14 \times 3$ (N.° 6), il qual prodotto è maggiore di 15^2. Dunque il numero dato conterrebbe il 15^2, e però la radice quadrata a meno dell'unità, per difetto, sarebbe il 15 e non il 14. Donde il

TEOREMA. — *Dividendo un numero per la sua radice quadrata a meno dell'unità per difetto, la parte intera del quoto non potrà superarla che di due unità al più.*

In generale: Se r^2 è il più gran quadrato perfetto contenuto in n, la parte intera del quoto di n per r non può superare $(r + 2)$. Infatti (per $r > 1$); $(r + 3) \cdot r > (r + 1)^2$, onde il numero n conterrebbe altresì il quadrato di $(r + 1)$, e però il quadrato di r non sarebbe più il maggior quadrato perfetto che esso contiene, contrariamente alla ipotesi.

10. ESEMPIO:

$$144 : 2 = 72;\ 144 : 3 = 48;\ 144 : 4 = 36;\ 144 : 5 = 28 + \frac{4}{5};$$

$$144 : 6 = 24;\ 144 : 7 = 20 + \frac{4}{7};\ 144 : 8 = 18;\ 144 : 9 = 16;$$

$$144 : 10 = 14\frac{4}{10};\ 144 : 11 = 13 + \frac{1}{11};\ 144 : 12 = 12$$

$$134 : 2 = 67;\ 134 : 3 = 44 + \frac{2}{3};\ 134 : 4 = 33 + \frac{2}{4};$$

$$134 : 5 = 26 + \frac{4}{5};\ \ 134 : 6 = 22 + \frac{2}{6};\ \ 134 : 7 = 19 + \frac{1}{7};$$

$$134 : 8 = 16 + \frac{6}{8};\ \ 134 : 9 = 14 + \frac{8}{9};\ 134 : 10 = 13 + \frac{4}{10};$$

$$134 : 11 = 12 + \frac{2}{11};\ \ 134 : 12 = 12 - \frac{10}{12}$$

Dunque (N.° 2) dato un numero, se si divide successivamente per numeri crescenti dal due in su, i quozienti ottenuti decrescono necessariamente. La differenza tra il quoto e il divisore va dunque sempre diminuendo Allora potranno presentarsi due casi:

1° - Questa differenza scompare e allora il quoto eguaglia il divisore. Il dividendo è un quadrato perfetto e il divisore è la sua radice.

2° - Questa differenza non scompare ma il quoto, fino a un certo punto maggiore del divisore, diventa in seguito più piccolo. Si vedrebbe allora tra quali numeri interi sucessivi, ossia differenti di una sola unità, dovrebbe essere compreso il numero cercato. Il minore di essi allora è la radice quadrata a meno dell'unità, per difetto, del dividendo (N.° 6).

11. — Il metodo delle successive divisioni permette adunque di risolvere il problema.

$$x^2 = n .$$

Rimane da vedere se è possibile di restringere la ricerca alle ultime divisioni, per modo che il metodo non si presenti svantaggioso al confronto di quello comunemente seguito. I teoremi che seguono mettono in evidenza questa possibilità, e offrono, unitamente ai precedenti, una teoria del tutto elementare della nuova operazione.

12. Esempio. — Consideriamo le tre moltiplicazioni seguenti:

$$324 \times 100 = 32400 ; \; 324 \times 715 = x ; \; 324 \times 1000 = 324000 .$$

La prima moltiplicazione si eseguisce ponendo 2 zeri alla destra del moltiplicando; dunque il prodotto à 2 cifre di più del moltiplicando

La terza moltiplicazione si eseguisce ponendo 3 zeri alla destra del moltiplicando; dunque il prodotto à 3 cifre di più del moltiplicando.

Nella seconda operazione il moltiplicatore è compreso fra il 100 e il 1000 e à quindi 3 cifre. Il prodotto adunque ne avrà due o 3 più del moltiplicando, ossia:

Teorema. — *Il prodotto di due numeri possiede tante cifre quante ne ànno complessivamente i due fattori, oppure tal numero*

diminuito di uno. In generale, sia:

$$a \times n = p$$

in cui n abbia r cifre. Allora esso sarà compreso tra 10^{r-1} e 10^r.

Ora il prodotto $a \times 10^{r-1}$ possiede $(r-1)$ cifre più del moltiplicando, e $a \times 10^r$ ne possiede r di più. Se il moltiplicando presenta adunque c cifre, il prodotto $a \cdot n$ ne presenterà sia $c + (r-1)$ sia $(c + r)$.

13. Esempio. — Si abbia ora il prodotto:

$$4572 \times 4572 = 4572^2.$$

Il numero delle cifre del prodotto sarà in tal caso $4 + 4 = 4 \times 2$ oppure $(4 + 4) - 1 = (4 \times 2) - 1$. Se il numero avesse 5 cifre, il suo quadrato ne avrebbe similmente (5×2) oppure $(5 \times 2) - 1$; e così di seguito. Dunque:

Teorema. — *Se un numero si moltiplica per sè stesso il prodotto possiede un numero doppio di cifre, o il doppio meno uno.*

14. Esempio. — Si abbia un numero di 10 o di 9 cifre. La sua radice quadrata deve averne 5. Infatti, conformemente al Teor. che precede, se un numero à 5 cifre, il suo quadrato deve averne appunto $5 \times 2 = 10$ oppure $(5 \times 2) - 1 = 9$.

Inoltre: se questa radice quadrata avesse 4 cifre, il numero dovrebbe averne 8 oppure 7; se invece la radice presentasse 6 cifre, il numero dovrebbe averne 12 oppure 11. Si può adunque concludere che:

Teorema. — *La radice quadrata di un numero presenta la metà delle cifre del numero stesso, o la metà più uno, secondo che il numero dato consta di un numero pari o dispari di cifre.*

In generale: Si abbia un numero con $2n$ oppure con $(2n - 1)$ cifre. La sua radice dovrà averne n. Infatti avendone n il suo quadrato ne avrebbe appunto $2n$, oppure $(2n - 1)$, mentre avendone invece $(n \pm 1)$ il suo quadrato dovrebbe possederne $(2n \pm 2)$ oppure $(2n + 1)$ o $(2n - 3)$, contrariamente alla ipotesi.

15. Esempio:

$47000 \times 47000 =$ al quadrato di 47 seguito da $3 + 3 = 3 \times 2$ zeri

Teorema. — *Se un numero termina con zeri il suo quadrato termina con un numero doppio di zeri.*

In generale $(a \cdot 10^n)^2 = a^2 \cdot 10^{2n}$.

16. Esempio. — Sia $\sqrt{42000000}$. Tale numero è minore della $\sqrt[2]{49}$ seguita da 3 zeri e maggiore della $\sqrt[2]{42}$ a meno della unità per difetto, pure seguita da 3 zeri. Infatti se la $\sqrt[2]{49}$ oppure $\sqrt[2]{42}$ fosse seguita da due soli zeri, il suo quadrato terminerebbe con 4 zeri e non con 6; se fosse invece seguita da 4 zeri, il suo quadrato terminerebbe con 8 zeri e non con 6. Dunque:

Teorema. — *Se un numero termina con un numero pari di zeri la sua radice quadrata è compresa tra quella a meno dell'unità per difetto e quella a meno dell' unità per eccesso del numero che resta tolti gli zeri, seguita da metà di questi zeri.*

In generale: se r^2 è il maggior quadrato perfetto contenuto in a, si ànno le diseguaglianze

$$(r+1)\cdot 10^n > \sqrt{a \cdot 10^{2n}} > r \cdot 10^n$$

Infatti $\sqrt[2]{a \cdot 10^{2n}} = \sqrt[2]{a} \cdot 10^n$, e poi ipotesi $(r+1)^2 > a > r^2$

17. Problema. — *Trovare il numero che moltiplicato per sè stesso è uguale a un numero dato; ossia risolvere la equazione* $x^2 = n$.

Esempio. — Sia da risolvere l'equazione $x^2 = 42587932$. Poichè il numero dato presenta 8 cifre la sua radice ne avrà 4 (N.° 14). Se le ultime cifre fossero 6 zeri, ossia se il numero fosse 42000000, la radice, ossia il numero da noi cercato, sarebbe compreso tra 6000 e 7000, la cui media è 6500.

Se ora si divide il numero dato 42587932 per questa media, il quoto dovrà essere minore di 7000 (N.° 10), ma pur sempre superiore a 6000.

Se difatti il quoto scendesse anche solo a 6000 vorrebbe dire che il divisore supera il 7000, poichè 6000×7000 dà meno di 42587932.

Eseguendo si ottiene infatti:

$$42587932 : 6500 = 6551.$$

Il numero da noi cercato sarebbe dunque compreso (N.° 10) tra 6500 e 6551, la cui media è 6525 a meno di un' unità. Ripetendo il ragionamento, si viene alla divisione

$$42587932 : 6525 = 6526$$

la quale ci dice che 6525 è la radice cercata a meno della unità per difetto (N.° 9).

18. Sia da trovarsi $\sqrt[2]{575728905}$. La operazione può disporsi come quì sotto:

	8786		7995		8		
20000	28786	24393	23602	23997	23991	23994	23994
575728905		575728905		575728905		575728905	
175728		87868		95788		95848	
157289		146899		237979		238669	
172890		054105		220060		227230	
128905		5319		40875		112845	
8905				16878		16869	

L'operazione può descriversi come segue: Il numero di cui si cerca la radice si separa in gruppi di due cifre ciascuno a partire dalla destra. Si vede tosto la radice a meno dell' unità dell' ultimo gruppo, il quale è di una o di due cifre. Tale radice è un numero di una cifra, e si fa seguire da tanti zeri quanti sono i gruppi rimanenti. Il numero ottenuto si pone sopra il dividendo, e di fianco, separato da una retta verticale, gli si pone il quoto che avrà un egual numero di cifre. Così si opera per ciascuna divisione.

Ogni divisore si compone di due parti: quella *certa* in cui aumenta il numero delle cifre e quella *variabile* in cui diminuisce. Poichè nella media la parte certa ricompare, così basta addizionare le parti variabili del quoto e del divisore, ponendo la somma al disopra del quoto. Per la divisione successiva si trascrive la parte certa facendola seguire dalla metà della somma trovata, calcolata a meno di un' unità se la somma trovata sia dispari, e similmente si procede finchè il quoto e il divisore non differiscono che di due unità al più (N.° 9). Possono quindi presentarsi tre casi:

1° - Il quoto e il divisore risultano eguali. Ciascuno è la radice cercata.

2° - Il quoto e il divisore differiscono di una unità La radice cercata è allora il più piccolo dei due numeri, (N.° 9).

3° - Il quoto e il divisore differiscono di due unità. La radice cercata, ossia quella in *difetto* sarebbe ancora il numero minore, ma il numero intermedio, ossia la radice quadrata a meno dell' unità in *eccesso*, sarebbe assai più approssimata dell' altra.

Difatti se i numeri ottenuti fossero, ad esempio, 14 e $16 = 14 + 2$ si avrebbe $14 \times 16 = 14^2 + 14 \times 2$ il qual risultato è minore del numero dato. Ma se questo numero avesse una unità di più si sarebbe ottenuto 15 poichè $15^2 = 14^2 + 14 \times 2 + 1$ (N.° 8). Scegliendo adunque 15, che è il numero intermedio tra 14 e 16, si avrebbe un numero il cui quadrato *supera* il numero dato da una sola unità, mentre sciegliendo il 14 si avrebbe un numero il cui quadrato sarebbe inferiore al numero dato di 14×2 unità.

Nell' esempio precedente, facendo tosto la media fra 20000 e 30000, il procedimento si abbrevia come segue:

	8029		7988		
25000	23029	24014	23974	23994	23994
575728905		575728905		575728905	
75728		95448			
72890		234069			
228905		179430			
3905		113325			

19. — *Radice quadrata con approssimazione.*

Premesso: 1°) che un numero decimale non cambia valore per quanti zeri si pongano alla sua destra; 2°) che il numero delle cifre decimali di un prodotto è uguale alla somma dei numeri delle cifre decimali dei fattori, ne segue

Teorema. — *Se un numero decimale si moltiplica per sè stesso il prodotto possiede un numero doppio di cifre decimali.*

Teorema. — *Se un numero decimale possiede un numero pari di cifre decimali, la sua radice quadrata, approssimata fino a tener calcolo di tutte, ne presenta la metà* (N.° 14).

Esempio: Si voglia la radice quadrata del 7 con quattro cifre decimali.

Poniamo il 7 sotto forma di numero decimale, ossia con otto cifre decimali nulle

	13000	915			
25000	28000	26500	26415	26457	26458
700000000		700000000		700000000	
200000		170000		170860	
0000		110000		121180	
		40000		153520	
		135000		212350	
		2500		00694	

La radice quadrata di 7 a meno di un decimillesimo è adunque 2,6457.

Esempio. — Si voglia la radice quadrata del numero 575,728905. Essa sarà (N.° 18) 23,994.

20. *Osservazione.* — Dagli esempi offerti si vede come la parte certa della radice (N.° 18) aumenti rapidamente il numero delle sue cifre, mentre con l' altro metodo si trova una cifra alla volta. Fino ai numeri di nove cifre da noi considerati, il qual limite è di rado oltrepassato nei problemi elementari, l' economia dei due procedimenti è presso a poco la medesima, con un vantaggio non trascurabile per il nuovo di essere a un tempo più intuitivo e meno complicato. Se in qualche caso esso si presenta un poco più lungo, offre in compenso minor probabilità di errori. Può essere che il favore serbato al metodo consueto sia dovuto alla tema di dover eseguire una divisione per ogni nuova cifra da aggiungere alla parte certa. Ora questo dubbio è eliminato dal seguente teorema :

21. Teorema. — *Nella ricerca della radice quadrata mediante successive divisioni il numero delle cifre cresce, ad ogni operazione in progressione geometrica.*

Sia N un numero qualunque e sia $(a + x)$ la sua radice quadrata, in cui a rappresenta la parte certa già trovata e x la parte da trovarsi.

Il numero delle cifre sia $(c + v)$, delle quali le ultime v appartengono alla parte x. Dopo un certo numero di divisioni si abbia per media $(a + u)$. La divisione successiva darà

$$N : (a + u) = \{ a^2 + 2 \cdot a \cdot x + x^2 + R \} : (a + u) = a + (2 \cdot x - u) +$$

$$+ \frac{(x - u)^2 + R}{a + u} .$$

Poniamo:

$$\frac{(x - u)^2 + R}{a + u} = F. \tag{1}$$

Allora la semisomma del divisore e del quoto risulta:

$$(a + x) + \frac{F}{2} .$$

La nuova divisione sarà adunque

$$\left\{ a^2 + 2a \cdot x + x^2 + R \right\} : \left\{ (a + x) + \frac{F}{2} \right\} = \left\{ (a + x)^2 + R \right\} :$$

$$: \left\{ (a + x) + \frac{F}{2} \right\} = (a + x) - \left(\frac{F}{2} \right) + \frac{R}{a + x} + \left(\frac{F}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{a + x} + \text{ecc...}$$

L' ultimo termine è ordinariamente trascurabile. Infatti nella espressione di F cioè nella (1) si noti che deve essere $R < 2 \cdot (a + x)$ e quindi $R < 2 \cdot (a + u)$. Quindi la parte $\frac{R}{2 (a + u)}$ essendo minore della unità è trascurabile. Rimane adunque da considerare la espressione

$$\left\{ \frac{(x - u)^2}{2 \cdot (a + u)} \right\}^2 \cdot \frac{1}{a + x} = \frac{(x - u)^4}{4 \cdot (a + u)^2 \cdot (a + x)} . \tag{2}$$

Ora x ed u ànno ciascuno v cifre. La loro differenza m avrà adunque *al massimo* v. Il biquadrato della differenza ne avrà dunque *al massimo* $4 \cdot v$. La somma $(a + u)$ possiede $(c + v)$ cifre. Il suo quadrato ne avrà *al meno* $2 \cdot (c + v) - 1$, e altrettante il quadruplo di questo quadrato. La somma $(a + x)$ possiede pure

$(c+v)$ cifre. Il suo prodotto col precedente presenterà *al meno* $3(c+v)-2$ cifre. Il quoto ne presenterà dunque *al massimo.*

$$4 \cdot v - 3 \cdot (c+v) + 2 + 1 = v - 3c + 3 = (v+3) - 3 \cdot c \qquad (3)$$

differenza che si annulla per $c = \frac{v+3}{3}$.

Ponendo $s = c + v$, la differenza precedente si annulla per

$$c = \frac{s+3}{4}.$$

Nel caso più sfavorevole adunque il termine (2) è trascurabile non appena il numero delle cifre accertate raggiunge $\frac{1}{4}$ di quello delle cifre cercate. In realtà i casi di massimo e di minimo considerati non concorrono mai tutti, e però ordinariamente il termine considerato si può trascurare.

Facciamo ora la differenza tra il quoto e il divisore della 1ª divisione. Questa differenza è

$$2 \cdot (x-u) + F. \qquad (4)$$

Facciamo ora la differenza consimile tra il quoto e il divisore della IIª divisione. Questa differenza è

$$\frac{R}{a+x} - F. \qquad (5)$$

Ora il numero rappresentato dal termine $2(x-u)$ nella (4) presenta al massimo v cifre. Quello rappresentato da F ne presenta invece $2 \cdot v - (c+v) = v - c$. Valore che è massimo per $c = 1$. Nella differenza successiva (5), ove non conta che il termine F, essendo il primo < 1, non resta adunque che un numero che possiede *al più* $(v-1)$ cifre. Questo significa che la parte certa à guadagnata una cifra e quella da trovarsi ne ha perduta una.

Quando adunque il numero s delle cifre cercate è $s = 1 + v$ alla divisione successiva avremo $s = 2 + (v-1) = 1 + v$.

Alla nuova divisione la parte da trovarsi verrebbe a possedere $(v-1) - 2 = v - 3$ cifre, onde $s = 4 + (v-3) = 1 + v$.

In generale

$$(v - c) \qquad (6)$$

rappresenta il numero delle cifre possedute dalla parte incerta e quindi $2c$ quello delle cifre guadagnate dalla parte certa della radice.

In altre parole, ad ogni divisione la parte certa della radice cercata acquista il doppio delle cifre guadagnate con la divisione precedente, e poichè la serie comincia con 1, 2, 3, così essa deve continuare con 2^3, 2^4, ecc.

Come volevasi dimostrare.

22. *Osservazione.* — Dalla legge trovata risulta che quando rimangano da trovarsi non più del doppio delle cifre guadagnate con l' ultima divisione, esse si ottengono con l' ultima media. Siccome inoltre per $(v - c) = 0$ la parte incerta non à più cifre, così ottenuto che sieno metà almeno delle cifre cercate, la media successiva darà l' altra metà.

23. *Esempio di verifica.*

Si abbia l' equazione

$$x^2 = 4372965732384752632955372816822735886327$$

ove il numero dato è di 40 cifre. La sua radice ne avrà 20

Primo divisore	6|50 0000 00000000 00000
Primo quoto	6|72 7639 58828423 48199
Prima media	6|61|3819 79414211 74099
Secondo quoto	6|61|1861 20471407 95957
Seconda media	6|61|2840|49942809 85028
Terzo quoto	6|61|2840|17475235 02988
Terza media	6|61|2840|33709022|44008
Quarto quoto	6|61|2840|33709022|04156
Ultima media e radice	6 61 2840 32709022 24082

il qual risultato fu controllato col procedimento ordinario.

Aggiunte e rettifiche all' articolo di D. Gambioli " Sul triangolo ortico e su un trapezio speciale „

DIONISIO GAMBIOLI (Roma) (1)

1. Le formule (2) e (2') a p. 93 e p. 94 debbono essere scritte così:

$$(2)\quad s' = \frac{\sqrt{2}}{4n^2}(n^2 - 3n + 3)\cdot l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\right]\cdot l^2.$$

$$(2)'\qquad s' = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot l^2.$$

A p. 92 nel Teor. del n. 3 deve dire un triangolo *acutangolo* invece di triangolo qualunque, e così nella dimostrazione.

A p. 95 nella quint'ultima linea si ha

$$A'B' = \frac{a^2 h_a c\,(-a^4 + b^4 - c^4 + 2a^2 c^2)}{b^2 h_b\,(4a^2 h_a{}^2 - a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2 c^2)}\,.$$

Nella p. 96 la settima riga va scritta così:

$$-a^4 + b^4 - c^4 + 2a^2 c^2 = b^4 - (a^2 - c^2)^2 \text{ ecc.}$$

A p. 97 alla terz'ultima riga di seguito ad $M'N'P' = \frac{1}{4}\cdot ABC$ va aggiuto: « inoltre $PNM'N'$, $MNP'N'$ sono rettangoli ». E nell'ultima riga della stessa pagina deve dire: « lo stesso circoncerchio, che *non* è concentrico a quello delle triangolo ABC.... ».

---

(1) Cfr. questo *Bollettino* — Anno XI (n.i 6-7-8) p. 92 e seguenti.

2. La dimostrazione data a pagina 92 nel n. 3 del Teor. di Francesco Fagnani non mi sembra convincente; ora intendo di darne qui un'altra. A tal uopo occorre dimostrare alcuni teoremi.

3. Teor. (1) *In un triangolo dato non si possono inscrivere due triangoli coi lati rispettivamente paralleli fra loro.*

Dim. Supponiamo, se è possibile, che nel triangolo ABC si possano inscrivere i triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ coi lati rispettivamente paralleli; allora questi triangoli sono simili, quindi si ha:

$$A'B' : A''B'' = A'C' : A''C''.$$

Ma questa proporzione è impossibile, perchè è:

$$A'B' \gtrless A''B'' \quad \text{ed} \quad A'C' \lessgtr A''C''.$$

Dunque ecc.

4. Teor. *Se in un triangolo dato è inscritto un triangolo, che ha le coppie dei suoi lati egualmente inclinati sul lato del triangolo dato, in cui giace il vertice dell'angolo fatto da questi lati, gli angoli di questo triangolo inscritto sono doppii dei complementi degli angoli del triangolo primitivo, e precisamente ciascuno di essi è doppio del complemento dell'angolo opposto al lato, su cui trovasi il vertice dell'angolo considerato,*

Dim. Siano ABC il triangolo dato, $A'B'C'$ il triangolo inscritto in esso, e sia:

$$B\widehat{A'}C' = C\widehat{A'}B'\,;\;\; B\widehat{C'}A' = A\widehat{C'}B'\,;\;\; A\widehat{B'}C' = C\widehat{B'}A'.$$

Indichiamo con α i primi due angoli; allora avremo:

$$A\widehat{C'}B' = 180^\circ - (\widehat{B} + \alpha),\;\; A\widehat{B'}C' = 180^\circ - (\widehat{C} + \alpha).$$

Ora dal triangolo $AB'C'$ abbiamo

$$\widehat{A} + \widehat{C'} + \widehat{B'} = 180^\circ = \widehat{A} + 180^\circ - (\widehat{B} + \alpha) + 180^\circ - (\widehat{C} + \alpha)\,;$$

(1) Le figure di questa Nota sono sì semplici, che il lettore può farsele da sè.

da cui si ha

$$\widehat{B} + \widehat{C} + 2\alpha = 180° + \widehat{A};$$

quindi

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + 2\alpha = 180° + 2\widehat{A};$$

ossia

$$2\alpha = 2\widehat{A};$$

quindi

$$\widehat{A} = \alpha.$$

Onde è:

$$B'\widehat{A'}C' = 180° - 2\widehat{A},$$

ossia

$$\widehat{A}' = 180° - 2\widehat{A} = 2 \cdot (90° - \widehat{A});$$

Similmente si dimostra che è:

$$\widehat{B}' = 2 \cdot (90° - \widehat{B}),$$

$$\widehat{C}' = 2 \cdot (90° - \widehat{C}).$$

Corollario. In un triangolo dato (vedi Teor. del n. 3) non si può inscrivere che un sol triangolo, che abbia le coppie dei suoi lati egualmente inclinati sul lato del triangolo dato, in cui giace il vertice dell'angolo fatto da detti lati.

5. Teor. *Il triangolo ortico di un triangolo dato è il solo triangolo, che vi si possa inscrivere ed abbia le coppie dei suoi lati egualmente inclinati sul lato del triangolo dato, in cui giace il vertice dell'angolo compreso fra detti lati.*

Dim. Si sa che le altezze del triangolo dato sono le bisettrici del suo triangolo ortico; quindi questo triangolo ha le coppie dei suoi lati egualmente inclinati sul lato del triangolo dato, in cui trovasi il vertice dell'angolo compreso fra detti lati; quindi per il corollario del Teor. del n. 4 esso è *unico* ecc. Dunque ecc.

6. Teor. *Se il perimetro di un* Δ, *fra tutti quelli, che si possono inscrivere in un* Δ *acutangolo dato, è minimo, le coppie dei lati del* Δ *inscritto sono egualmente inclinati sul lato del* Δ *dato, in cui trovasi il vertice dell'angolo fatto da essi; e reciprocamente.*

Dim. Sia ABC il Δ acutangolo dato, $A'B'C'$ uno dei Δ inscritti in esso. Io dico:

I. Che se $A'B'C'$ ha il perimetro minimo, allora si ha:

$$B\widehat{A'}C' = C\widehat{A'}B'; \quad A\widehat{B'}C' = C\widehat{B'}A'; \quad A\widehat{C'}B' = B\widehat{C'}A'.$$

Infatti supponiamo, se è possibile, che sia $B\widehat{A'}C' \neq C\widehat{A'}B'$; allora posso sempre determinare sul lato BC quel tal punto A'', onde si ha: $B\widehat{A''}C' = C\widehat{A''}B'$; in tal caso si ha (vedi n. 1 dell'art. citato):

$$B'A'' + A''C' < B'A' + A'C';$$

quindi:

$$C'B' + B'A'' + A''C' < C'B' + B'A' + A'C'.$$

Ma allora il perimetro del $\Delta\ A''B'C'$ è minore del perimetro del $\Delta\ A'B'C'$; il che è contro l'ipotesi. Dunque ecc.

II. Che il $\Delta\ A'B'C'$, inscritto nel $\Delta\ ABC$, è tale che si ha:

$$(1) \quad B\widehat{A'}C' = C\widehat{A'}B'; \quad A\widehat{B'}C' = C\widehat{B'}A'; \quad A\widehat{C'}B' = B\widehat{C'}A',$$

il perimetro del $\Delta\ A'B'C'$ è minimo.

Dim. 1ª - Infatti si prenda sul lato BC un altro punto A'', distinto da A', e lo si congiunga a B', C'; ora si sa che è:

$$B'A' + A'C' < B'A'' + A''C';$$

quindi:

$$C'B' + B'A' + A'C' < C'B' + B'A'' + A''C';$$

onde il perimetro del $\Delta\ A''B'C'$ è maggiore del perimetro del $\Delta\ A'B'C'$. Dunque ecc.

Dim. 2ª - Infatti verificandosi le condizioni (1), si ha (vedi n. 1 dell'art. citato), che il cammino più breve, che va da A' a B', passando per il punto C' del lato AB, è $A'C' + C'B'$; che il cammino più breve, che va da A' a C' passando per il punto A' del lato AC, è $B'A' + A'C'$; che il cammino più breve, che va da B' a C', passando per il punto A' del lato BC, è $B'C' + C'A'$; quindi la somma di queste tre spezzate, cioè:

$$(A'C'+C'B')+(B'A'+A'C')+(B'C'+C'A')=2(A'B'+B'C'+C'A')$$

sarà minima, e così la sua metà:

$$A'B' + B'C' + C'A'.$$

7. Teor. *Il triangolo ortico di un triangolo acutangolo dato ha il perimetro minimo fra tutti quelli inscritti nel triangolo primitivo.*

Dim. Il triangolo ortico di un triangolo acutangolo dato è il solo fra i triangoli che vi si possono inscrivere, il quale soddisfi alle condizioni del Teor. 6; quindi esso ha il perimetro minimo fra tutti quelli inscritti nel triangolo primitivo.

8. Se a', b', c' sono i lati del triangolo ortico $A'B'C'$, $2p'$ il suo perimetro, R' il raggio del suo circoncerchio, si è veduto (n. 4) che è:

$$\widehat{A}' = 2(90^\circ - \widehat{A}); \ \widehat{B}' = 2(90^\circ - \widehat{B}); \ \widehat{C}' = 2(90^\circ - \widehat{C});$$

onde:

$$2R' = \frac{a'}{\operatorname{sen} 2A} = \frac{b'}{\operatorname{sen} 2B} = \frac{c'}{\operatorname{sen} 2C} = \frac{2p'}{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C}.$$

Ma si sa che è

$$\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C;$$

quindi abbiamo

$$R' = \frac{p'}{4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}. \tag{1}$$

Ora si sa che è:

$$2s = 4R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C,$$

ove s è l'area del triangolo ABC ed R il raggio del suo circoncerchio; allora abbiamo:

$$R' = \frac{p'R^2}{2s}. \tag{2}$$

Dal triangolo acutangolo ABC si ha facilmente:

$$AB' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}.$$

Ora dai triangoli simili $BA'C'$, BAC si ha

$$AB' : B'C' = AB : BC,$$

ossia:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} : B'C' = c : a ;$$

da cui ho:

$$B'C' = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc},$$

ossia:

(3) $\quad a' = \dfrac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{2abc}$ ed altre due analoghe per b', c'.

Essendo

$A'C' = b \cos A$; dal triangolo $AB'C'$ ho
$A'C' : \text{sen } B = B'C' : \text{sen } A$,

ossia:

$$b \cos A : \text{sen } B = a' : \text{sen } A ;$$

da cui:

$$a' = \frac{b}{\text{sen } B} \text{sen } A \cos A = 2R \text{ sen } A \cdot \cos A = R \text{ sen } 2A ;$$

d'onde

$$\frac{a'}{\text{sen } 2A} = R ;$$

ma si è veduto precedentemente che è:

$$\frac{a}{\text{sen } 2A} = 2R' ;$$

quindi:

(4) $$R = 2R'$$

cioè: « Il diametro del circoncerchio del triangolo ortico (e quindi del cerchio dei nove punti di un triangolo dato) è uguale al raggio del circoncerchio del triangolo dato ».

Si è veduto precedentemente che è $R' = \dfrac{p'R^2}{2s}$; quindi per l'ultima eguaglianza avremo:

$$2R' = \frac{p'R^2}{s} = R ;$$

d'onde:

(5) $$s = p' \cdot R .$$

Ma si sa che è:

(6) $$s = p \cdot r;$$

ove r è il raggio del cerchio inscritto nel triangolo ABC e p il perimetro di questo triangolo.

Dalle eguaglianze (5) e (6) si ha:

(7) $$R : r = p : p';$$

cioè: « I raggi dei cerchi circoscritto ed inscritto ad un triangolo dato sono proporzionali ai semi-perimetri di questo triangolo e del suo triangolo ortico ».

Moltiplicando membro a membro le eguaglianze (6) e (7) ho:

$$s^2 = pp'Rr;$$

d'onde

(8) $$s = \sqrt{pp'Rr}.$$

9. Porremo termine a questa nota dimostrando alcuni teoremi riguardanti il cerchio dei nove punti di un triangolo. Sia ABC il triangolo dato; A', B', C' i piedi delle sue altezze; O l'ortocentro, O' il centro del circoncerchio del triangolo ABC; K il centro del cerchio dei nove punti; M il centro del lato BC; E l'intersezione della $O'M$ prolungata col circoncerchio di ABC; P' il centro del segmento OA; G l'intersezione di MA, OO'; S l'intersezione di MP', AE'; e KH, KT le perpendicolari condotte da K rispettivamente su BC, AA'. Nei teoremi che seguono ci riferiremo sempre alla figura indicata in questo numero.

10. Teor. *Dimostrare che è*

(9) $$AP' = MO'.$$

Dim. Dal triangolo ABC si ha:

$$OA : \text{sen}\, \widehat{OBA} = AB : \text{sen}\, \widehat{AOB},$$

ossia

$$2AP' : \cos A = c : \text{sen}\, C;$$

da cui ho

(10) $$AP' = \frac{c \cos A}{2 \,\text{sen}\, C} = R \cos A.$$

Ora dal triangolo $O'MB$ si ha:

$$MO' = O'B \cdot \cos \widehat{BO'M} = O'B \cdot \cos \widehat{BO'E} = O'B \cdot \cos A\,,$$

ossia

(11) $$MO' = R \cos A\,.$$

Dalle (10) ed (11) si ha la (9).

Corollario 1°: Essendo $O'M$, AP' entrambe perpendicolari al lato BC, esse sono perciò parallele; onde $O'AP'M$ è un parallelogramma.

Corollario 2°: Dal corollario 1° ne consegue che è $O'A = MP'$; ma il cerchio dei nove punti passa per i vertici del triangolo rettangolo $A'MP'$; quindi l'ipotenusa MP' è un suo diametro. Onde se R' è un raggio di questo cerchio si ha

$$R = 2R',$$

come si è veduto nel numero 8.

Corollario 3°: Essendo $AP' = R \cos A$ ed

$$AP' = \frac{OA}{2}\,,$$ ne consegue che è:

(12) $$OA = 2R \cos A\,.$$

11. Teor. *Dimostrare che* OO', MP' *si tagliano scambievolmente er metà, ed è*:

(13) $$ME = MS\,.$$

Dim. 1ª - Infatti essendo P' il centro di OA e $P'M$ parallela ad $O'A$, ne consegue che nel triangolo OAO' la $P'M$ taglierà pure l'altro lato OO' nel suo centro K. I due triangoli KOP', KMO' essendo uguali, si ha $KM = KP'$.

Dim. 2ª - Ora osservo che essendo MS parallela ad $O'A$, ed essendo $EO' = O'$ ne A,consegue che è pure:

$$ME = MS\,.$$

12. Teor. *Dimostrare che è*

(14) $$GA = 2GM\,,$$

cioè G è il baricentro del triangolo ABC, essendo AM una sua mediana.

Dim. Osservo che i due triangoli GOA e $GO'M$ sono simili; ed avendo dimostrato (Teor. 10) che è $O'M = AP' = P'O$, ne consegue che è $OA = 2O'M$; quindi sarà $GA = 2GM$. Dunque ecc.

13. Teor. *Il centro del cerchio dei nove punti, l'ortocentro, il baricentro, ed il centro del circoncerchio di un triangolo dato sono* collineari.

Dim. Essendo K il centro di MP', esso è perciò il centro del cerchio dei nove punti, poichè MP' (Corollario 2° del Teor. 10) è un suo diametro; inoltre si è veduto che G (Teor. 12) è il baricentro del triangolo ABC; ma K, O, G ed O' sono sulla stessa retta OO'; dunque ecc.

14. Teor. *Dimostrare che è*

$$KH = \frac{1}{2} R \cos(C - B). \tag{15}$$

Dim. Dal triangolo rettangolo KHM si ha:

$$KH = KM \operatorname{sen} K\widehat{M}H = \frac{MP'}{2} \operatorname{sen} K\widehat{M}A' \text{ ; ossia}$$

$$KH = \frac{R}{2} \cos M\widehat{P'}A' = \frac{R}{2} \cos O'\widehat{A}A' = \frac{R}{2} \cos (B\widehat{A}A' - B\widehat{O}A) =$$

$$= \frac{R}{2} \cos [(90° - \widehat{B}) - (90° - \widehat{C})] = \frac{R}{2} \cos (C - B),$$

ossia:

$$KH = \frac{R}{2} \cos (C - B).$$

Osservazione. Da quanto precede si vede che è:

$$O'\widehat{A}A' = \widehat{C} - \widehat{B}. \tag{16}$$

15. Teor. *Dimostrare che è:*

$$KT = \frac{R}{2} \cdot \operatorname{sen} (C - B). \tag{17}$$

Dim. Dal triangolo rettangolo KTP' si ha

$$KT = KP' \operatorname{sen} K\widehat{P'}T = \frac{R}{2} \operatorname{sen} M\widehat{P'}A' = \frac{R}{2} \cos P'\widehat{M}A' =$$
$$= \frac{R}{2} \operatorname{sen} O'\widehat{M}P' = \frac{R}{2} \operatorname{sen} O'\widehat{A}A' .$$

Ricordando la (16) del n. 14 ho:

$$KT = \frac{R}{2} \operatorname{sen}(C - B) .$$

Osservazione. Dalle (15) e (17) ho:

$$KT = KH \operatorname{tang}(C - B) . \tag{18}$$

16. Teor. *Dimostrare che si ha:*

$$OO' = R \cdot \sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C} . \tag{19}$$

Dim. Rammento intanto (vedi Cor. 3° del Teor. 10) che è: $OA = 2R \cos A$, e che è (Osservaz. del Teor. 14) $O'AA' = \widehat{C} - \widehat{B}$; allora dal triangolo OAO' si ha

$$\begin{aligned} \overline{OO'}^2 &= \overline{O'A}^2 + \overline{OA}^2 - 2 \cdot O'A \cdot OA \cos(C - B) = \\ &= R^2 [1 + 4 \cos^2 A - 4 \cos A \operatorname{co}(C - B)] = \\ &= R^2 + 4R^2 \cos A [\cos A - \cos(C - B)] = \\ &= R^2 + 4R^2 \cos A [- \cos(B + C) - \cos(C - B)] = \\ &= R^2 - 8R^2 \cos A \cos B \cos C . \end{aligned}$$

ossia

$$\overline{OO'}^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C) ; \tag{21}$$

dalla quale ho

$$OO' = R \cdot \sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C} .$$

17. Teor. *Dimostrare che è:*

$$KA = \frac{1}{2} R \sqrt{1 + 8 \cos A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} . \tag{22}$$

Dim. Si sa che K è il centro di OO' (vedi Teor. 11) ed $OA = 2R \cos A$, (vedi Corollario 3° del Teor. 10); ora dal triangolo $O'KA$ si ha:

$$(\alpha) \quad \overline{O'A}^2 = \overline{O'K}^2 + \overline{KA}^2 - 2O'K \cdot AK \cdot \cos O'\widehat{K}A .$$

Similmente dal triangolo $\dot{O}KA$ si ha:

$$(\beta) \quad \overline{OA}^2 = \overline{OK}^2 + \overline{KA}^2 - 2 \cdot OK \cdot KA \cdot \cos O\widehat{K}A =$$
$$= \overline{O'K}^2 + \overline{KA}^2 + 2 \cdot O'K \cdot KA \cos O'\widehat{K}A .$$

Sommando membro a membro le (α), (β) si ha:

$$(\gamma) \qquad \overline{O'A}^2 + \overline{OA}^2 = 2 \cdot \overline{O'K}^2 + 2\overline{KA}^2.$$

Ora rammento che è $O'A = R$ ed $O'K = \frac{1}{2} OO'$; quindi dalla (γ) si ha:

$$2 \cdot \overline{KA}^2 = \overline{O'A}^2 + \overline{OA}^2 - 2\overline{O'K}^2 = R^2 + 4R^2 \cos^2 A - 2\widehat{O'K}^2 =$$
$$= R^2 + 4R^2 \cos^2 A - \frac{1}{2} \widehat{OO'}^2.$$

Ora rammentando la formula (21) del n. 16, questa ultima eguaglianza si può scrivere così:

$$\begin{aligned} 4\overline{KA}^2 &= 2R^2 + 8R^2 \cos^2 A - R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C) = \\ &= R^2 + 8R^2 \cos A (\cos A + \cos B \cos C) = \\ &= R^2 + 8R^2 \cos A [- \cos (B + C) + \cos B \cos C] = \\ &= R^2 + 8R^2 \cos A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C ; \end{aligned}$$

ossia:

$$4KA^2 = R^2 \cdot (1 + 8 \cos A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C);$$

da cui ho:

$$KA = \frac{R}{2} \sqrt{1 + 8 \cos A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}.$$

18. TEOR. *Se il triangolo* ABC *è equilatero, il centro del cerchio dei nove punti coincide: 1° col centro del circoncerchio del triangolo dato; 2° col centro del cerchio inscritto in esso.*

Dim. 1ª - Il centro K del cerchio dei nove punti è su KH, la quale è perpendicolare ad $A'M$ nel punto di mezzo H di esso; così detto punto non può coincidere con O' a meno, che A' ed M non coincidano; in tal caso l'altezza AA' passa per il centro del lato BC, quindi è $\widehat{B} = \widehat{C}$. Similmente si dimostra che è $\widehat{A} = \widehat{C}$. Dunque ecc.

Dim. 2ª - Sia r il raggio del cerchio inscritto nel triangolo ABC; nel Teor. 14 si è veduto che si ha:

$$r = \frac{R}{2}\cos(C - B) = \frac{R}{2}\cos(C - B) = \frac{R}{2}\cos(C - B);$$

d'onde:

$$\cos(C - B) = \cos(C - A) = \cos(B - A);$$

quindi:

$$\widehat{C} - \widehat{B} = \widehat{C} - \widehat{A} = \widehat{B} - \widehat{A};$$

da cui si ricava:

$$\widehat{B} = \widehat{A}, \text{ e } \widehat{C} = \widehat{B};$$

osssia:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}. \text{ Dunque, ecc.}$$

OSSERVAZIONI E PROPOSTE

SUI PROGRAMMI E GLI ORARI DI MATEMATICA NEL GINNASIO-LICEO

(con una lettera inedita di G. VAILATI)

ALPINOLO NATUCCI (Ravenna)

I. — **Programmi e orarî.**

Nel Congresso tenuto a Genova dalla Mathesis si è discusso fra le altre cose dell' importante questione dell' insegnamento della matematica nelle scuole classiche. In esso è stato emesso il voto che venga aumentato l' orario della matematica di un' ora settimanale *almeno nel ginnasio superiore e in terza liceo.*

In un articolo inviato nel giugno scorso al direttore di questo *Bollettino*, io sostenevo invece che la riforma necessaria ed urgente era l' aumento di *un' ora settimanale in ogni classe del ginnasio inferiore.* Quest' articolo non fu pubblicato perchè da allora non è uscito più alcun numero del *Bollettino* fino al novembre.

Non avendo potuto intervenire al Congresso, mi si permetta di discutere qui il voto sopra riferito.

La maggior difficoltà con cui debba lottare l' insegnante di matematica nelle ultime classi del ginnasio e nel liceo, è l' insufficiente preparazione degli alunni. Un anno d' insegnamento è bastato a convincermi di questa verità. Non è raro trovare in quelle classi degli alunni che non sanno fare speditamente la divisione, e non parliamo per carità del calcolo colle frazioni e dell' estrazione di radice quadrata (1).

---

(1) Non sono il solo nè il primo a lamentarmi di questo. Vedasi G. Fazzari : *L' insegnamento delle matematiche nelle scuole classiche.* Critiche e proposte. *Bollettino Mathesis* — Anno III, n. 5-6-7-8, Appendice pag. 37.

Di qui difficoltà impreviste e perdita di tempo ogni volta che si voglia fare qualche applicazione delle teorie svolte; di qui poco interessamento alle teorie stesse delle quali non si conosce o non si sa sfruttare l'utilità pratica.

Due ore settimanali per un insegnamento pratico come quello delle prime classi del ginnasio non bastano, perchè non consentono di fare tutti quegli esercizii che sarebbero necessari per rendere gli alunni esperti nel calcolo e nella risoluzione dei problemi. Lo scopo di tale insegnamento va perciò in gran parte perduto.

A parte questo, è noto che coi bambini è necessaria la frequenza dell'insegnamento e la continua applicazione delle nozioni impartite per farle ritenere durevolmente, e questo specialmente per la matematica la quale da un lato ha un altissimo valore come disciplina formativa, dall' altro non è tale da impressionare fortemente le tenere intelligenze come potrebbe fare un racconto storico o un fenomeno naturale.

Come potranno dunque bastare due ore, che spesso si riducono a una per qualche vacanza o qualche passeggiata ginnastica?

A queste ragioni intrinseche, se ne aggiunge un' altra non meno notevole. Il giovinetto del ginnasio, nota il Fazzari [1], difficilmente può comprendere l'importanza dello studio della Matematica o del latino, ma egli sa che nei nostri ordinamenti scolastici « il latino è più importante della matematica con tante ore d'insegnamento, mentre la matematica con due ore la settimana è una materia affatto secondaria; quindi dedica tutto il suo tempo allo studio del latino e trascura completamente quello della matematica ». Anche per questa ragione (ve ne sono altre che non stiamo ora a notare) l'aumento d'orario dovrebbe essere integrato con un altro provvedimento necessario: *l'obbligo della prova scritta di matematica per la promozione da ognuna delle prime tre classi alla successiva.*

E ora veniamo a confrontare la mia proposta con quella suffragata dai voti del congresso. Ho proposto l'aumento di un'ora e la prova scritta di matematica per il solo ginnasio inferiore, non perchè non ritenga utile, almeno per gli effetti del nostro insegnamento, di estendere questi provvedimenti alla quarta e

---

[1] Relazione cit. pag. 41.

alla quinta classe, ma perchè prevedo tali e tante difficoltà che la proposta non potrebbe mai trionfare. Occorre ridurla pertanto per poterne sperare, anzi imporre l'attuazione

L'orario del ginnasio superiore è già troppo gravoso perchè convenga chiederne l'aumento, sia pure di una sola ora settimanale, e tanto meno si può pensare di aggiungere l'esame scritto di matematica come sesta prova alle cinque già esistenti, senza sollevare un coro di proteste difficilmente placabile D'altra parte ritengo che l'attuale orario possa bastare a svolgere il programma del ginnasio superiore, che non è troppo esteso ed è stato anche recentemente ridotto [1], e tanto meglio potrà bastare in seguito, quando cioè dopo l'attuazione della mia proposta, si avranno alunni meglio preparati. Bisogna evitare, come osserva giustamente il prof. Padoa, d'imporre senza discrezione lo studio della matematica, a scapito magari di altre discipline forse altrettanto importanti [2].

Invece l'orario del ginnasio inferiore è tale che non porta danno nè sovraccarico agli alunni l'aggiunta di un'ora settimanale. E' vero che l'insegnamento nelle classi superiori riesce più sodisfacente ed è meglio retribuito, ma i professori di matematica che nelle loro proposte hanno dato sempre prova del massimo disinteresse, non vorranno posporre ora l'utile della scuola al proprio particolare!

Anzi a questo proposito mi si conceda di aggiungere che l'aumento d'orario richiesto porterebbe all'erario un aggravio minimo. Gli insegnanti di ginnasio dovrebbero infatti fare *gratis* le tre ore d'insegnamento per completare l'orario, e gl'insegnanti di liceo che avessero l'incarico nel ginnasio, verrebbero a ricuperare appena quanto hanno perduto adesso per la revoca del decreto Orlando. Non vi sarebbero dunque nemmeno difficoltà finanziarie e non è inutile notarlo, specialmente nel momento attuale, sebbene come osserva il prof. Padoa, quando si tratta dell'efficacia di un insegnamento fondamentale non ci si debba preoccupare di meschine questioni di ruoli e di stipendi.

---

(1) Decreto 28 settembre 1911 che abolisce la facoltà d'opzione nei licei.

(2) Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica ecc. *Bollettino della Mathesis* 1912 n. 1-2-3-4, pag. 215, 216.

Quanto all' orario del liceo, non vi è da parlare di aumenti per la prima e la seconda classe, per le quali l'orario attuale è sufficiente; non così per la terza. *In questa classe sarebbe proprio necessario l'aumento di un'ora*, perchè l'orario attuale se concede di svolgere in qualche modo il programma, non dà il tempo necessario per far molti esercizi, e senza di questi lo studio dei logaritmi e della trigonometria è lettera morta ([1]). In secondo luogo è opinione generale ormai che convenga introdurre anche nella scuola classica, quelle prime nozioni sulle funzioni, le derivate, le grafiche e i massimi e minimi, che sono richieste non solo dalla fisica ma anche dagli studi di medicina e di statistica.

Pensando all'importanza del concetto di funzione, che deve penetrare, come dice il Klein ([2]), a guisa di un fermento, tutto il contenuto dell' insegnamento, mal si comprende il bando ostinato che gli si è dato finora nei programmi delle nostre scuole ([3]).

Coll'aumento di orario si potrebbe fare anche qualche piccola innovazione nei programmi del ginnasio inferiore. Per l'aritmetica si potrebbe cominciare a parlare delle frazioni in prima classe fino alla sottrazione inclusa, e si potrebbe aggiungere in terza la regola di estrazione di radice cubica che ha importanti applicazioni in geometria. Di più senza iniziare propriamente l'algebra, si potrebbe abituare gli alunni ad esprimere con formule le proprietà delle operazioni e a giovarsi di formule anche nella risoluzione dei problemi. Per l'analisi di questi converrebbe indicare con lettere le incognite, e così senza accorgersene gli alunni si troverebbero avviati all' algebra ([4]).

Per la geometria non approvo che in 1° anno si studino le figure e in 2° si tratti della loro misura e in 3° s' imparino a costruire.

([1]) Vedasi anche A. Bottari: *Sui nuovi programmi di matematica nella scuola classica. Boll. di Matem.* anno XI, n. 6 7-8.

([2]) *Ueber eine Zeitgemässe Ungestaltung des mathematischen Unterrichts an den hôheren Schulen* — Leipzig 1905.

([3]) Il Fazzari (l. c. pag. 45, 46) propone innovazioni più ardite, accostandosi alle vedute del prof. Vailati delle quali parlerò tra breve, ma io ho voluto limitarmi alle modificazioni compatibili coll'attuale ordinamento degli studi.

([4]) Vedasi anche Bottari — art. cit.

Lo studio del primo anno corre rischio di ridursi ad un esercizio puramente mnemonico e dà scarsi frutti. Sarebbe invece molto utile riunire insieme lo studio delle proprietà di una figura colle regole per costruirla e per misurarla. Per precisare le mie idee darò uno schema di programma per le nozioni di geometria da impartirsi nel ginnasio inferiore.

Classe I. — Nozioni elementari intuitive intorno alla retta, al piano, ai segmenti, agli angoli, ai poligoni. Costruzioni relative, premesse le nozioni necessarie sull'uso degli strumenti (riga, squadra, compasso ecc).

Regole per la misura di tali figure.

Classe II. — Nozioni elementari intuitive intorno al circolo, agli archi di cerchio ed ai settori, e ai poliedri principali. Disegno di figure circolari e dello sviluppo dei solidi, costruzione di solidi in cartoncino.

Misure relative alla circonferenza, al circolo, agli archi e settori alle superfici e volumi dei poliedri.

Classe III. — Nozioni intuitive intorno al cilindro, al cono e alla sfera.

Sviluppo del cilindro e del cono. Misura della superficie e del volume di questi tre solidi. Regole inverse di misura. Semplici costruzioni geometriche.

II. — **Metodologia.**

L'insegnamento della matematica attraversa un periodo di crisi, al pari di quello delle altre scienze, per l'enorme progresso compiutosi nell'ultimo secolo. È impossibile chiudere le porte della scuola a questo progresso poichè lo sviluppo stesso delle scienze e delle industrie richiede ai licenziati delle scuole medie un corredo di cognizioni ben maggiore di quello che fosse necessario cinquant'anni fa Ad accrescere le difficoltà per quanto concerne la matematica, si aggiunge il lavoro critico degli ultimi decenni per il quale i fondamenti hanno assunto un assetto rigoroso molto soddisfacente, ma a prezzo di sviluppi lunghi e sottili.

Volendo tener conto del duplice progresso occorrerebbe nella scuola un tempo triplo, invece l'orario è rimasto lo stesso, se pure non è diminuito. Come fare?

La vera soluzione, è inutile illuderci, consiste in un radicale cambiamento delle nostre scuole medie. Il nostro ginnasio liceo non può seguire senza specializzarsi l' enorme progresso compiutosi nell' ultimo secolo in ogni ramo dello scibile. La Commissione reale dopo molti accurati studî si è convinta di questa necessità, e ha proposto i tre noti tipi di liceo, di cui uno dovrebbe assorbire la sezione fisico-matematica dell' Istituto tecnico.

Per quanto sia doloroso trasformare una scuola armonica nella sua struttura e gloriosa per tradizione, bisogna necessariamente addivenirvi, perchè è impossibile ormai che essa possa dare la cultura richiesta dal progresso moderno e nel campo letterario e nel campo scientifico.

Ma torniamo alla matematica. Per questa non si può sperare che qualche aumento d' orario nell' attuale e nei futuri tipi di liceo, tolga ogni difficoltà; bisogna anche rinnovare i metodi d' insegnamento.

La questione fondamentale su questo punto è pur sempre quella che indicai varî anni fa [1]. Si deve mantenere il corso razionale che riprenda dai principî l' aritmetica e la geometria, dopo qualche anno di studio pratico, o da questo studio si deve passare senz' altro all' algebra e a nuove parti della geometria?

Esaminiamo le varie opinioni.

« Un insegnamento moderno non può contentarsi, dice il Bourlet [2], di coltivare le facoltà dello spirito, ma deve saperlo arrichire di fatti numerosi e precisi. Noi non dobbiamo formare dei filosofi che vivano come sapienti eremiti, ma uomini d'azione che dovranno contribuire anche loro al progresso umano. Ed ecco perchè non ci è più permesso adesso di presentare ai nostri alunni la scienza matematica sotto un aspetto puramente speculativo; e che è necessario, a qualunque costo, sforzarci di far piegare le astrazioni matematiche alle necessità della realtà; e ciò più ancora per essere utili all' insieme della società, che non a ciascuno dei nostri alunni in particolare ».

---

(1) La questione fondamentale nei programmi proposti dal professore Vailati. Questo *Bollettino*, Anno VII, n. 4-5-6.

(2) Sulla penetrazione reciproca della matematica pura e della matematica applicata nell' insegnamento secondario. *Bollettino Mathesis*. Anno III, pag. 76.

E altrove, precisando ancor meglio le sue proposte, « nelle nostre classi secondarie, continua lo stesso Bourlet, il professore di matematica, preoccupato, non di ornare lo spirito degli scolari, ma di rendere servizio alla sua razza e all' umanità, deve assolutamente scartare del suo insegnamento tutto ciò che non avrà un' utilità più o meno diretta nell' applicazione ».

Il compianto prof. Vailati pur senza lasciarsi dominare da criterî così esclusivamente utilitarî, si avvicina assai alle vedute del Bourlet, nei programmmi proposti in nome della Commissione reale [1]. In questi infati, abolita la tradizionale separazione fra matematica pratica e razionale, passa dalla prima gradatamente alla seconda, senza riprendere *ab initio* dopo il primo triennio lo studio dell' aritmetica e della geometria, e trova così il modo di porre una quantità di teorie nuove e una quantità di belle applicazioni delle teorie vecchie.

La relazione annessa ai suoi programmi illumina chiaramente la ragione di un innovazione così ardita per le nostre scuole; tuttavia non sarà inutile che riproduca una lettera che mi diresse il 6 febbraio 1908 per rispondere ad alcune mie osservazioni.

« L'amico prof. A. Conti mi dà comunicazione di una sua lettera aperta che ho letta con molto interesse, tanto più che, giungendomi proprio mentre sto occupandomi di riordinare le note che ho preso sulle risposte date dagli insegnanti di matematica al noto questionario diramato dalla Commissione Reale, mi conferma nell' idea di insistere nella mia relazione per chiarire il più possibile la questione a cui Ella accenna, e che è ben fondamentale. Come, cioè, si deva intendere l' aggettivo « razionale » quando lo si applica alle varie parti della matematica che fanno parte dell' insegnamento secondario. A questo proposito mi richiamo a quanto, un po' troppo in succinto, ho avuto occasione di dire in quella specie di preambolo allo schizzo di programma di matematica per le scuole secondarie inferiori che pubblicai lo scorso agosto nel *Bollettino* del Conti. Come vedrà da esso a me pare che il carattere di « razionalità » di una data trattazione dipenda non tanto dal numero e dalla qualità delle proposizioni che in essa sono « postu-

---

[1] Relazione della Commissione Reale per l' ordinamento degli studi secondari in Italia — Vol. 1. pag. 322-329. *Boll. di matem.* Anno VI, fasc. 8-9 e 10-11-12.

late » o ammesse senza dimostrazione, ma dal rigore dei procedimenti raziocinativi mediante i quali dalle supposizioni date *(qualunque esse siano)* si arriva alle conclusioni o ai teoremi a cui la trattazione fa capo (senza far uso di nessuna premessa tacita, non enunciata ecc). I progressi appunto degli studi logici e analitici sui principii della geometria tendono, a quanto mi pare, a mettere in luce come sia tutt' affatto vana e inattuabile ogni idea di presentare a degli alunni, prima dell' Università un' esposizione della Geometria in cui *non vi sia di indimostrato se non quello che non si può dimostrare.*

Di più il concetto stesso di « assioma » o « postulato » cioè di « proposizione indimostrabile » è stato assoggettato a una critica che ha messo in chiara luce la sua « relatività », nel senso che una stessa proposizione può in due trattazioni diverse essere riguardata come un assioma o un teorema, a seconda del piano della trattazione e a seconda della particolare scelta che in ciascun caso, si è creduto di fare delle proposizioni fondamentali poste a base della trattazione. In questo senso mi pare che il contrasto tra geometria razionale e geom. intuitiva (o sperimentale come preferirei chiamarla) sia suscettibile di tutte le gradazioni possibili, a cominciare da quelle esposizioni in cui dopo aver verificato sperimentalmente date proprietà (per es. delle parallele, o il teor. di Pitagora ecc.) si addestra l' allievo a ricavarne deduttivamente delle conseguenze (per. es. dal teorema di Pitagora ricavare l'espressione dell' altezza mediante i lati, o l' area del triangolo in funzione dei lati ecc.). Anche per l' Algebra è la stessa cosa. L' aspettare ed adoperarne i segni finchè non se ne siano « dimostrate » le proprietà mi pare qualche cosa di tanto irragionevole come sarebbe aspettare a imparare e fare addizioni e divisioni prima di aver imparato a « giustificare « con ragionamenti i relativi procedimenti.

Io farei lo stesso perfino coi logaritmi, per es. non ne darei ai giovani neppure la definizione prima che abbiano imparato ad adoperare le tavole in modo da riconoscerne i vantaggi pratici. Provvisoriamente li definirei magari come *certi* numeri che si trovano in *certi* libri e sui quali operando in *certi* modi, si ottengono *certe* semplificazioni dei calcoli. Ma quest' ultima è un po' una caricatura per accentuare il mio concetto..... ».

A queste opinioni così spiccatamente moderne fanno riscontro quelle non meno autorevoli dei seguaci della tradizione. « L' insegnamento della matematica, ha ripetuto di recente il prof. Del Giudice (1), più che ad uno scopo puramente informativo deve

(1) Prefazione al I Vol. delle *Lezioni di aritmetica razionale e algebra elementare* ad uso dei Ginnasi sup. degli Istituti tecnici e dei Licei.

esser diretto a creare nelle giovani menti, l' abito e l' amore del ragionare, cioè di analizzare, connettere e coordinare i fatti del pensiero ». E il senatore Veronese: (1) « L' insegnamento è una funzione sociale importantissima e deve perciò adattarsi anche ai bisogni della vita; tuttavia non si può confondere la scuola di cultura con quella professionale e di arti o mestieri che ha altri scopi. Si debbono esercitare i giovani frequentemente nei problemi pratici, ma non bisogna esagerare; dell' utilitarismo nella vita pratica se ne fa abbastanza oggidì perchè lo dobbiamo portare anche nella scuola media, la quale ha pure per fine di elevare lo spirito verso le più alte idealità della vita ed educare la mente al ragionamento esatto e positivo.. ... Sarebbe poi strano che gli studi fatti sui principi della scienza da oltre un secolo, e in particolare sui trattati di geometria elementare, ... avessero per conseguenza un peggioramento anzichè un miglioramento del metodo di esposizione della geometria razionale..... Noi vogliamo dunque che questo metodo conservi la purezza e la bellezza del metodo greco, perchè esse scaturiscono dalla natura delle idee geometriche; ma vogliamo altresì perfezionarlo come istrumento logico, per quanto ciò è compatibile colle esigenze della scuola e colle condizioni intellettuali della scolaresca, e mutarne l'indirizzo filosofico *da metafisico in positivo* ».

Fra gli uni e gli altri son di parer contrario. Riconosco infatti che il metodo tradizionale è una pastoia che impedisce di spaziare in campi nuovi come richiedono le esigenze del progresso, ma d'altra parte, come dicevo quattro anni fa nell'articolo citato (2), mi pare che non si possa poggiare su basi malsicure l' intero edificio della matematica elementare, mi pare che non riprendendo dal principio la geometria e l' aritmetica con metodo razionale, possano poi sorgere dei dubbî sulla verità di quelle prime proprietà che servono di base a tutti gli sviluppi ulteriori.

Capisco che, come osserva il prof. Leoni (3), « la primitiva educazione logica della mente non è fondata sulla conoscenza delle

---

(1) Prefazione alla IV Edizione degli *Elementi di Geometria.*

(2) Questo *Bollettino* — Anno VII, pag. 82.

(3) Studio critico didattico sull' insegnamento della matematica nelle scuole classiche. Chiavari 1912, pag. 48.

dipendenze tra le relazioni di precedenza remota, ma sul riconoscimento delle dipendenze fra le relazioni attualmente concepite, e che soltanto uno spirito già logicamente costituito può sentire il bisogno di quella conoscenza anteriore » ma siamo apappunto noi che col nostro insegnamento dobbiamo far sorgere questo bisogno, è appunto la matematica che deve dar l'esempio di scienza logicamente costituita. Certamente non bisogna esagerare. Uno studio nel quale non vi fosse di indimostrato se non i postulati indimostrabili, come ben dice il Vailati, non potrebbe presentarsi che a studenti universitarî, ma da questo ad ammettere tutte le proprietà intuitivamente evidenti, o a stabilire sperimentalmente delle proprietà non evidenti e prenderle come punto di partenza di nuove deduzioni, ci corre un bel po'!

Esistono per fortuna nelle nostre scuole dei trattati di geometria che seguono il giusto mezzo, per es. quelli del Faifofer o dell'Enriques e Amaldi e anche questi si potrebbero in qualche punto semplificare un po' per giungere più presto alle applicazioni. Il trattato del Veronese sebbene ispirato a un criterio logico più rigoroso, è così immune da ogni prolissità che seguendolo si può pure trovar tempo per le applicazioni. Quello che sarebbe necessario è che esposta una teoria per es. quella dell'equivalenza, il professore non passasse subito ad un'altra, ma si fermasse per varie lezioni a fare degli esercizi, e vorrei che anche i trattati in uso nelle scuole contenessero alla fine di ogni capitolo delle applicazioni interessanti con avviamento alla risoluzione di esercizi ecc.

Per l' Aritmetica razionale le cose sono pur troppo diverse. Dai libri scritti alla buona di un tempo. (citerò, non per critica inopportuna ma per ricordare un libro che ha avuto una diffusione grandissima, l' *Aritmetica razionale* di Davide Poggi), siamo passati alle aritmetiche razionali del Catania, del De Franchis, di Del Giudice e di altri, che sono ottime sotto il rispetto scientifico, ma bisogna dir la verità, un po' minuziose. In esse infatti i postulati sono ridotti al minimo e quindi vien dimostrata una quantità di proprietà evidenti, mentre per il rigore basterebbe che venissero enunciate esplicitamente [1]. Non sempre è opportuna poi

[1] Non si deve dimostrare ciò che all'alunno sembra evidente, ricordando che l'evidenza è la qualità per la quale certe proposizioni s'im-

la scelta del metodo, e a questo proposito, non mi stancherò mai di sostenere che il metodo preferibile nell' insegnamento per introdurre le varie specie di numero è quello fondato sulla considerazione delle grandezze, perchè più vicino alle applicazioni, perchè trae maggiori risorse dall'intuizione, perchè in generale è il metodo storico e per una legge fondamentale dell'evoluzione la mente dell' individuo trova minori difficoltà a ripercorrere la via seguita dall' umanità nell' acquisto di una data conoscenza, Le trattazioni logiche elaborate a posteriori, hanno sempre qualcosa di convenzionale, e non lasciano mai penetrare addentro nel vero spirito della questione.

Così per gli interi, converrà partire dai gruppi di oggetti, come fa il Capelli nei suoi *Elementi di aritmetica ragionata* e in parte anche il De Franchis. E a questo proposito mi si consenta di riferire ciò che mi scriveva l' illustre prof. Capelli il 6 settembre 1906: « Io sono convinto che per l'insegnamento secondario quest'indirizzo sia assolutamente indispensabile a seguirsi per rimediare ai tanti inconvenienti che si lamentano generalmente (1) ». Le frazioni hanno la loro origine naturale nella considerazione delle parti aliquote delle grandezze, e i numeri relativi hanno la ragione di essere nelle grandezze dotate di doppio senso.

E finchè per stabilire la lunghezza della circonferenza si ricorrerà ai poligoni iscritti e circoscritti, converrà introdurre gl' irrazionali, colle classi contigue, non fosse altro per economia di tempo e di studio.

---

pongono allo spirito in modo che non si possano negare « senza una pena interna e dei rimproveri segreti della ragione » secondo la viva espressione del Malebranche, l' autore della ricerca della verità. FAZZARI relaz. cit. pag. 42.

(1) Non si sa perchè dal Couturat e da chiunque altro ne tratti, viene attribuita la paternità di questo metodo al Russel, mentre il Capelli ha pubblicato le sue ricerche nel 1901 (Sulla genesi combinatoria dell'Aritmetica, *Giornale di Matematiche*) e il Russel ha pubblicato i suoi *Principles of Mathematics* nel 1903. La trattazione del Russel parte dagli stessi concetti fondamentali a cui si è ispirato il Capelli l'unica differenza è che il Russel si è servito del simbolismo logico matematico. Io voglio ammettere che il Russel non conoscesse l' opera del Capelli sebbene pubblicata in un giornale diffuso, e che al pari del Capelli si sia ispirato direttamente ai risultati del Cantor, ma questa non è una buona ragione perchè venga misconosciuta l' opera del nostro illustre Algebrista.

Concludendo riteniamo che non si debba abbandonare il sistema tradizionale, finchè non abbiamo semplificato e migliorato i procedimenti teorici in modo da ottenere il massimo risultato col minimo sforzo, da dedicare un tempo maggiore alle applicazioni, e da aprire le porte della scuola a quei nuovi concetti e a quelle nuove teorie che aspettano ormai da troppo tempo di essere ammesse. Se fatti tutti i possibili sforzi non otterremo il risultato sperato, allora ci metteremo risolutamente per la via nuova.

Il prof. Fazzari nella relazione più volte citata viene su per giù alla stessa conclusione, di modificare cioè opportunamente senza abbandonarlo il sistema tradizionale. Egli propone che l'aritmetica razionale venga insegnata nei primi due anni di liceo, trasportando al ginnasio superiore i numeri relativi e le equazioni di 1° e 2° grado, mosso, ritengo, dalla maggiore astrattezza che presenta l'aritmetica razionale in confronto dell'algebra; ma in questo modo si ha l'inconveniente logico d'insegnare il calcolo letterale dei numeri relativi prima di conoscere quello dei numeri assoluti.

Il prof. Leoni invece propone senza esitare l'abbandono della tradizione storica [1], e in attesa della riforma, per conseguire contemporaneamente i due scopi: d'introdurre alcuni elementi della matematica superiore, e di non diminuire l'importanza formativa della matematica con trattazioni ibride semi-intuitive; propone di dividere l'insegnamento in due parti nettamente separate pel fine e pel metodo con orari distinti ed esami speciali. La prima parte (formativa-filosofica) avente per fine l'educazione del senso critico e dell'intuizione spaziale, dovrebbe svolgere con metodo deduttivo varie teorie geometriche fondamentali; la seconda (informativa, pratica) dovrebbe esporre sinteticamente le varie parti dell'Algebra che hanno maggior importanza per le applicazioni e la trigonometria. Orario per la prima nelle tre classi del liceo 1-2-2, per la seconda 2-1-1.

Dubitiamo assai che questa suddivisione di un orario per sè insufficiente possa condurre a risultati vantaggiosi, crediamo preferibile abbreviare per quanto è possibile gli sviluppi teorici delle varie teorie e farli seguire da svariate e interessanti applicazioni.

---

[1] Op. cit., pag. 48 e 49.

Per l'unificazione di notazioni e di linguaggio nella Matematica elementare

AMERIGO BOTTARI (Spoleto)

Il Prof. Giovanni Moglia, nell'ultimo numero di questo *Bollettino*, a proposito di una sua recensione su un testo di Geometria per le scuole secondarie inferiori, scritto dal prof. Pensa, fa il voto che nelle Matematiche elementari si cerchi di arrivare alfine ad un' unificazione, di modo che non accada, che da un testo a un altro vi sia tale diversità di linguaggio e di notazioni da vedere in uno condannato come errore ciò, che in un altro è adottato senza scrupolo.

Anch' io mi associo *toto corde* a questo voto: ognuno infatti non può non riconoscere quanto dannosa e antididattica sia questa mancanza di unificazione, specialmente per quegli alunni, e non sono pochi, i quali sono costretti a cambiare insegnanti e testi durante il loro corso di studi. Dico unificazione di notazioni e di linguaggio, ma non unificazione di metodo di insegnamento: a nessuno mai, certo, verrà in mente che ogni insegnante, debba come un automa seguire un indirizzo prestabilito: non ci mancherebbe altro!

Penso però che non sarebbe una violazione alla libertà dell'insegnante, se ad es. nell'aritmetica ci si accordasse una volta per sempre sul significato distinto, tra quoziente e quoto, concetti che in alcuni testi, pur ritenuti ottimi, vengono confusi, e che tale distinzione si mantenesse sempre anche nell' Algebra e nei corsi superiori. Non è il caso naturalmente di parlare di espressioni e di notazioni errate, che si trovano in molti testi, special-

mente in quelli destinati all' insegnamento elementare, testi che non dovrebbero avere il diritto all' esistenza, poichè sono dannosi.

Il prefato recensore della Geometria del **Pensa** encomia l' A. per avere introdotto sistematicamente il concetto di prodotto fra grandezze, di guisa che vengono legittimate le scritture seguenti:

$$\text{cm. } 5 \times \text{cm. } 7 = \text{cm}^2. \ 35 \qquad \text{cm}^2. \ 35 : \text{cm. } 7 = \text{cm. } 5$$

$$\text{cm}^2. \ 35 \times \text{cm. } 4 = \text{cm}^3. \ 140 \qquad \sqrt{\text{cm}^2. \ 225} = \text{cm. } 15, \text{ ecc.}$$

E qui su questo punto io non posso convenire. Prima di tutto a me pare conveniente il distinguere, sin dall'Aritmetica pratica, il concetto di grandezza da quello di quantità.

Si chiamano *grandezze* le linee, le superfici, i solidi, i pesi, le forze, i tempi, i gruppi di cose, ecc. Mentre si chiamano *quantità* espressioni come le seguenti: m. 15, Kg. 20; 5^h; 27^m; 12^s, soldati 140 ecc. In altre parole, quantità è il valore di una grandezza, scelta una conveniente unità di misura, in accordo del resto col significato etimologico della parola.

Ora pei numeri si definiscono i concetti di uguaglianza, di somma, di differenza, di prodotto, di potenza, di quoziente, di quoto, di rapporto, di radice quadrata, cubica ecc. per le quantità (omogenee ed omonime) si definisce pure l' uguaglianza, la disuguaglianza, la somma, la differenza, il prodotto e il quoto di una quantità per un razionale qualunque, il quoziente e il rapporto di due quantità (omogenee ed omonime): ma per me sento una ripugnanza a definire il prodotto e il quoto di due quantità siano pur speciali.

D' altra parte penso che il ragazzetto male si convincerà che, mentre sono giustificate le scritture

$$\text{cm. } 5 \times \text{cm. } 7 = \text{cm.}^2 \ 35$$
$$\text{cm.}^2 \ 35 : \text{cm. } 7 = \text{cm. } 5$$

e analoghe, non sieno giustificate, anzi sieno errate, quest' altre scritture

$$\text{L. } 3 \times \text{Kg. } 5 = \text{L. } 15$$
$$\text{L } 15 : \text{Kg. } 3 = \text{L. } 5$$
$$\text{L. } 15 : \text{L. } 3 = \text{Kg } 15$$

Sempre nel campo delle Matematiche elementari per le grandezze, nel senso sopra dichiarato, si possono stabilire facilmente i concetti di uguaglianza, disuguaglianza, di somma, di differenza, di prodotto per un numero, di quoziente e di rapporto (di due grandezze della stessa specie). Fuori poi del campo elementare precisamente nella Meccanica è opportuno poi introdurre il concetto di prodotto fra due grandezze della stessa specie o no, che si riduce poi al prodotto (scalare o vettoriale a seconda dei casi) di due vettori, giacchè, come è noto, ogni grandezza (non scalare) si può rappresentare con un vettore.

E così si parlerà di prodotto anche di tre grandezze, di quoto ecc.

Quindi saranno legittime le scritture

$$\text{(prodotto scalare) } a \times b = \overline{a}b \cos (\hat{ab}),$$

dove a e b sono vettori: così per es., se forza e spazio hanno la stessa direzione,

$$\text{forza} \times \text{spazio} = \text{lavoro}$$

che non sarebbe che il prodotto scalare (quantità) del vettore che rappresenta la forza per quello che rappresenta lo spazio.

Mentre la scrittura che talvolta si incontra

$$\text{Kg. } 3 \times \text{m. } 5 = \text{Kgm. } 15$$

deve ritenersi errata invece di queste altre

$$\text{Kgm. } 3 \times 5 \text{ oppure Kgm. } 5 \times 3$$

facili a spiegarsi.

Il prodotto vettore $a \times b$ invece è un nuovo vettore conveniente, che rappresenta la grandezza superficie del parallelogramma, i cui lati sono vettori uguali ad a e b.

E quindi, in quest'ordine di idee, si potrà dire che il prodotto di due segmenti è una superficie, il prodotto di tre segmenti (non complanari) è un solido, il prodotto di una superficie per un segmento pure un solido ecc.

Se in particolare due vettori a, b sono perpendicolari il prodotto vettore $\}a\ b\{$ rappresenta un vettore conveniente, che è la grandezza superficie del rettangolo di lati uguali ad a e b.

In particolare è

$$\text{tensore}\ a \times \text{tensore}\ b = \text{tensore}\ \}a\ b\{,$$

ma non per questo è legittimo scrivere

$$\text{cm } 5 \times \text{cm. } 3 = \text{cm.}^2\ 15,$$

giacchè il tensore è numero, mentre le espressioni cm. 5, cm 3, cm.^{2} 15 non sono numeri, ma quantità.

Riassumendo faccio voto, che si giunga presto alla unificazione tanto desiderata, ma che non vengano introdotte, nello studio dell' Aritmetica e della Geometria, locuzioni e scritture che possono generare equivoci, come quelle citate, le quali, mi pare, non hanno poi la loro giustificazione nella teoria dei vettori: giacchè grandezza e quantità (cioè valore della grandezza) non è la stessa cosa e il modulo o tensore di un vettore è un numero (rapporto al vettore unitario) e non una quantità.

Concedo pure, come si può facilmente obiettare, che è questione in sostanza di parole, e che non tutti vanno d'accordo sulla distinzione fra grandezza e quantità. Ma quello che è certo, è che il definire scritture come

$$\text{cm. } 3 \times \text{cm. } 5$$

e analoghe non è punto necessario, anzi pericoloso, mentre le scritture

$$\text{cm.}^2\ (3 \times 5) \quad \text{o} \quad \text{cm}^2\ 3 \times 5$$

e analoghe non hanno bisogno di giustificazione nuova, rientrando nel concetto generale di prodotto di una grandezza (o quantità se si vuole) per un numero.

PICCOLE NOTE

Del radiante

Il prof. Fais in un articolo pubblicato recentemente in questo *Bollettino* [1] insiste sull'utilità di assumere come unità di misura degli angoli quell'angolo al centro di un circolo che insiste su un arco uguale al raggio e propone di chiamarlo goniometro. Ora questo angolo che è ormai generalmente usato nei moderni trattati di trigonometria, geometria analitica, calcolo infinitesimale ecc., ha già ricevuto da parecchi anni il nome di *radiante.*

Questo nome che si trova già nelle *Lezioni di analisi infinitesimale* (Torino, 1893) del prof. Peano, ed è registrato p. es. dal Müller nel suo *Mathematisches Vokabularium* (Leipzig, 1900), è attualmente usato da moltissimi autori di tutto il mondo; limitandomi ai più recenti trattati italiani cito il Castelnuovo, *Geometria analitica* (1909); Berzolari, *Il metodo delle coordinate* (1911); Burali-Forti e Marcolongo, *Calcolo vettoriale* (1908); Fubini, *Lezioni di analisi matematica* (1912). Esso è stato probabilmente introdotto dagli inglesi, ma la sua etimologia è prettamente latina, derivando dal tema *radio* appunto a ricordare il modo in cui il radiante è definito, particolarità utilissima che manca al nome goniometro.

Infine è utile rilevare come la relazione che passa fra gli angoli e gli archi che è espressa assai imprecisamente dalla frase « l'arco espresso in gradi misura il corrispondente angolo al centro » (pag. 148), causa l'indeterminazione del vocabolo « misura, si può rendere con la massima chiarezza mediante i rapporti di grandezze e scrivendo quindi

$$\frac{\text{arco}}{\text{circonferenza}} = \frac{\text{angolo}}{\text{giro}}$$

In particolare considerando l'arco di lunghezza uguale al raggio ottengo

$$\frac{\text{raggio}}{\text{circonferenza}} = \frac{\text{radiante}}{\text{giro}}$$

e quindi

$$\frac{\text{arco}}{\text{raggio}} = \frac{\text{angolo}}{\text{radiante}}$$

Cino Poli *(Torino)*

---

[1] *Intorno alla misura degli angoli piani e degli archi di circolo*, pag. 145.

UNA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI WILSON

Il noto teorema di Wilson: *se* p *è un numero primo si ha*

$$(p-1)!+1\equiv 0 \pmod{p}$$

si può dimostrare assai facilmente fondandosi sulla proprietà delle radici primitive di un numero primo.

Sia g una radice primitiva di p [si sa che radici siffatte sempre esistono, anzi sono in numero di $\varphi(p-1)$ [1]].

Abbiamo che $g, g^2, g^3, \dots g^{p-1}$, all'infuori dell'ordine, sono congrue rispetto al modulo p ai numeri $1, 2, \dots p-1$.

Indicando con c_i uno qualunque di questi numeri, abbiamo

$$g\equiv c_1\ ,\ g^2\equiv c_2\ ,\ g^3\equiv e_3\ ,\dots,\ p^{p-1}\equiv c_{p-1} \pmod{p}:$$

moltiplicando membro a membro tutte queste congruenze, si ottiene

$$g^{1+2+3+\dots+p-1}\equiv(p-1)! \pmod{p},$$

da cui, poichè $1+2+\dots+(p-1)=\frac{p(p-1)}{2}$,

$$g^{\frac{p-1}{2}\cdot p}\equiv(p-1)! \pmod{p}.$$

Ma è

$$g^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \pmod{p},$$

onde per p dispari (per $p=2$ il teorema è evidente) si ha ancora

$$g^{\frac{p-1}{2}\cdot p}\equiv -1 \pmod{p}.$$

Quindi si conclude

$$(p-1)!\equiv -1 \pmod{p},$$

che è quanto volevasi provare.

Amerigo Bottari (*Spoleto*)

(1) φ è simbolo della nota funzione di Gauss.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI EULERO SUI POLIEDRI

In un poliedro convesso il numero delle faccie più quello dei vertici è eguale al numero degli spigoli aumentato di due.

Se si indica quindi con F il numero delle faccie, con V quello dei vertici e con S quello degli spigoli di un poliedro si ha

$$F + V = S + 2. \tag{1}$$

Si consideri, ciò che è sempre possibile, un punto interno al poliedro da cui si vedano tutte le faccie, e si proiettino da questo punto tutti gli spigoli del poliedro su di una sfera avente per centro il punto considerato. L' intera superfice sferica verrà divisa in tanti poligoni, per modo che ad ogni faccia del poliedro corrisponde uno e un solo poligono sferico, ad ogni spigolo un lato, e a ogni vertice un vertice della rete poligonale tracciata sulla sfera. Risulta evidentemente da ciò che il numero dei vertici della poligonale è eguale a V, quello dei poligoni ad F e quello dei lati a S. Per dimostrare che la relazione di Eulero sussiste fra il numero delle faccie, quello dei vertici e quello degli spigoli del poliedro basterà far vedere che sussiste fra i numeri dei poligoni, dei vertici e dei lati della poligonale corrispondente.

A tal uopo si osservi che se la relazione (1) è soddisfatta dai numeri considerati relativi ad una data rete P essa è soddisfatta anche dalle stesse quantità della rete P' che si ottiene dalla P togliendo un numero qualsiasi di lati. Infatti sopprimendo un lato si diminuisce di 1 o il numero dei poligoni o quello dei vertici; sopprimendo n lati si diminuirà di n non solo S, ma anche la somma $F + V$.

Si potrà quindi scrivere, indicando con F', V' e S' i numeri dei poligoni, dei vertici e dei lati della poligonale che si ottiene sopprimendo n determinati lati

$$S' = S - n$$

$$F' + V' = F + V - n$$

da cui

$$S = S' + n$$

$$F + V = F' + V' + n$$

e sostituendo nella (1)

$$F' + V' = S' + 2 \tag{2}$$

Il reciproco di quanto è stato dimostrato è evidente: è evidente cioè che se è

$$F' + V' = S' + 2$$

deve essere anche

$$F + V = S + 2.$$

Ora se della rete poligonale sferica relativa a un qualunque poliedro leviamo un numero di lati tale che sulla sfera resti tracciato un solo poligono di un certo numero m di lati per la rete poligonale così ottenuta si ha

$$F' = 2 \qquad S' = m \qquad V' = m$$

cioè

$$F' + V' = S' + 2.$$

Per questa poligonale vale la relazione di Eulero, essa varrà anche, per quanto si è detto precedentemente, per la rete da cui si è partiti, cioè tra il numero delle facce, quello dei vertici e quello degli spigoli di un poliedro vale la relazione

$$F + V = S + 2 \quad \text{c. d. d.}$$

LEONARDO TREVISIOL (*Treviso*)

RASSEGNA BIBLIOGRAFICA

M. Del Giudice: *Lezioni di aritmetica razionale e algebra elementare ad uso dei ginnasi superiori, degli istituti tecnici e dei licei.* — Volume 1° Fondamenti della dottrina del numero naturale e frazionario. — 2° Teoria dei numeri relativi - Sistemi di equazioni lineari. — 3° Numeri irrazionali e complessi - Limiti - Progressioni - La trascendente a^x - Equazioni quadratiche — Tipografia Elzeviriana di F. Marcolli e C. — Roma-Milano, 1911-12.

Un giudizio categorico dell' opera che sta pubblicando il chiaro professore Del Giudice (è in preparazione il 4° e ultimo volume) non si può dare senza aver prima risolto un' importante quistione metodologica, la questione cioè, se convenga, nell' insegnamento elementare della matematica, seguire la tradizionale separazione fra il metodo intuitivo e il metodo razionale, o se si debba piuttosto passare per gradi insensibili dall' uno all'altro genere di trattazione. Di questa questione mi sono occupato diffusamente in altro scritto [1] e non intendo tornare a parlarne, tanto più che è difficile venire ad una conclusione definitiva essendovi ragioni molto valide in sostegno dell' uno e dell' altro sistema.

Mi porrò pertanto dal punto di vista da cui si pone l' *A.*, che apparisce un seguace convinto del metodo razionale puro; e sotto questo rispetto il giudizio non può esser dubbio: i libri del nostro Autore sono fra i migliori che siano stati mai scritti per le scuole italiane.

Una rapida rassegna del loro contenuto e del metodo di trattazione varrà a convincere dell' esattezza di questo giudizio.

L' *A.* parte dal criterio che « l' insegnamento della matematica più che ad uno scopo puramente informativo debba esser diretto a creare nelle giovani menti l' abito e l' amore del ragionare, cioè di analizzare, connettere e coordinare i fatti del pensiero » [2], e perciò premette al

---

[1] Osservazioni sull'insegnamento della matematica nelle scuole classiche, *Bollettino di Matematica* — Anno 1912, questo fasc.

[2] Prefazione al 1° Volume.

1° Volume come introduzione alcune nozioni di Logica, « premessa naturale e quindi se non indispensabile, almeno opportuna, ad uno studio della matematica razionale ».

Nel 1° Cap. « Oggetto e simbolismo dell' aritmetica » si pongono come fondamentali i seguenti « giudizi a priori ».

1° Esiste la successione dei numeri naturali;

2° Essa ha un primo, ma non ha un ultimo elemento;

3° Ogni elemento di essa ha un unico precedente ed un unico successivo, eccetto il primo che ha un successivo, ma non ha precedente.

L' uguaglianza è considerata nel senso logico d' identità; non si parla di numeri uguali e disuguali, ma due simboli si dicono uguali o disuguali secondo rappresentano lo stesso numero o numeri distinti.

Le leggi fondamentali dell' uguaglianza divengono in questo modo conseguenze del principio d' identità.

Una parte importante è data (Cap. 2°) al procedimento d'induzione per il quale l'*A*. condivide le vedute del Poincarè. La verità del principio d' induzione per un gruppo limitato di elementi può stabilirsi con una catena di sillogismi non così per l'intera serie dei numeri ma d' altra parte in questo caso il principio può essere smentito dall' esperienza perchè « l' esperienza non può riguardare che un gruppo determinato di elementi, e in questo caso la prova sillogistica è sufficiente ».

La somma (Cap. 2°) è definita in modo non troppo semplice: « Se da un numero a si eseguiscono le operazioni di somma elementare con le quali dallo zero si è dedotto un numero b, si deduce un numero s che si dice la somma di a e b ».

Le proprietà fondamentali sono stabilite faticosamente in base alla legge costruttiva:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1;$$

ma qui e sempre poi in seguito deve esser notata la grande generalità data ai teoremi, e l' introduzione di adatte notazioni come il simbolo sommatorio Σ, quello di prodotto Π ecc.

Il prodotto di a per b vien definito (Cap. 4°) come somma di b numeri a, e stabilita la relazione:

$$a(b + 1) = ab + a,$$

il significato di $a \times 1$ e $a \times 0$ viene scelto in modo che questa relazione continui a sussistere, non altrimenti di quanto fa il De Franchis nella sua aritmetica razionale.

Sono sempre accuratamente dimostrate le proprietà delle uguaglianze e delle disuguaglianze, che di solito sono applicate senza essere neppure enumerate.

Il Cap. 5° tratta della successione dei multipli di un numero, il 6° delle potenze, il 7° della successione delle potenze di un numero e si hanno anche qui importanti teoremi che mancano negli ordinari trattati.

La differenza di due numeri a, b, tali che $a \geqq b$, è definita (Cap. 8°) come il numero r tale che $b + r = a$, ed il quoziente (Cap. 9°) come il numero q tale che $b\, q = a$. È messa bene in evidenza l' analogia fra le proprietà della differenza e quelle del quoziente, che permette di risparmiare la dimostrazione di quest' ultime.

Il Cap. 10° è dedicato alla divisione approssimata e il successivo alle congruenze, argomento evidentemente connesso al precedente.

La parte considerata non dipende dal sistema di numerazione; di questi sistemi si tratta nel Cap. 12°, e nel successivo è esposta la tecnica delle operazioni per numeri rappresentati da allineamenti di cifre in un qualsiasi sistema, e qui ci sia lecito esprimere qualche dubbio sull' utilità didattica di una trattazione così generale. Il Cap. 14° tratta di numeri congrui rispetto a moduli aventi una data relazione colla base della numerazione.

Le teorie del massimo divisore di un gruppo di numeri, del minimo multiplo, le proprietà dei gruppi di numeri primi fra loro ecc., sono esposte (Cap. 15-20) con ammirevole eleganza e generalità, per mezzo anche di opportune notazioni. In qualche parte si elevano un po' al di sopra del livello medio intellettuale degli alunni, a cui sono destinate, livello che purtroppo coll' aumentare del numero tende ad abbassarsi, ma l' *A.* stesso ha contrassegnato con asterisco i paragrafi che possono omettersi in una prima lettura.

Numeri frazionari.

Sono introdotti come simboli di operazioni effettuabili sui segmenti. La frazione elementare $\frac{1}{q}$ indica il modo col quale il pensiero passa dalla rappresentazione di un dato segmento OA_1, alla rappresentazione di un segmento che sia la q^{ma} parte del primo.

La frazione $\frac{p}{q}$ serve a « rappresentare le operazioni geometriche colle quali l' attività immaginativa del nostro pensiero passa dalla rappresentazione di un segmento $O\,A_1$ a quella di un segmento $O\,H$ che contenga p delle q parti uguali in cui il 1° si suppone scomposto: una divisione in parti uguali e una somma ».

L' introduzione dei nuovi numeri soddisfa anche al bisogno « puramente logico e formale di rimuovere dal terreno operativo dell' arit-

metica ogni caso d'impossibilità e di raggiungere la perfetta generalità dei simboli e delle leggi aritmetiche ».

Questo bisogno conduce ad una definizione di $\frac{p}{q}$ $\left[q \cdot \frac{p}{q} = p\right]$ che concorda coi risultati ai quali conduce la genesi intuitiva del simbolo stesso. L' *A.* mette anche in rilievo la necessità filosofica di « generalizzare progressivamente il concetto di numero per avere un sistema di simboli atto a tradurre colla massima generalità le determinazioni con cui la nostra mente concepisce il fenomeno dinamico dell' universo sensibile ».

Volume secondo.

Parte prima: *i numeri relativi.*

Anche questi numeri sono introdotti con considerazioni intuitive. « L' espressione generica di ogni quantità è il numero; ma una stessa quantità può spesso avere due distinti significati quando la si consideri come termine di un rapporto ».

Così lo stato di cassa di un negoziante è espresso in numeri ma questi nei rapporti del commerciante col mondo commerciale possono rappresentare crediti o debiti. Indicando con C il numero che esprime l' attivo e con D quello che esprime il passivo, lo stato di cassa si può rappresentare convenzionalmente con $C - D$; intendendo che questa differenza rappresenti un credito se $C > D$, un debito di quantità $D - C$, se $C < D$, mancanza di crediti e di debiti se $D = C$.

I simboli della forma $a - b$ così introdotti hanno poi un significato logico, in quanto servono a rappresentare la differenza di b da a nell'ipotesi di $b < a$. Ad essi si attribuiscono le proprietà fondamentali della differenza.

$$(1) \qquad (a - b) + b = a$$
$$(2) \qquad (a + \lambda) - (b + \lambda) = a - b,$$

« col fine puramente logico di conservare ai numeri naturali e frazionari compresi in essi, le proprietà stabilite ». Le (1), (2) si accordano anche col significato intuitivo; da esse si deducono le altre proprietà, e per la (2) si può passare dalla notazione introdotta a quella normale.

La somma è definita coll' uguaglianza:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)$$

e il prodotto coll'altra:

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Le varie relazioni di disuguaglianza fra numeri relativi sono ricavate dall'unica che un numero relativo a si dice maggiore di un altro b, se a è la somma di b e di un terzo numero positivo m.

Le definizioni di differenza e quoziente sono le solite. La teoria dei relativi presenta come si vede molte analogie con quella svolta dal prof. Baroni nei suoi *Elementi di algebra*, ma questi non parte come il nostro dalla considerazione del doppio senso delle grandezze.

La parte seconda tratta del calcolo letterale, ed in essa è notevole l'uso del concetto di funzione intera e razionale. Il principio di identità è stabilito rigorosamente per funzioni intere di una e di più variabili.

La parte terza tratta delle equazioni e della loro risoluzione numerica e algebrica. Quest' ultima, che costituisce il problema fondamentale dell'Algebra, consiste nel determinare, dato un sistema di equazioni a coefficienti letterali, quelle funzioni di questi coefficienti che sostituite alle variabili trasformano le equazioni in identità.

La teoria dell' equivalenza è trattata con insolita generalità, e da questa trattazione ci sembra risulti chiaramente illusorio il desiderio di ridurla, come vorrebbero alcuni (1), alle consuete proprietà dell' uguaglianza.

La quarta e ultima parte si riferisce alla divisibilità nel campo delle funzioni intere (regola di Ruffini ecc.) ed è completata dalla ricerca del massimo divisore e del minimo multiplo di due o più funzioni intere, argomento che sorpassa veramente i limiti dei programmi di scuole secondarie e però è posto in carattere minuto.

Il libro termina con un capitolo interessante relativo alla ricerca delle radici razionali di un' equazione a coefficienti razionali, e con una buona raccolta di esercizi al pari del 1° e del 3° Volume.

Volume terzo.

Capo I. — *Numeri irrazionali.*

Dopo un rapido riassunto della teoria dei frazionari considerati come operatori su segmenti, l' *A.* propostosi il problema della rappresentazione della punteggiata rettilinea sul campo dei numeri, trova dei segmenti che non hanno misura razionale rispetto al segmento unitario, donde la necessità di « creare dei nuovi simboli (numeri irrazionali) per rappresentare le relazioni di grandezza tra i segmenti rettilinei

---

(1) S. Catania — *Sull' inutilità dei teoremi sull' equivalenza delle equazioni* — Pitagora, Anno XIII; *Bollettino* — Anno VI n. 5-6-7.

e quindi anche tra le grandezze di ogni insieme che si possa riferire con una corrispondenza biunivoca all'insieme dei segmenti rettilinei ».

Questi simboli devono soddisfare alle condizioni:

1ª di poter rappresentare tutti i numeri del campo primitivo;

2ª di valere a rappresentare tutti quei segmenti ai quali non corrisponde una misura razionale rispetto a un certo segmento prestabilito.

3° di potersi sottoporre alla tecnica operativa già stabilita per i numeri razionali.

Tali sono le classi aperte e contigue (A, A') definite come segue.

« A. è l'insieme dei numeri razionali misure di segmenti minori o uguali di $O M$ e maggiori di $O H$, essendo $O H$ un segmento minore di $O M$ avente misura razionale rispetto al segmento unitario $O A$ e d' altronde affatto arbitrario »; « A' è l'insieme dei numeri razionali misure di segmenti maggiori od uguali a $O M$ e minori di $O K$, essendo $O K$ un segmento maggiore di $O M$, avente misura razionale, affatto arbitrario «.

Esse godono delle note proprietà: 1ª: $a_i \leq a'_j$, essendo a_i, a'_j elementi generici di A, A' rispettivamente; 2ª: prestabilito un numero ε piccolo ad arbitrio è possibile determinare a_i, a'_j in modo che sia $a'_j - a_i < \varepsilon$.

L'esistenza di criteri di scomposizione di un intervallo di numeri razionali in classi aperte e contigue senza elemento di separazione porta a introdurre i numeri irrazionali. « Quando il simbolo (A, A') non rappresenta alcun numero razionale, si dice numero irrazionale,.... e per definizione si assume come maggiore di ogni numero della classe A. e minore di ogni numero della classe A' ».

Segue la corrispondenza biunivoca tra i segmenti di una retta aventi origine in un punto di questa e il campo dei numeri reali, ammesso il postulato di Dedekind. Il confronto fra numeri reali, e le operazioni su di essi, sono trattati sostanzialmente col metodo delle classi contigue con frequenti riferimenti alle grandezze. Prima della sottrazione sono introdotti i numeri reali negativi.

Il Capitolo II tratta delle proporzioni, definite come uguaglianza di rapporti, dei principi di geometria analitica, argomento che sembra fuori posto qui, cosa strana in quest'opera nella quale l'ordinamento logico è osservato sempre senza preoccupazione di programmi; e del calcolo formale dei radicali riducibile a calcolo di potenze.

Il Cap. III tratta dei limiti, della continuità e discontinuità delle funzioni, delle frazioni decimali periodiche. In questo capitolo sono notevoli alcuni teoremi che appaiono per la prima volta, credo, in libri per scuole secondarie, come i seguenti:

Ogni funzione continua in un dato intervallo è anche finita in questo intervallo; una funzione continua in un dato intervallo che in

due punti distinti di questo assume a valori numeri contrari, almeno in un punto compreso fra questi due assume a valore lo zero, ecc.

Il Cap. IV tratta delle progressioni, della funzione esponenziale, dei logaritmi, di alcune loro applicazioni all' interesse, alle capitalizzazioni, agli ammortamenti, alle rendite, e del calcolo approssimato di numeri razionali, reali e delle radici aritmetiche.

Il Cap. V comprende il teorema del binomio, pochi cenni sui numeri complessi, la risoluzione dell' equazione di 2° grado, cenni sulle equazioni irrazionali, su quelle di grado superiore al secondo riducibili a equazioni quadratiche, e sui sistemi di equazioni non tutte lineari.

Contrariamente al solito i numeri complessi non sono introdotti colla considerazione di grandezze vettoriali, ma sono considerati dal punto di vista puramente formale di dare significato alle radici d' indice pari di numeri negativi.

In quest'opera colpisce il fatto, rilevabile anche da questa rapida rassegna, che pur essendo ispirata a un severo criterio logico, e pur ammettendo alcune idee moderne sull'insegnamento secondario, (ricorderemo per es. la parte data al concetto di funzione), non segue affatto le vedute moderne sui fondamenti dell'aritmetica, o, per dir meglio ne applica i risultati generali, senza attenersi ai metodi. Abbiamo visto infatti che le varie specie di numero sono introdotte sempre coi metodi tradizionali, e da questo punto di vista, l'opera potrebbe definirsi come il massimo sforzo che sia mai stato tentato per dare a questi metodi un assetto razionale inappuntabile.

Si ha così un vantaggio o uno svantaggio in confronto ai metodi formali che attualmente sembrano prevalere? — La risposta al lettore.

Noi riconosceremo che alcuni punti sono un po' prolissi, che altrove l'Autore si è abbandonato a considerazioni filosofiche che a taluno possono sembrare estranee all'aritmetica, ma che sono senza dubbio utili e belli quei continui riferimenti alle grandezze, che costituiscono l'anello di congiunzione fra la teoria e la pratica, fra l'immaginazione e la realtà.

Il libro non è facile, l'A. stesso lo riconosce; tuttavia in mano di valenti e coscienziosi insegnanti può dare ottimi frutti, e l'A. merita lode per aver reagito contro la tendenza a facilitare tutto che prevale nelle nostre scuole e contribuisce a farle decadere.

A. Natucci

Prof. PINCHERLE: *Lezioni di Algebra elementare ad uso delle scuole medie superiori.* — Bologna, N. Zanichelli, 1912.

Con questo volume, l'illustre professore dell' Università di Bologna viene a completare, procedendo a ritroso, il suo ben noto *Corso di Analisi algebrica*, offrendo così alle scuole medie un ottimo libro di testo.

Tra i nostri matematici italiani, il Prof. Pincherle è senza dubbio uno dei più indicati per la compilazione di un libro per le scuole secondarie.

La competenza in proposito che tutti gli riconoscono, non gli proviene tanto dall' aver iniziata la sua vita di insegnante con una breve sosta nei Licei, quanto dall' aver mantenuto, durante la sua carriera scientifica, sempre vivo il contatto con la scuola media; e ciò col compiere in molteplici circostanze la delicata funzione di Commissario agli esami di licenza negli istituti pareggiati, e di Ispettore nelle Scuole governative, e più ancora, quale Direttore della Scuola di Magistero annessa alla Facoltà di Matematica.

È ben noto infatti che in questa Scuola da cui sono usciti numerosi e valenti maestri di ogni grado, gli studenti si addestrano settimanalmente in conferenze della durata di quasi due ore, sia nell' esposizione didattica dei primissimi elementi di algebra e geometria, sia nell'interpretazione delle più elevate memorie sulla critica dei principii, venendo così ad urtare con grande vantaggio dell' elasticità della loro mente con le più umili difficoltà didattiche e con quelle della critica più profonda e quasi disorientante.

Il libro comincia con una prefazione in cui vengono esposti lo schema dell' opera ed i criteri scientifici e didattici a cui è informata: diremo, per un di più, che in questo trattato ben lungi dal venire accentuata, risulta addirittura soppressa quella *linea di demarcazione* tra l'Algebra e l'Aritmetica che già il Bertrand dichiarava ben difficile a stabilirsi.

L'Autore invece, seguendo un criterio più logico e naturale di quello precedentemente adottato da altri trattatisti, ha diviso la sua opera in due parti ben distinte; collocando nella prima l'Aritmetica dei numeri razionali e subito dopo le conseguenti applicazioni algebriche, e nella seconda tutte le altre teorie ed applicazioni che si svolgono nel campo ampliato dei numeri reali.

Assecondando poi una corrente che va sempre più intensificandosi, definisce il concetto di funzione e studia le variazioni delle più semplici; e successivamente, dopo d' aver stabilito con chiarezza e rigore l'importante principio della biunivoca corrispondenza tra i numeri reali (assoluti e relativi) ed i punti di una retta, tratta della rappresentazione grafica delle funzioni con l' uso delle coordinate cartesiane, met-

tendo così gli insegnanti che lo credessero opportuno, in condizioni favorevoli per fare una punta nella Geometria analitica e nel Calcolo differenziale, senza il pericolo di insinuare delle idee storte od incomplete che sarebbe poi difficile di poter sradicare nei corsi universitarii.

Le opere elementari del prof. Pincherle sono così diffuse in tutta Italia ed è così unanime il consenso degli insegnanti medii sui loro pregi didattici, che è superfluo il dire come anche in questa brillino quelle doti di semplicità e di chiarezza che si riscontrano nelle precedenti.

Solo in qualche capitolo di carattere strettamente aritmetico, e specialmente in quello intorno ai numeri reali l'esposizione, per quanto informata alla consueta chiarezza, potrà sembrare ad alcuni troppo minuta, tale e quale si potrebbe richiederla in un corso universitario; ma l'Autore, cui interessava di presentare una ben fondata introduzione al suo Corso di Analisi, non poteva tenere una via diversa.

Cogliamo però l'occasione per esternare il desiderio, certamente condiviso da molti insegnanti, che l'illustre Autore per rendere il suo testo veramente accessibile agli studenti del primo biennio degli Istituti Tecnici e così pure dei Licei dove l'insegnamento della matematica non ha guadagnato molto anche dopo la recente revoca del Decreto Orlando, trovi il tempo e la dovuta pazienza per comporre un'edizione ridotta del suo testo, in cui certe teorie vengano da prima semplicemente abbozzate e quindi chiarite ed approfondite con una ben ordinata serie di esempi e di esercizi.

A. Conti

In Memoria del prof. Lauricella

Mentre ne attendevamo un articolo che cortesemente ci aveva promesso in memoria di Enrico Poincaré, giungevaci la dolorosa notizia della Sua morte, seguita ad una brevissima, violenta malattia.

Giuseppe Lauricella nacque in Girgenti il 15 dicembre 1867, studiò presso la R. Università di Pisa e vi si laureò in matematica il 2 luglio 1892. Frequentò anche la R. Scuola Normale Superiore della medesima città ottenendovi il diploma il 10 luglio 1894. Due anni dopo conseguì nello stesso Ateneo pisano l'abilitazione alla libera docenza in fisica-matematica e nel 1898 fu nominato professore straordinario di calcolo infinitesimale nella R. Università di Catania ove insegnò anche per incarico, la meccanica superiore, l'analisi superiore e la fisica-matematica.

Il 27 maggio 1910 la Facoltà di scienze dell'Ateneo romano lo chiamò, con voto unanime, a coprire la cattedra per l'insegnamento dell'analisi superiore e, per incarico, l'insegnamento della meccanica razionale.

Dopo un anno, spinto dal desiderio di svolgere la vita in quell'Ateneo ove tanto si era affezionato e innamorato del cielo siciliano, rifiutò la cattedra onorifica di Roma e ritornò alla R. Università di Catania, ove si è spento con profondo dolore di tutti coloro che ebbero agio di apprezzare la non comune cultura e l'immensa gentilezza dell'animo suo nobile.

Le principali Accademie l'ebbero come socio; sin dal 1907 apparteneva alla Regia Accademia dei Lincei.

Lascia molte pubblicazioni di grande valore scientifico e delle quali alcune vennero premiate dalla Società Italiana delle Scienze dei XL con medaglia d'oro, e dall'Accademia delle Scienze di Francia con l'ambito premio Vaillant.

La Direzione

RUBRICA DEI CONGRESSI

III Congresso della “ Mathesis „

Società italiana di Matematica

Genova 21-24 ottobre 1912

Circostanze domestiche non liete impedirono al Direttore del Bollettino *di intervenire al Congresso, del quale pertanto possiamo dare un resoconto abbastanza diffuso per la cortesia usataci dai prof.ri* Civinini *e* Podetti *i quali seguirono con molta attenzione i lavori di questa importante riunione e ci favorirono gli appunti che seguono:* (1)

Lunedì 21 ottobre — Seduta inaugurale.

Alle ore 9, nella sala del ridotto del teatro Carlo Felice concessa dal Municipio, si inaugurava il Congresso.

Al banco della Presidenza siedono il R. Provveditore agli studi comm. Vigoni, che rappresenta S. E. il Ministro Credaro, il rappresentante del Prefetto, l'assessore prof. Vitali in rappresentanza del Sindaco, il prof. G. Castelnuovo presidente della « Mathesis » il prof. Gino Loria presidente della Sezione genovese della « Mathesis ».

Tra i convenuti notansi i senatori D'Ovidio, Veronese, Novaro, i prof.ri Fano, Enriques, E. E. Levi, Beppo Levi, Peano, Vacca, Lazzeri, il prof. Fucini in rappresentanza del preside del R. Istituto tecnico di Genova, e molti altri soci ed invitati.

---

(1) (N. d. D.) *Mentre correggiamo le bozze, ci giunge copia degli* Atti, *pubblicati con lodevole sollecitudine, per cura della « Mathesis »: formano un interessante volume, nel quale sono riprodotte le conferenze dei proff. Castelnuovo, Vacca, Reina e Loria e tutte le relazioni che servirono di base alle discussioni del Congresso oltre a quelle già comparse sul* Bollettino *della « Mathesis ».*

Il R. Provveditore agli studi porta al Congresso il saluto di S. E. il Ministro della P. I. e pronuncia un applaudito discorso, mostrandosi compreso dell'alta funzione educativa ed istruttiva della matematica.

Segue il prof. Vitali il quale porta ai convenuti il saluto del Sindaco di Genova, e dà a suo nome il saluto ai congressisti della « Mathesis ».

Il prof. Loria porge il saluto della sezione genovese della « Mathesis » e infine il prof. Castelnuovo pronuncia il discorso inaugurale.

Ringrazia anzitutto il Ministro di essersi fatto rappresentare al Congresso e lo ringrazia dell'interesse che prende ai lavori della Società ed alle questioni dell'insegnamento matematico secondario, alle quali ha dedicato alcune parole anche nel recente discorso di inaugurazione del Congresso della Società per il Progresso delle Scienze.

Ringrazia pure il Sindaco di Genova ed il Comitato ordinatore del Congresso. Entrando poi nel tema del suo discorso che riguarda: *La Scuola nei suoi rapporti colla vita e colla scienza moderna,* il prof. Castelnuovo accenna al poco interesse che oggi si presta alle questioni scolastiche da parte di coloro che non appartengono alla scuola. Ciò è dovuto al fatto ehe la scuola italiana si è oggi mantenuta appartata dalla vita e pecca di teoricismo; la tendenza allo specialismo ha aggravato il male. Il prof. Castelnuovo vagheggia una riforma della scuola che si liberi dal carattere troppo dogmatico che oggi la opprime. Teme però che l'opera sarebbe troppo lenta ed imperfetta quando ad essa dovessero provvedere solo gli uomini che vivono nella scuola. Egli invoca perciò una unione degli insegnanti e degli uomini di azione perchè insieme affrontino il grave problema.

Ed è lieto di lanciare questo augurio dalla nobile città di Genova, che pur nella febbre del suo intenso lavoro, sa dimostrare qual pregio essa attribuisca alla coltura.

Se l'ambiente ove trascorreremo questi giorni, conclude il prof. Castelnuovo, ci farà sentire quali solidi legami avvincono la vita attiva alla scuola, avremo una nuova ragione per rallegrarci di aver scelto Genova come sede del nostro Congresso.

L'elevato discorso riscuote ripetuti applausi.

Quindi si iniziano i lavori del Congresso.

Presiede il prof. Castelnuovo, che comunica la lettera di adesione della Società filosofica italiana. Avverte che per l'assenza del prof. E. Barone e del prof. A. Conti occorrono alcune modificazioni nel programma delle sedute.

Podetti giustifica l'assenza del prof. Conti, trattenuto a Livorno dalla malattia di un suo figliuolo.

Il Presidente prende atto e fa voti per la guarigione del figlio del prof. Conti. Propone che vengano designati due soci per la revisione del bilancio dell'Associazione « Mathesis », presentato dal prof. Fontebasso, e che verrà discusso nella seduta finale. Si nominano a tale scopo i professori Cattaneo ed Alasia.

Veronese critica l'operato della sotto-commissione italiana per l'insegnamento matematico, lamentando che le relazioni siano state stampate senza previa discussione fra i membri della sotto-commissione.

Il Presidente difende l'operato della sotto-commissione facendo rilevare che ogni relazione consta di una parte storica, sulla quale non c'è da discutere, e di apprezzamenti dell'autore fatti in seguito a *referendum* fra colleghi. Osserva che, ad ogni modo, se quelle relazioni rappresentano un parere personale, è pur vero che si attende la discussione su di esse prima di approvarle.

Veronese ribatte brevemente chiedendo che vengano distribuite fra i componenti la sotto-commissione alcune copie delle relazioni

D'Ovidio difende l'opera della sotto-commissione nazionale. Invita il presidente a riferire su ciò che si fece a Cambridge nella riunione della Commissione internazionale.

Il Presidente dice che a Cambridge gli è risultato che la nostra sotto-commissione procedette come quelle degli altri paesi e se le relazioni pubblicate da noi furono meno voluminose, non crede però che vi sia stata minore cura ed esattezza da parte nostra nella loro compilazione.

Veronese insiste chiedendo che si inviino almeno ai membri della sotto-commissione le bozze di stampa delle relazioni, prima di pubblicarle.

Il Presidente trova la proposta accettabile.

Lazzeri vorrebbe che qualche collega si incaricasse di riferire sulla relazione del prof. Conti, in una delle prossime sedute.

Il Presidente accoglie la proposta, e prega la signorina Sittignani di voler assumersi tale incarico.

La signorina accetta, purchè si lasci a lei un breve periodo di tempo per la lettura accurata della relazione, ciò che viene accordato.

Peano lamenta il continuo mutamento dei programmi nelle scuole classiche. Propone che si chieda al Ministero il permesso di usare nella scuola gli Elementi di Euclide nel testo greco, ciò che alcuni insegnanti vorrebbero fare se non temessero di sembrare originali.

Veronese afferma che occorre discutere sull'indirizzo dell'insegnamento della matematica prima di parlare di libri di testo.

D'Ovidio fa notare che lo studio del testo originale è utile per le opere letterarie, lo crede superfluo se non dannoso per le scientifiche, e crede che l'idea del Peano sarebbe disapprovata dallo stesso Euclide se oggi rivivesse.

Interloquiscono in proposito i professori Vacca e Peano.

Veronese vorrebbe che l'insegnante fosse lasciato libero sulla via da seguire, perchè tale libertà aumenta la sua responsabilità.

Su questo parere si trova d'accordo la maggioranza dei convenuti.

Il Presidente invita i congressisti a prender parte alla visita del porto e delle navi da guerra che avrà luogo nel pomeriggio, e toglie la seduta, rimandando la discussione al giorno successivo.

Seduta antimeridiana del 22 ottobre.

Ore 9 - Conferenza su: *I classici delle matematiche* del prof. G. Vacca.

— Nelle ordinarie storie della letteratura, i matematici trovano un posto subordinato e non adeguato all'importanza che le scienze matematiche hanno nel campo del pensiero. Secondo il prof. Vacca la ragione principale di questa subordinazione dipende dal fatto che manca, od appena accenna a sorgere, una critica letteraria degli scrittori matematici, intendendo la parola critica nello stesso senso col quale è adoperata nell'ordinaria storia della letteratura. Il più grande storico moderno della matematica, Maurizio Cantor, rassomiglia per la diligenza e l'accuratezza al Tiraboschi, piuttosto che non giunga all'acume ed alla visione complessiva di F. De Sanctis.

Considerato da questo punto di vista, dice l'oratore che l'insegnamento della matematica è suscettibile di essere svolto in modo diverso da quello abituale. Possiamo cioè considerare i classici della matematica, Euclide, Archimede, gli algebristi del rinascimento Cardano, Tartaglia e sopratutto i grandi matematici del secolo XVII e del XVIII Newton, Lagrange, Eulero, Gauss allo stesso modo col quale si studiano i grandi classici della letteratura e della filosofia.

Oggi l'insegnamento della geometria si fa obbligando i giovani ad esprimersi nel modo usato da Euclide. Non si potrebbe invece lasciarli liberi di esprimersi nel loro linguaggio abituale?

Da questo punto di vista la riforma proposta è dello stesso genere di quella da molti anni effettuata nell'insegnamento delle lingue e letterature classiche. Gli studenti di latino oggi non sanno più come una volta fare esametri e pentametri, ma, se studiano, gustano ed apprezzano forse più i poeti dell'antichità.

Perchè, conclude il prof. Vacca, anche i grandi matematici non potrebbero essere studiati ed apprezzati nello stesso modo?

Il Presidente ha parole di vivo elogio per il conferenziere, e su proposta sua il Congresso esprime un voto per la effettiva compilazione di un'antologia di classici delle matematiche, fatta da competenti persone, quale è vagheggiata dal prof Vacca.

Relazione del prof. Scarpis. — Il prof. SCARPIS riassume brillantemente la relazione sua e quella del collega FAZZARI: dopo di che il PRESIDENTE legge una lettera del prof. Fazzari in cui scusa la sua assenza, e sottopone all'esame del Congresso la proposta di una radicale trasformazione dell'insegnamento matematico nel Ginnasio, assegnando a questo Istituto, non senza qualche estensione, gli attuali programmi di Aritmetica pratica, Geometria e Calcolo letterale in vigore presso la Scuola Tecnica, e rimandando al Liceo lo studio dell'Aritmetica razionale.

Il prof. SCARPIS dichiara di accettare pienamente le idee del Collega; ma il Congresso, pur riconoscendo gl'inconvenienti dell'attuale insegnamento dell'Aritmetica razionale nel Ginnasio superiore, non accetta le conclusioni dei relatori ed approva invece che si solleciti dal Ministero, per riparare ai predetti inconvenienti, l'aumento di un'ora di lezione per classe nel Ginnasio superiore, e nella terza liceale.

Seduta pomeridiana del 22 ottobre.

Ore 15 - Il prof. GINO LORIA legge la sua conferenza su: *Eccentricità e misteri dei numeri.*

L'oratore espone molti fatti e molte considerazioni, da cui risulta quanto sia scarso il numero di coloro che sono in grado di concepire numeri molto grandi, sicchè l'intuizione nel campo aritmetico è una facoltà assai più scarsamente diffusa dell'analoga dote nel campo geometrico. Dopo di aver fatto rilevare i danni, anche pratici, che da ciò derivano, manifesta l'idea che sarebbe possibile tentare di svolgere nei giovani una preziosa qualità latente che divenne preziosa nei più grandi calcolatori che ricordi la storia.

Passa poi ad occuparsi, con molti e interessanti particolari, dei problemi più interessanti, tuttora irresoluti, che oggi presenta la Teoria dei numeri, eccitando i convenuti a dedicarvi le loro cure e le loro fatiche, e chiude ripetendo le melanconiche parole di Amleto: *O Orazio, vi sono in cielo e sulla terra assai più misteri di quanto sogni la nostra filosofia.*

Il prof. Loria è applauditissimo.

— Il presidente prof. CASTELNUOVO, dà la parola al prof. G. SCORZA relatore sulle Scuole ed istituti tecnici.

Il prof. SCORZA espone lo stato di fatto e le tendenze dell'insegnamento negli Istituti tecnici. Sorvolando sulla parte storica, egli si ferma sulle notizie statistiche precise che possono suggerire considerazioni di notevole utilità didattica. Così risulta da queste notizie come la materia sia inopportunamente distribuita fra i vari corsi dell'Istituto tecnico, come l'affollamento delle classi renda quasi impossibile un insegnamento ricco di esercitazioni, cioè efficace, come talune parti del programma vengano forse con poco convenienza trascurate, ecc., ecc., ...

Infine mostrate quali siano le tendenze più spiccate del nostro insegnamento matematico secondario, sostiene come il problema didattico ora più urgente, sia quello di trovar modo di *orientare* l'insegnamento matematico secondario verso quello superiore.

Alla Relazione del prof. Scorza succede un'ampia discussione la quale porta alla conclusione di rimandare ogni voto a quando sarà noto l'intero programma del Liceo moderno per evitare che delle speciali proposte concrete portino a sproporzioni fra i programmi del nuovo Liceo e quelli dell'Istituto tecnico.

Il Presidente dà la parola alla signorina Sittignani che riferisce, in luogo del prof. Conti, sulle *Scuole elementari.*

La signorina Sittignani, che omette di occuparsi della parte storica della relazione, si limita ad enunciare i voti espressi nella relazione stessa e cioè che siano semplificati i programmi di matematica nelle scuole elementari, almeno fino alla 4ª classe, e che si attenda colla riforma della scuola normale a preparare dei maestri migliori, perchè ciò tornerà pure a vantaggio dell'insegnamento elementare.

Stando le cose come sono attualmente, è da rilevare come molti insegnanti medi lamentino la nessuna preparazione degli alunni che superano l'esame di maturità, ciò che nei riguardi della matematica dipende anche dal modo con cui si istruiscono gli alunni delle scuole elementari, i quali si abituano a rispondere a domande artificiose.

Crede che si debba esprimere il voto che solo i migliori alunni della 4ª classe elementare siano ammessi a superare l'esame di maturità e che gli altri completino la loro istruzione nella 5ª classe il cui programma venga convenientemente modificato allo scopo di preparare alunni per le scuole medie.

Il Presidente apre la discussione e osserva che il relatore Conti propone l'alleggerimento dei programmi delle scuole elementari; propone anche che si provveda alla correzione di errori che nell'insegnamento elementare della matematica sono abituali.

Martini-Zuccagni - Dice che è necessario un vero alleggerimento dei programmi delle scuole elementari, che sono divenute piccole università; agli alunni di queste scuole basta insegnare a leggere, scrivere e far di conto.

Bortolotti - È d'accordo che si debba limitare l'insegnamento dell'aritmetica a quello delle quattro operazioni, perchè ai piccoli alunni non si può spiegare di più e perchè di più i maestri non sanno insegnare.

Il Presidente osserva che resta dunque stabilito che debba proporsi una riduzione dei programmi di aritmetica nelle scuole elementari. E ciò si approva dai congressisti.

Pincherle - Dalle ispezioni da lui compiute risulta che nel primo corso delle scuole medie inferiori è altissimo il numero dei riprovati agli esami finali.

Trova buona, per togliere tale gravissimo inconveniente, la proposta della signorina Sittignani, ma crede rimedio particolarmente utile l'esame di ammissione alle scuole medie inferiori.

Il Presidente vorrebbe sostituiti a tutti gli esami di licenza gli esami di ammissione. Pone ai voti la proposta Pincherle.

Sittignani - Convenendo nella proposta del prof. Pincherle, osserva che bisogna però mettere gli alunni in grado di superare l'esame di maturità e perciò insiste nella sua proposta per l'obbligo alla 5ª classe per gli alunni meno maturi, con relativa modificazione dei programmi di quella classe.

Fano - Fa notare che colla proposta Sittignani si offende la legge, la quale esige che la 5ª e 6ª elementare servano a completare la cultura popolare e non debbano servire a preparare alunni per scuole medie. Non si deve modificare la legge; si devono preparare insegnanti migliori.

Veronese - È contrario all'esame di ammissione con cui si aggiungerebbe un altro esame, e gli alunni sono già troppo aggravati di esami.

Pincherle - Osserva che non si tratta di aggiungere, ma di sostituire all'esame di maturità, quello di ammissione.

Il Presidente pone in votazione la proposta del prof. Pincherle, che è approvata.

Si leva la seduta alle ore 19.

Alle ore 21 del 22 ottobre, nell'Aula magna della R. Università, i congressisti di « Mathesis », unitamente ai soci dell'Associazione Elettrotecnica italiana e della Società italiana di Fisica, si riuniscono per invito dell'Associazione fra i Professori Universitari, per discutere sull'*Ordinamento degli studi per gli allievi ingegneri.*

Al banco della presidenza prendono posto: il prof. Enriques, presidente dell'Associazione fra professori di università; il prof. Castelnuovo, presidente della « Mathesis »; il prof. Somigliana, presidente della Società italiana di Fisica; e il prof. Lori, relatore e presidente dell'Associazione elettrotecnica.

Presiede il prof. Castelnuovo.

Il prof. Enriques prende la parola per ringraziare gli intervenuti e spiegare la ragione che indusse l'Associazione da lui presieduta a prendere l'iniziativa della riunione.

Il prof. Castelnuovo accenna alla grande importanza del problema per la risoluzione del quale la « Mathesis » ben volentieri coopererà. Dà la parola al relatore e raccomanda la brevità.

Il prof. Lori accenna alle quattro questioni fondamentali e cioè:

1° Qualità della cultura secondaria più adatta per i futuri allievi ingegneri;

2° Estensione e metodo per l'insegnamento delle materie scientifiche principali (matematica, fisica e chimica),

3° Estensione e campo dell'insegnamento pratico;

4° Grado delle specializzazioni;

Al riguardo della 1ª questione egli crede che la cultura classica degli alunni sia preferibile ad ogni altra.

Al riguardo della 2ª questione vorrebbe associare fino dal 1° anno di università i corsi di matematica con qualche corso applicativo; così per es. la topografia si potrebbe portare al 1° anno.

Sull' estensione e campo dell'insegnamento pratico, egli afferma che nelle scuole di applicazione degli ingegneri non si può fare la pratica vera che deve essere fatta fuori della scuola; perciò l'oratore propone che gli allievi prima di ottenere il diploma da ingegnere debbano stare un anno presso qualcuno dei grandi stabilimenti che lo Stato ha; per esempio nelle Ferrovie, Genio Civile etc.

Infine sulla quarta questione egli vorrebbe che fossero solo tre le specializzazioni dell'ingegnere: Architettura, ingegnere civile e ingegnere industiale.

L' oratore conclude molto applaudito.

Il prof. Somigliana riferisce sulla seconda questione posta dal professor Lori, cioè sull' ordinamento degli studi matematici nel 1° biennio della Facoltà di scienze e dei Politecnici.

Propone:

1° che l'insegnamento del calcolo infinitesimale sia incominciato nel 1° corso di università;

2° che gli insegnamenti di algebra e geometria proiettiva siano limitati nel loro svolgimento;

3° che la meccanica razionale sia portata al secondo corso di Università.

Il *Presidente* apre la discussione, alla quale con elevati discorsi prendono parte il senatore D'Ovidio, il prof. Canevazzi, direttori entrambi di scuole d'applicazione degli Ingegneri, l'Ing. Luiggi. e il prof. Pincherle che combatte la proposta del prof. Somigliana, nella convinzione che non si debba limitare la libertà d' insegnamento ai professori del 1° biennio della facoltà di Scienze coll'obbligarli a farne un corso di preparazione alle Scuole di applicazione mentre che le esigenze dell'insegnamento della scienza richiedono negli insegnanti vedute più larghe.

Parlano nuovamente i professori Enriques, Somigliana, nonchè il senatore Veronese che propone un ordine del giorno col quale si invita il Ministro a nominare una Commissione che faccia gli studi necessari

alla riforma, l'ing. Manfredini di Milano, il prof. Padoa, il prof. Bortolotti, il prof. Enriques che relativamente alla proposta del prof. Veronese, vorrebbe che la Commissione che dovrebbe studiare la riforma emanasse dalla assemblea.

Finalmente su proposta dell' ing. Manfredini si approva un ordine del giorno che deferisce ai presidenti delle associazioni convenute la nomina della Commissione che inizi gli studi necessari per la riforma invocata.

Mercoledì 23 ottobre — Seduta pomeridiana.

Presiede il prof. Castelnuovo.

Il Presidente dà la parola al prof. Lazzeri, il quale riferisce sulle scuole industriali, commerciali e sulle Accademie navale e militare, avvertendo che si stanno rimaneggiando i programmi dell'Accademia Navale sui quali spera sarà possibile fare dei ritocchi, e aggiungendo riguardo alle scuole dipendenti dal Ministero dell' A. I. C. che la sua relazione ha ormai un importanza puramente storica giacchè anche per queste scuole si stanno facendo degli studi di riordinamento e di riforma dei programmi.

Bisconcini raccomanda che la « Mathesis » si interessi di quanto riguardi il programma d' insegnamento della matematica in queste scuole.

L'Assemblea approva un ordine del giorno col quale la Presidenza è delegata ad informarsi sul modo nel quale sono stati organizzati i programmi per le scuole industriali e commerciali e a studiare se e in qual modo la « Mathesis » possa esercitare un' influenza su di essi.

Fucini chiede un voto affinchè il gravoso orario della matematica nella prima classe dell' istituto nautico sia repartito in 2 anni.

La proposta Fucini la quale si collega colla riforma degli istituti nautici da lungo tempo allo studio dà luogo a viva discussione a cui partecipano Loria, Lazzeri e il Presidente, il quale infine propone all' assemblea di invitare la Presidenza a interessare il Ministero per il riordinamento degli istituti nautici. L' Assemblea approva.

Il Presidente dà la parola alla signorina Sittignani la quale riferisce sulla relazione Conti riguardante le Scuole complementari e normali la quale conclude colle seguenti proposte:

a) aumento della durata del corso;
b) alleggerimento degli orari generali di queste Scuole;
c) riforma dei programmi.

Interloquiscono D' Ovidio e Bisconcini.

Il Presidente ringrazia la signorina Sittignani e afferma che il Ministro è propenso alla diminuzione dell'orario che è troppo gravoso ma

non è favorevole all'aumento di un anno del corso ritenendo che verrebbe aumentata la crisi magistrale.

Loria richiama l'attenzione del Congresso sui lavori fatti in proposito dalla Sezione genovese della *Mathesis*, con l'approvazione e l'aiuto della Sezione pavese.

Civinini ricorda che l'incarico di tali studi fu affidato a lui e al prof. A. Levi e che il fulcro del riordinamento proposto pure da essi, era l'aumento di un anno di studi a cui seguiva la proposta di dividere il corso normale in due anni di cultura e due di tirocinio; inoltre ricorda che essi proponevano che il tirocinio fosse affidato per la matematica agli insegnanti stessi di matematica.

Veronese osserva che la maggioranza delle alunne delle Scuole normali non intraprendono la carriera magistrale frequentando la Scuola normale semplicemente a scopo di cultura in mancanza di una scuola in Italia, di cultura femminile; vorrebbe che fosse istituita tale scuola di cultura e allora si potrebbe con maggior sincerità, parlare di riordinare la Scuola normale.

Il Presidente propone di studiare una riforma che migliori i programmi ed alleggerisca l'orario senza aumentare per ora gli anni di studio.

L'Assemblea approva.

Il Presidente dà la parola al prof. Veneroni il quale espone la sua relazione sul valore specifico della laurea in matematica concludendo con la proposta che nei concorsi per l'insegnamento della matematica siano ammessi solo i laureati in matematica, oppure sia accordato a questi il diritto di partecipare ai concorsi per l'insegnamento della fisica.

Segue un' animata discussione a cui partecipano Civinini, Podetti, Levi, Veneroni, Macchiati, Bisconcini, D'Ovidio, Veronese, Sittignani. finchè l'Assemblea approva di far voto: 1° che ai concorsi di fisica per le scuole medie siano ammessi anche i laureati in matematica; 2° che per l'insegnamento nelle classi aggiunte o per supplenze non si riguardino come titoli di abilitazione per l'insegnamento della matematica, finchè è posssibile, la laurea in fisica e il diploma di ingegnere se non per coloro che abbiano ottenuto l'idoneità in un concorso di matematica.

Il prof. Veneroni riferisce anche, ad invito del Presidente, in sostituzione del prof. Vivanti, sulla incompatibilità dell'ufficio di assistente con quello di professore nelle scuole secondarie. In base alle proposte del prof. Veneroni e alla discussione a cui partecipano D'Ovidio, Veronese e il Presidente, l'Assemblea approva di far voto che la predetta incompatibilità sia tolta anche pei professori di matematica.

È tolta la seduta alle ore 18,45.

Ultima seduta (24 ottobre 1912).

Presiede il prof. Castelnuovo.

Il prof. Fontebasso presenta il resoconto finanziario.

Alasia, a nome pure di Cattaneo, altro revisore dei conti propone l'approvazione con plauso dell' opera amministrativa della Presidenza e la proposta è approvata all' unanimità.

Ha poi luogo uno scambio di idee sul funzionamento della biblioteca sociale e sulle modificazioni da apportarsi al *Bollettino* sociale. Riferisce in proposito il Presidente il quale chiede ai soci di lasciare alla facoltà del C. D. di assumere o no un redattore fisso che potrebbe fungere pure da bibliotecario; ciò si potrà attuare se si verifichi un ulteriore aumento dei soci e una maggiore diffusione del *Bollettino* procurando che vi si abbonino anche gli Istituti come tali.

Interloquiscono Loria, Padoa, Fontebasso, Fucini, Levi, Cattaneo e l'Assemblea approva le proposte del Presidente.

Il Presidente ringrazia la Sezione genovese e per essa il presidente prof. Loria, il Municipio, i Soci convenuti, il Segretario-Cassiere del C. O. prof. Civinini, i Segretari delle sedute e si compiace dei lavori compiuti dal Congresso che dichiara chiuso alle 10,30.

ERRATA-CORRIGE

Nella Nota di E. Trevisan « *Dimostrazione di un teorema sui numeri razionali* » inserita nel numero 3-4-5 del corrente anno, nell' ultima formola a pag. 115 invece del segno $>$ ci vuole il segno opposto $<$.

Finito di stampare il giorno 6 marzo 1913.

Alberto Conti: *Direttore Responsabile.*

INDICE DELL'ANNO XI

A) Articoli generali d'indole scientifico didattica.

B) Programmi e relative proposte di riforma.

C) Piccole Note.

D) Corrispondenza.

E) Varietà.

F) Rubrica dei Congressi.

G) Necrologia.

H) Rassegna bibliografica.

I) **Rassegna delle riviste.**

L) **Rubrica « fuori testo ».**